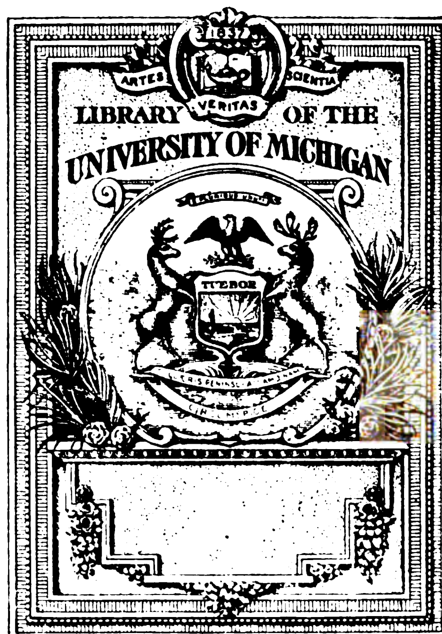
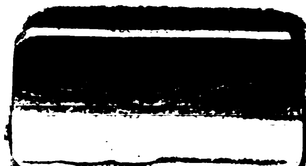

ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



THEORIA MOTVS CORPORVM SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX

PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS

STABILITA

ET AD OMNES MOTVS,

QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,

ACCOMMODATA.

AVCTORE

LEONH. EVLERO

ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE
ACADEMIAE IMPERAT. PETROPOL. SOCIO HONORARIO ET ACADEMIARVM
SCIENT. REGIARVM PARISINAE ET LONDINENSIS MEMBRO.

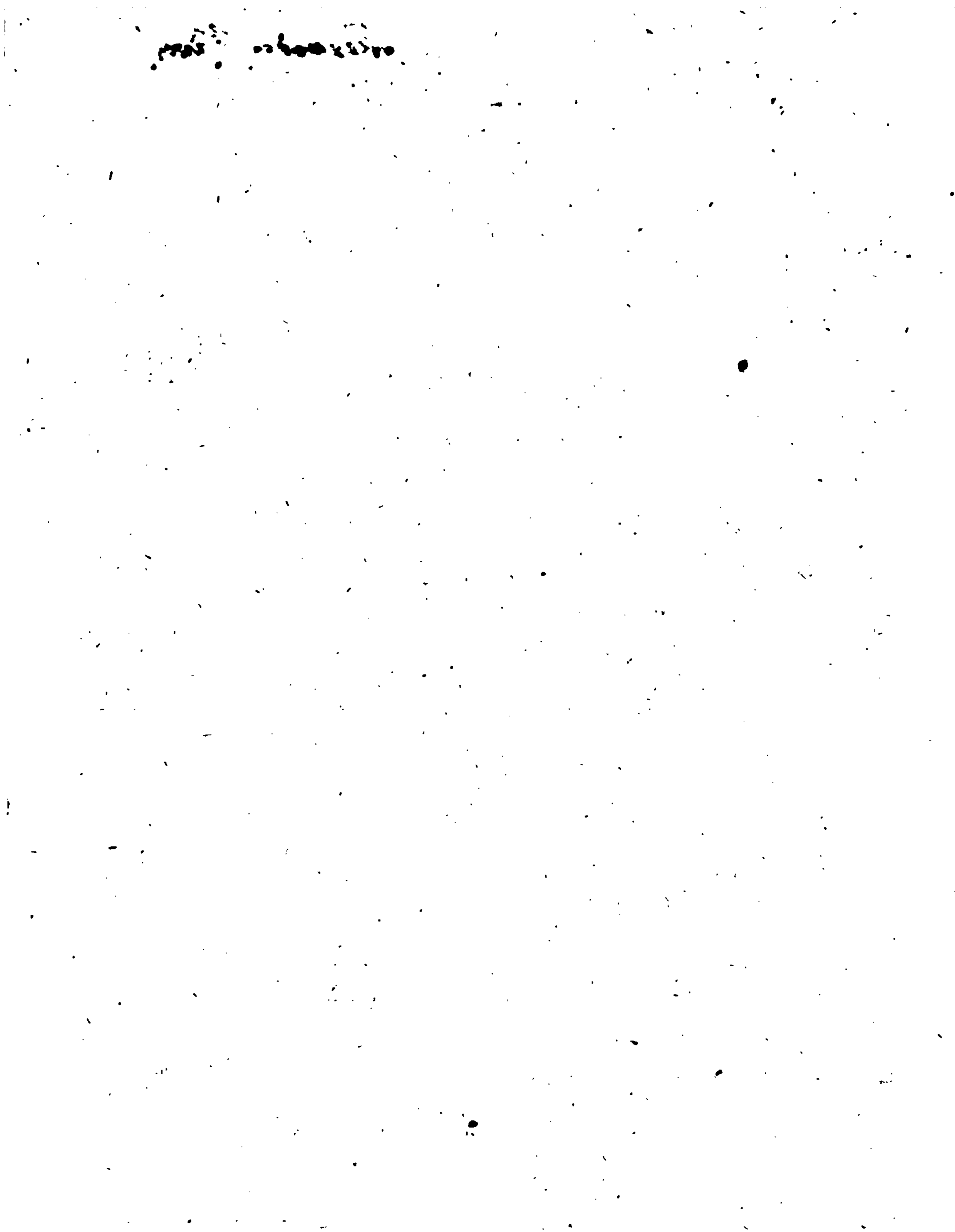


EDITIO NOVA,

DESIDERATISSIMI AVCTORIS SVPPLEMENTIS LOCVPLETATA
ET EMENDATA.

GRYPHISWALDIAE

LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCXC.



Non quidem lucri cujusdam inſignioris exſpectatio, ſed probatiſſimi Euleri ſcriptorum ſatis explorata ratio, de quorum juſto pretio conſtituendo inter omnes artis peritos jam pridem abunde convenerat, nec non ſingularis ille honos amicorum meorum deſideratiſſimo Karstenio tributus, huic videlicet libro, cui tanquam vino vendibili tali ſuſpenſa hedera non opus erat, ex benevolo Auctoris decreto praefationem ſuam praemittendi — — haec, inquam, argumenta ante hos viginti quinque annos unice me ſtimulis efficaciſſimis potuerunt concitare, ut praeſtantiſſimum hocce opus prelo meae officinae mandatum propriis ſumtibus excudendum curarem.

Sed tum temporis paucorum tantum exemplarium Editionem adornabam, ſiquidem, quod ſagacioribus ingeniis graviter dolendum eſſe videtur, illorum omnino numerus perquam exiguus eſt, quibus inſignem Eulerum capere, vel ex ejusdem inſtitutionibus fructum condignum reportare contingat. Quae res quemvis bibliopolam commodis ſuis conſulturum majorique cum foenore pecuniam ſuam alia conditione collocaturum facilius deterrere poſſit, quam allicere. Unde fit, ut hujus generis ſcriptis tantorum impedimentorum mole oppreſſis difficilior tantum ingreſſus ad eruditorum Rempublicam concedatur.

Rarior interim iſte exemplarium numerus per hoc ſatis amplum quinque luſtrorum ſpatium tandem ex ſententia diſtractus fuit. Et quum hic optimae notae liber nonnunquam re-

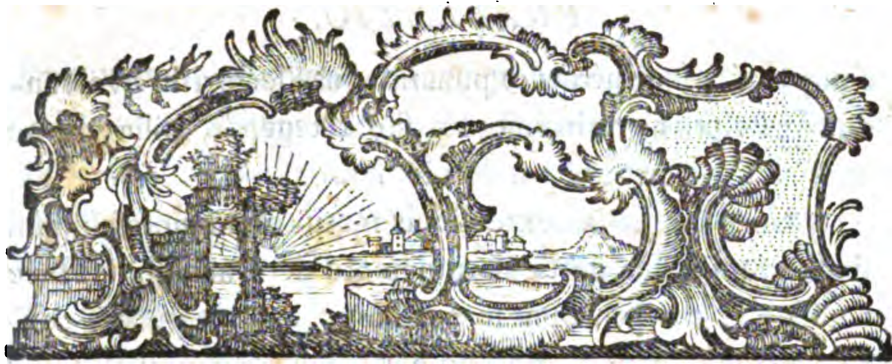
quiratur, mihique priores laminae aeneae, quae adhuc in promtu sunt, opportune subveniant, artis peritos in isto scripto comparando qualicunque mea opera fraudare nolui.

Ad recentem igitur hanc Editionem animum adjiciens, illud institutum Excellentissimo Auctoris filio Iohanni Alberto Eulero, *Professori Academiae, quae Petropoli floret, celeberrimo aperire sustinui, qui quidem, quae singularis ejus in me fuit humanitas, maximi momenti me instruxit additamentis ex aliunde prostantibus ejus Commentariis aliisque huic argumento inservientibus scriptis curatius petitis, adeo ut haec, quam in conspectum produximus, nova Editio priorem quoad quartam fere partem antecellat. Accesserunt enim Paragr. 955 usque ad 1090 nec non 1207 usque ad 1294. (Vid. Indic. Capit. Pagina 449 - 504. 568 - 624.) quorum beneficio huic operi egregius additus est perfectionis cumulus.*

Quae quum ita sint, nullus plane dubito, me omnibus ac singulis, quibus Euleri *scripta in pretio et usu habentur, gratum esse facturum. Ornamento igitur mihi duco, quod liceat justis rei aestimatoribus librum praestantissimum denuo consecrare. Quae quidem palma tanti profecto mihi visa est, ut nunquam mihi posthac in mentem incidere possit, sive de emolumento sive de jactura ex hoc consilio proficiscente rationes mecum reputare, illasque nimis anxie revocare ad calculos. Dabam Gryphiswaldiae d. 17. Ian. MDCCXC.*

ANTONIUS FERDINANDUS RÖSE.

PRAE-



PRAEFATIO.

Quae ſint VIRI PERILLUSTRIS, LEONHARDI EULERI in univerſam Matheſin merita, longa hic enumerare oratione, ac imprimis eum, in quo edendo curam et operam poſui, de motu corporum rigidorum tractatum, multis commendare verbis, licet haud incongruum nec a ſcopo prologi alienum eſſe videatur; ſuperſedere tamen hoc negotio me poſſe arbitror, cum tanta et tot eximia PERILL. AUCTORIS inventa, quibus omnes fere Matheſeos partes ad ſummum extulit perfectionis faſtigium, per univerſum orbem eruditum celebratiſſima omnem exſuperent laudem. In eo itaque ſolo occupatus ero, ut brevibus integri hujus operis ſummam recenſeam, ac ea prae-

cipue capita succinctius exponam, quae lectori in evolvendo hoc scripto ac ratiociniorum filo detegendo utilia esse ac operam sublevare posse mihi visa sunt.

Corporis finitae extensionis motus non innotescit, nisi singularum ipsius particularum motu determinato. Haec caussa est, cur principia motus corporum, ut puncta consideratorum, abstrahendo ab eorundem extensione, prius sint stabilienda, quam negotium leges motus corporum finitae magnitudinis evolvendi suscipi queat. Explicata jam est theoria de motu punctorum a CEL. EULERO in *Mechanicae sive motus scientiae analytice expositae* Tomo I. et II. quod opus absolutissimum A. 1736. Petropoli ex typographia Academiae scientiarum prodiit. Promiserat simul CLAR. AUCTOR, operi huic subjungere tractatum de motu corporum finitorum et primo quidem rigidorum, pari methodo conscribendum. Ac licet hoc argumentum tam arduum et antehac tam parum tractatum maximis implicatum invenisset difficultatibus; felici tamen successu tandem omnia vicit impedimenta ac prorsus novam fere elaboravit scientiam, cujus principia, qualiacunque licet antea fuerint cognita, ad tantam ab ipso promota sunt universalitatem, ut nihil amplius in hac Mechanices parte desiderandum reliquerit. Quin quod vix expectandum erat, abstrusissima haec inventa mira exposuit evidentia non tantum sed et perspicuitate, ita ut Artis peritis non tantum aditus ad mysteria in hoc libro recondita pateat; sed et idem opus iis erudiendis inservire queat, qui in analysi jam

satis

ſatis exercitati Mechanices ſtudio primam admovent manum. In horum praecipue gratiam hic tractatus non tantum inſtar Tomi III. Mechanices duobus jam tomis comprehenſae conſcriptus eſt; ſed ſimul praemiſſa eſt a CELEB. AVCTORE *Introductio*, univerſae Mechanices fundamenta, prima nimirum de motu punctorum principia, methodo plane nova, priore faciliori concinniori et evidentiori ſiſtens evoluta. Integrum itaque opus perluſtrari poteſt ſine ullo ſubſidio principiorum in prioribus de Mechanica libris expoſitorum, quorum tamen lectio ideo non negligenda, ſed potius omnibus commendanda eſt, qui principiorum de motu punctorum generalium applicationem ad ſolutiones problematum ſpecialium ſibi reddere cupiunt familiarem. Sed operae pretium eſſe arbitror, ut ſuccinctius exponam, quae ſit methodi in Introductione huic operi praemiſſa uſurpatae a methodo priorum de Mechanica librorum differentia.

Effectus potentiarum, quibus mobile ſollicitatur, alias duobus principiis comprehendi ſolet, quorum altero definitur, quantum celeritas mobilis immutetur, altero autem, quantum ejus directio inflectatur. Eandem methodum effectus virium exprimendi ſecutus eſt CEL. AUCTOR in prioribus libris de Mechanica, ſicque omnes quaeſtiones de motu punctorum felici ſucceſſu dedit ſolutas. Quando autem corporum finitorum motus perpenditur; binorum iſtorum principiorum adplicatio plurimis ſubjecta eſt difficultatibus, atque haec cauſſa fuit, cur loco binorum iſtorum principiorum jam

non

non nisi unico, aequatione $dc = npdt : M$ comprehenso, utatur in hoc de motu corporum rigidorum tractatu, admisso simul hoc artificio, ut motus secundum datas directiones resolvatur, ad easdemque directiones resolutio virium sollicitantium instituatur, ubi cognitio celeritatum lateralium simul motus directionem atque inflexionem in se complectitur. Methodus haec nititur more in Geometria usitato naturam linearum curvarum per binas vel ternas coordinatas exprimendi. Verum cum in Geometria etiam saepe lineae curvae ad punctum aliquod fixum referuntur non sine egregio calculi compendio; eodem quoque modo motus evolutio explicatur, idque non solum, cum motus in eodem absolvitur plano, sed etiam, si mobile extra planum vagatur. Hoc modo uti solent Astronomi, dum motus planetarum respectu alicujus puncti per angulos circa id descriptos distantiasque ab eodem definiunt, ubi si motus non fiat in eodem plano, insuper lineam nodorum cum inclinatione orbitae ad certum planum contemplantur. Quare cum hoc quoque in prioribus libris desiderari possit, quod ea methodus, qua nunc quidem corporum coelestium motus ad calculum revocari solent, ibi non sit exposita, ea in hoc opere accuratius explicata legitur. Quod denique adtinet ad modum, aequationes motum corporum definientes ad mensuras absolutas revocandi, hic quoque commodiore usus est CEL. AUCTOR, quam in praecedentibus libris, ubi quidem celeritates per radicem quadratam ex altitudinibus, per quas grave cadendo pares ac-

quire-

quireret celeritates, exprimebantur, quo nimirum efficitur, ut in formula generali $dc = npdt : M$ conſtanti n valor $\frac{1}{2}$ tribuendus ſit. Verum ex altitudine celeritati debita ipſa celeritas non tam perſpicue cognoſcitur, ſed calculo quodam opus eſt, ut ad menſuras ſolitas reducatur. Deinde etiam temporis ratio peculiari calculo eget, quo nova quaedam unitas in calculum introduci debet, ut tempus in minutis ſecundis eliciatur. Quod ſi vero, uti alias commodiſſime fieri ſolet, celeritates per ſpatium uno minuto ſecundo uniformiter percurſum, et tempora in minutis ſecundis exprimantur; eadem experimenta, quibus ſuperior modus conſtantem n definiendi innititur, oſtendunt, eſſe hunc numerum n aequalem duplae altitudini, ex qua grave primo minuto ſecundo liberé delabitur. Quare relicta priore methodo haud paucas ambages evitavit PERILL. AUCTOR, hoc ultimo modo multo faciliore et ſimpliciore in Introductione expoſito, et in toto ſequente opere retento.

Expoſitis hiſce principiis generalibus tranſit CLAR. AUCTOR ad motus corporum finitae extenſionis conſiderandos, et quidem ejusmodi corporum, quorum ſtructura partiumque nexus a viribus ſollicitantibus non mutari poteſt, quae rigidorum nomine ab aliis diſtinguuntur, quorum ſtructura tot roboris non habet, ut virium ſollicitantium actioni reſiſtere valeat. Partes itaque talismodi corporis easdem perpetuo durante motu a ſe invicem diſtantias ſervant, nec corpus rigidum alium motum recipere poteſt, nisi quo haec

 con-

conditio salva manet: alias ad aliam corporum classem esset referendum, quorum motus hic non definitur. Nihilo tamen minus ejusmodi corpus infinitorum motuum est capax. Inter omnes hos motus is est simplicissimus, quo singula corporis puncta secundum directiones inter se parallelas paribus celeritatibus quovis temporis momento promoventur, qui motus *progressivus purus* dici solet. Hic motus tanquam simplicissimus, cujus omnia corpora sunt capacia, primus erat considerandus. Servat corpus, cui semel ejusmodi motus est impressus, eundem non tantum ob inertiam, sed motus quoque progressivus purus non turbatur, si corporis tali motu lati singula elementa viribus, quae massis eorum sunt proportionales, secundum directiones inter se parallelas sollicitentur. Tum vero si corpus sit rigidum assignari potest unica vis omnibus illis aequivalens, cujus directio per centrum gravitatis seu inertiae transit. Unde vicissim, si corpori rigido in centro inertiae applicata fuerit vis quaecunque, ea quasi per omnia corporis elementa massis proportionaliter distributa considerari poterit, atque ob aequivalentiam effectus in motu turbando erunt aequales. Haec sunt, quae Capite I. fusius demonstrantur. Ubi inprimis notari meretur, quod per principia hic stabilita, omnia, quae de motu punctorum in prioribus de Mechanica libris sunt tradita, pro motu progressivo corporum rigidorum valeant. Quae itaque cum in se nimis sterilia multis videri possent, nunc amplissimum usum habebunt, cum eo universum genus motuum

pro-

progreſſivorum ſit referendum, Praeterea dum corpora rigida ejusmodi viribus ſollicitata moventur, eorum compages ſatis firma eſſe oportet, ne in figura ſua mutationem patiantur. Ideo, quantam vim compages corporis a viribus ſollicitantibus ſuſtineat, ſimul erat definiendum.

Corporum rigidorum finitae magnitudinis perinde ac corpuſculorum infinitae parvorum motus duplici modo eſt tractandus, prout fuerit vel liber, vel ob externa impedimenta reſtrictus. Neque vero hanc inveſtigationem ita ſuſcipere licet, ut ſepoſitis omnibus motus obſtaculis omnia motus liberi genera, quorum corpora rigida capacia ſunt, ad calculum revocentur. Corpus enim libere motum praeter motum progreſſivum purum infinitis modis motus gyratorios recipere poteſt, cujusmodi motus complicati ante evolvi prorſus nequeunt, quam motus gyratorii circa axes fixos ſunt definiti: tum enim demum ad motus gyratorios circa axes mobiles, ac porro ad motus liberos in genere progredi licet. Expedito itaque motu progreſſivo puro corpora rigida extrinſecus ita reſtricta contemplatur PERILL. AUCTOR, ut certum tantum motus genus recipere poſſint, quod fit dum ab aliqua cauſſa externa duo corporis puncta fixa retinentur. Hoc caſu corpus rigidum circa lineam rectam per haec puncta tranſeuntem, cum ipſo firmiter connexam, *motu gyratorio* fertur, quare ipſa haec recta *axis gyrationis* vocatur. Sex Capitibus a IIdo ad VIImum hos motus gyratorios contemplatus eſt CLAR. AUCTOR. Stabilita notione

et mensura celeritatis angularis primo definivit motus gyratorii a nullis viribus turbati continuationem, investigat vires, non tantum quas axis sustinet, seu quae adhiberi debent, ut axis in situ suo conservetur, sed et quas corporis compages sustinet, et quibus mutuus partium nexus resistere debet. Posthaec CLAR. AUCTOR transit ad effectus virium quarumcunque in motu circa axem fixum generando. Ac quidem primo motus tantum initium contemplatur, qui corpori rigido circa axem fixum mobili a viribus quibuscunque imprimitur, quo facilius solus virium effectus a motu jam insito separatus perspiceretur, adque hinc ad sequentes investigationes subsidia peti queant, quando, dum corpus circa quempiam axem gyratur, vires adsunt, id circa alium axem convertere conantes: tum enim ex effectu momentaneo circa hunc axem producto judicare licet, quomodo motus praecedens turbetur. Postea quoque corpus rigidum in motu circa axem fixum considerat et scrutatur, quomodo is a viribus quibuscunque immutari debeat. Utraque investigatio simul conjuncta est cum determinatione virium, quas ipsa corporis compages, et praeterea earum praecipue, quas axis sustinet, quibus itaque sustentari debet, ne de situ suo deturbetur. Haec ultima quaestio de viribus, quas axis sustinet, adhuc minus studiose est tractata. Quare cum ea maximi sit momenti, hocque non solum ut intelligatur, quantis viribus opus sit, ad axem in situ suo retinendum, sed praesertim ut in motu corporum rigidorum libero dijudicari

dicari poſſit, quibusnam caſibus axis nullas plane vires ſuſtinet; CEL. AUCTOR omni cura hoc argumentum luculenter et diſtincte evolutum dedit.

Univerſae hujus theoriae de motu corporum rigidorum circa axem fixum ſummam, quod ad variationem hujus motus a viribus productam adtinet, complectitur aequatio $d\varepsilon = \frac{2Vfg\,dt}{\int rr\,dM}$, in qua denotat ε celeritatem angularem, Vf momentum vis ſollicitantis, g altitudinem ex qua grave primo minuto ſecundo libere delabitur, $\int rr\,dM$ ſummam omnium productorum, quae oriuntur, ſi ſingula corporis elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe multiplicentur. Formula haec ſimillima eſt ei, qua variatio motus progreſſivi exprimitur, nimirum iſti alias dudum cognitae $dc = \frac{2gp\,dt}{M}$. Quemadmodum enim ſecundum hanc formulam eſt incrementum celeritatis motus progreſſivi ut vis ſollicitans diviſa per maſſam ſeu inertiam; ita in motu gyratorio eſt incrementum celeritatis angularis proportionale momento vis ſollicitantis diviſo per quantitatem $\int rr\,dM$, ſeu per ſummam omnium productorum ex quovis elemento maſſae in quadratum diſtantiae ſuae ab axe gyrationis. Quare cum loco vis ſollicitantis pro motu gyratorio ejus momentum conſiderari debeat, et quantitas $\int rr\,dM$ loco maſſae ſeu inertiae ſpectanda, ipſa haec quantitas $\int rr\,dM$ nomine ***momenti inertiae*** commode inſignitur, ita ut incrementum celeritatis angularis proportionale fiat momento vis ſollicitantis diviſo per momentum

inertiae. Similitudo utriusque formulae eo eſt perfectior, quod utrinque per elementum temporis *dt* et duplam altitudinem $2g$ multiplicari oporteat, ut ipſum celeritatis incrementum exprimatur. Ad motum igitur gyratorium definiendum prae omnibus noſſe oportet momentum inertiae reſpectu axis gyrationis. Patet autem, cum poſitio axis gyrationis reſpectu corporis in infinitum variari poſſit, ejusdem corporis infinita diverſa dari momenta inertiae, prout ad alium atque alium axem referatur, ut ideo hujus momenti inertiae inveſtigatio opus maxime laborioſum eſſe videatur. Aſt vero CLAR. AUCTOR peculiari utitur artificio, cujus ope ſatis concinna methodo pro quovis corpore et pro dato in eodem axe momentum inertiae reſpectu illius axis indagari poteſt. Fuſius haec omnia explicantur in Cap. V. ubi iſta maxime notatu digna proprietas corporum demonſtratur: dari in quovis corpore tres axes, quorum reſpectu momentum inertiae ſit vel maximum vel minimum, hosque axes ſeſe invicem in centro inertiae ad angulos rectos ſecare, ita ut quivis plano duorum reliquorum ſit perpendicularis. Ob inſignem hanc proprietatem tres illos axes *principales* vocat CLAR. AUCTOR, atque tum explicat modum, quomodo ex momentis inertiae reſpectu trium axium principalium absque prolixo calculo momentum inertiae ejusdem corporis reſpectu alius cujuscunque axis per ejus centrum inertiae tranſeuntis, hincque porro quoque reſpectu aliorum omnium illi parallelorum aſſignari poſſit. Hocque modo inventio momenti iner-

inertiae, quae initio pro quovis corpore quasi infinita videri posset, mirifice in compendium redigitur. Secundum hanc methodum sequenti Cap. VI. CEL. AUCTOR momenta inertiae pro praecipuis corporum et quidem homogeneorum speciebus evoluta dedit, ut quoties usus postulat inde desumi queant. Praecipuus casus, ad quem theoria de motu corporum rigidorum circa axem fixum accommodari solet, est motus oscillatorius corporum gravium, quare omnia, quae huc spectant, problemata de centro oscillationis in pendulis compositis Cap. VII. resoluta sunt, hisque tractatio de motu circa axem fixum gyratorio finitur.

Restat vero jam praecipuum totius operis argumentum, theoria scilicet de motu libero corporis rigidi a viribus quibuscunque sollicitati, in qua enodanda Summus EULERUS tanta praestitit, quanta in re tam ardua expectari vix poterant. Quomodocunque motus corporis fuerit perturbatus, is semper pro quovis temporis momento resolvi potest in binos motus, quorum alter sit progressivus, ex motu centri inertiae dijudicandus, alter gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae ductum: effectus vero virium momentaneus duabus hisce rebus continetur: primo variatione motus centri inertiae tam ratione celeritatis, quam ratione directionis: secundo variatione motus gyratorii et quidem tam ratione celeritatis angularis, quam ratione positionis ipsius axis gyrationis. Ex his dijudicari quodammodo licet, generalem problematis, de motu libero corporis rigidi a viribus

bus quibuscunque sollicitati determinando, solutionem haud exiguis premi difficultatibus. Ut itaque lector eo clariorem omnium elementorum solutionem problematis ingredientium cognitionem consequatur, per gradus quasi a casibus specialibus ad generaliora, ab his demum ad universalem problematis generalissimo sensu concepti solutionem adscendit AUCTOR. Casus motus gyratorii liberi simplicissimus is est, qui Cap. VIII. evolvitur, quo nimirum corpus circa ejusmodi axem gyrari concipitur, qui nullas ob motum vires sustinet. Vocantur axes corporis *liberi*, qui ista proprietate sunt praediti. In quolibet corpore libero tres saltem dantur axes gyrationis liberi, suntque isti axes iidem cum illis axibus principalibus, quorum respectu momentum inertiae corporis est vel maximum vel minimum. Licet alias jam considerari sint a Mechanicae Scriptoribus ejusmodi axes per centrum inertiae transeuntes, circa quos corpus libere gyrari possit, si nimirum momenta virium centrifugarum ex motu gyratorio natarum sese mutuo destruant; valde tamen dubito, an ante EULERUM, hanc proprietatem corporum universalem esse, quod in quolibet corpore *tres* certe dentur axes gyrationis liberi, quis unquam invenerit, si PERILL. DN. DE SEGNER excipiam, qui eandem proprietatem omnibus corporibus competentem demonstravit in Programmate sub titulo: *Specimen Theoriae turbinum*, Halae A. 1755. promulgato. Quemadmodum vero in quovis corpore rigido centrum inertiae est punctum maxime memorabile, cujus

ratio

ratio per universam Mechanicam latissime patet; ita axes principales, qui simul sunt axes gyrationis liberi, in quovis corpore non minus sunt notatu digni, cum iis universa doctrina de motu corporum libero innitatur. Trium momentorum inertiae corporis, quae sunt maxima vel minima, duo esse possunt aequalia, quod accidit in omnibus solidis tornatis homogeneis, quin fieri potest, ut omnia sint aequalia, veluti in sphaera. Si momenta inertiae respectu duorum axium principalium sunt aequalia, respectu reliquorum omnium in plano eorundem axium aequalium sitorum momenta inertiae sunt aequalia. Ac in corpore cujus tria momenta inertiae principalia sunt aequalia, reliqua omnia aequantur. Prouti igitur duobus vel tribus axibus principalibus paribus praedita sint corpora, vel tribus axibus principalibus disparibus gaudeant; quoad cognitionem mechanicam maxime notatu digna inter eadem intercedit differentia. Cum vero quodvis corpus tribus ad minimum axibus principalibus seu liberis sit praeditum; omne corpus quoque ejusmodi motus est capax, vi cujus circa talem axem liberum uniformiter gyratur, et quidem vel circa axem quiescentem, si centrum inertiae corporis quiescat, vel circa axem motu sibi semper parallelo uniformiter in directum progredientem, qui motus tum *mixtus* est ex progressivo et simplici gyratorio. Ac si praeterea corpus ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae vel ipsi centro inertiae sint applicatae, vel quarum directiones cadunt in planum ad axem normale per centrum inertiae

 ductum,

ductum, istae vires vel solum motum progressivum vel simul gyratorium turbabunt, ita tamen, ut axis situm sibi parallelum perpetuo servet. Reliquae vires omnes axeos situm simul turbabunt, atque hic est casus, quo principia Mechanicae huc usque cognita haud erant sufficientia ad continuationem motus determinandum. Iam itaque CLAR. AUCTOR Cap. IX. et X. problema de corporis rigidi a viribus quibuscunque sollicitati motu generatim determinando adgreditur, ubi quidem primo Cap. IX. corpus rigidum in quiete considerat, et dum a viribus quibuscunque sollicitatur, primam motus generationem investigare conatur: deinde vero Cap. X. eum considerat casum omnium difficillimum, quo corpus jam in motu versatur, ac circa axem per centrum inertiae transeuntem gyratur; qui vero a viribus sollicitantibus continuo variatur. Ratiociniorum nexum, quibus CLAR. AUCTOR in evolvendis hisce quaestionibus usus est, brevibus recensebo.

Quotcunque fuerint vires corpus rigidum sollicitantes, et quomodocunque fuerint applicatae, eae semper ad duas revocari possunt, quarum altera per ipsum centrum inertiae corporis transeat. Ast vero si cognitus fuerit effectus duarum virium junctim agentium in motu generando, quarum altera ipsi centro inertiae est applicata, alterius etiam seorsim agentis effectus innotescit. Quodsi itaque quaestio est de prima motus generatione determinanda, quando corpus rigidum quiescens et liberum a viribus quibuscunque sollicitatur,

tatur, hae vires ad binas revocentur, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, tumque cum hujus effectus sit determinatu facillimus, totum negotium eo redit, ut effectus ab unica quacunque vi productus definiatur. Quod si minus succeesserit, cum ea vi, alia quaecunque centro inertiae applicata, combinetur, ac si effectus inde junctim productus assignari poterit, totum negotium erit confectum. His positis primo investigatur, quomodo duae hujusmodi vires comparatae esse debeant, ut ab iis corpori motus circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem imprimatur; tum vero exinde vicissim colligitur positio axis, circa quem corpus rigidum quiescens primum gyrari incipit, respectu trium axium principalium corporis, una cum angulo elementari primo tempusculo producto, si a vi quacunque sollicitetur, eique simul in centro inertiae vis aequalis et contraria fuerit applicata. Effectus quidem idem produceretur a viribus sollicitantibus, etiamsi corpus in motu versetur: verum ob hujus motus admixtionem difficilius cognosci poterit. Si enim corpus jam circa alium axem gyratur, ac nunc incitatur, non solum celeritas angularis, sed etiam ipse axis gyrationis mutabitur, ita ut nunc circa alium axem per centrum inertiae transeuntem gyrari incipiat. Quare jam in id incumbendum erat, ut ista axis gyrationis variatio et quidem momentanea a viribus prodncta formulis analyticis expressa quaeratur, ubi demum ex cognita mutatione elementari ad ipsam motus determinationem per calculum integralem

 trans-

transfeundem erit. Refolvenda igitur erat quaeftio: fi data fit pofitio axis gyrationis corporis moti refpectu trium axium principalium corporis, isque a viribus follicitantibus varietur, ut corpus elapfo tempufculo elementari circa alium axem gyretur, quomodo definienda fit pofitio hujus axis variati refpectu axium principalium. Cognitis jam viribus, quibus corpus dum circa quempiam axem gyratur, follicitatur, is axis, circa quem quiefcens gyrari inciperet definiri: tum vero variatio in axe gyrationis ob motum facta explorari poterit. Verum nifi corpus primo circa axem quempiam principalem gyretur, praeter vires externas, quibus corpus forte follicitatur, imprimis eae vires, quae ex ipfo motu gyratorio ejusque vi centrifuga nafcuntur, perpendi, et in calculum introduci debent, ideo iftae vires ex ipfo motu gyratorio natae follicite erant inveftigandae. Si enim axis gyrationis non fit principalis, etiamfi nullae vires extrinfecus urgerent, tamen axis parallelismus confervari non poffet, quoniam vires centrifugae ad axem deflectendum tendunt. Inventis his viribus ex motu gyratorio ipfo ad eum turbandum natis, cum his combinatis viribus externis corpus follicitantibus methodo fupra defcripta definiri poterat variatio momentanea tam in ipfo axe quam in celeritate angulari inde orta. Ipfum modum procedendi et calculum dirigendi explicat Problema 67. Licet itaque fic totum negotium abfolutum effe cenferi poffet; tamen reftat aliud argumentum prorfus non negligendum. Cognita enim variatione tam

cele-

celeritatis angularis, quam axis gyrationis positione respectu trium axium principalium corporis ad quodvis temporis momentum; nondum tamen liquet, quem situm corpus respectu spatii absoluti teneat. Cum enim iste situs corporis labente tempore continuo varietur, etiam haec questio prioribus adjungenda erat: Si ad datum tempus cognitus sit situs corporis rigidi circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transeuntem gyrantis, atque tam axis gyrationis, quam celeritas angularis utcunque varietur, quomodo invenienda sit mutatio momentanea in corporis situ orta. Hoc demum problemate resoluto, universa theoria de motu corporum rigidorum absoluta est censenda, tumque quodvis problema mechanicum, utcunque complicatum sit, aequationibus fundamentalibus, ex ipsius conditionibus secundum stabilita principia deductis, calculi integralis ope complete erit resolvendum.

Exposita sic theoria generali de modo singulas motus corporum rigidorum variationes aequationibus analyticis exprimendi, CEL. AUCTOR adgreditur applicationem principiorum ab ipso stabilitorum ad casus speciales in mundo obvios, ita quidem, ut primo, a viribus externis sollicitantibus abstrahendo, corpora sibi relicta tantum contempletur, ac constitutis tribus corporum generibus, ex indole axium principalium petitis, tribus quoque Capitibus XI. XII. XIII. motum evolvat corporum rigidorum, primo ternis axibus principalibus paribus, deinde duobus tantum paribus, ac deni-

 que

que tertio ternis axibus principalibus disparibus praeditorum, et a nullis viribus sollicitatorum. Statim ab initio hujus tractationis demonstrat CLAR. AUCTOR illud, quod per universam mechanicam maximi est momenti, principium: quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motum quovis momento compositum, seu mixtum concipi posse ex motu progressivo centri inertiae, et ex gyratorio circa axem aliquem per ejus centrum inertiae transeuntem. Remotis jam viribus sollicitantibus externis, determinatio motus corporum primi generis nulla laborat difficultate, cum circa nullum axem gyrari queant, qui non axis principalis proprietate gaudeat, unde nullae omnino vires ex ipso motu gyratorio ad motum turbandum ortum trahere possunt. Questio de motus corporum secundi generis continuatione determinanda calculum quidem requirit quodammodo complicatiorem; nihilo tamen minus ejusmodi corporum motus in genere determinare atque ad quosvis casus accommodare docet CEL. AUCTOR, ita ut perfecta et omnibus numeris absoluta fit hujus problematis solutio. Explicat simul CLAR. AUCTOR, quomodo motus hujusmodi corporum reduci queat ad duplicem gyratorium, unum nimirum circa axem *mobilem* (a motu circa axem *variabilem* sollicite distinguendum) qua corpus circa ipsum axem principalem singularem aequabiliter gyratur, dum secundo ipse hic axis circa polos extra corpus fixos circumfertur pariter motu uniformi. Tertiae classis corporum motus longe complicatior est, ac aequationum differentialium,

tialium, variationem momentaneam hujus motus definientium, integratio maxima premitur difficultate. Aequatio differentialis celeritatis angularis variationem exprimens licet ad separationem variabilium reduci queat, paucissimis tamen casibus exceptis, receptas expressiones arcuum circularium vel logarithmorum respuit. Huic quidem incommodo aliqua ratione medelam affert CEL. AUCTOR, loco celeritatis angularis introducendo aliam variabilem, a qua celeritas angularis pendeat: nihilo tamen secius nova aequatio differentialis inde orta ita est comparata, ut non nisi per arcus sectionum conicarum ejus integratio expediri queat, unde nec ullum commodum ad calculum prosequendum redundat, nec ad datum tempus celeritas angularis colligi potest. Quare cum formulae situm axis gyrationis respectu axium principalium definientes a celeritate angulari pendeant, universalis problematis solutio a subsidiis analyticis expectari nequit. Explicatis itaque casibus quibusdam specialibus perfectam solutionem admittentibus, ut quodammodo aestimare liceat, qualis hic motus sit futurus, ad subsidium quoddam mechanicum confugit CEL. AUCTOR, motum scilicet penduli per circulum, ac concessa motus determinatione, quo corpus grave in peripheria circuli vel oscillando vel revolvendo movetur, ad quodvis tempus determinare docet positionem axis gyrationis respectu axium principalium. Ast vero jam restabat alterum problematis resolvendi momentum; determinatio scilicet situs axium principalium

respe-

respectu spatii absoluti. Non minores in hoc negotio expediendo, ac ante, occurrunt difficultates, cum res ad ejusmodi aequationes differentiales reducatur, quae non solum non integrari, sed ne ad separabilitatem quidem variabilium revocari posse, ipso EULERO ab initio visa sunt, unde hujus problematis solutionem in §. 761. ad finem perducere non potuit. Postea vero artificia invenit ingeniosissima, quorum ope harum aequationum integratio absolvi poterat; eaque in Supplemento in fine adjecto explicata leguntur.

Expositis sic, quae ad motum corporum rigidorum liberum, remotis viribus externis, pertinent, ordo postulabat, ut principia supra stabilita ad eos quoque casus applicarentur, quibus vires externae corpus sollicitantes ejus motum perturbant. Primo itaque tractandam elegit CEL. AUCTOR theoriam turbinum, cujus explicatio ob continuam axis gyrationis variationem adhuc maximis tenebris fuit involuta. Quod argumentum ut initio a gravioribus difficultatibus liberetur, axis turbinis super plano horizontali politissimo incedere assumitur, ne frictioni ullus locus relinquatur, tum vero axis infra in cuspidem desinens statuitur, qua super plano horizontali ingrediatur. Cumque duo genera turbinum constituenda sint, prout vel omnia ejus momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, vel duo duntaxat; illud genus primo loco Cap. XIV. calculo subjicitur. Inventa itaque primo via a centro inertiae turbinis descripta, determinata insuper secundum principia supra stabilita variatione momenta-

mentanea non tantum in axe gyrationis et celeritate angulari producta, sed et in situ turbinis respectu spatii absoluti orta, generalis solutio problematis de motu et situ turbinis ad quodvis tempus assignando tentatur, ubi vero iterum adeo complicatae prodeunt aequationes differentiales, ut earum integratio nec algebraice nec per logarithmos vel arcus circulares expediri possit. Longe majores praevidere poterat difficultates CEL. AUCTOR, si in turbine non omnia momenta inter se aequalia statuerentur, quare id argumentum nondum attingit, sed potius ipsam theoriam generalem de motu corporum rigidorum a viribus quibuscunque sollicitatorum denuo tractandam suscipit, et quidem methodo prorsus nova, priore longe perfectiore et ad usum magis accommodata. Methodum Cap. IX. et X. expositam nimis esse operosam compertus est CEL. AUCTOR, si inde effectus virium quarumcunque sit definiendus, dum primo axis, circa quem vires corpus, si quiesceret, convertere inciperent, definiri, tum vero hinc variatio axis, circa quem corpus actu gyratur, et celeritas angularis determinari oporteat. Negari quoque non potest, nec ipse CLAR. AUCTOR diffitetur, methodum, qua Cap. X. momentaneae axis mutationes eliciuntur, ea non gaudere evidentia, ut ab omnibus dubiis sat expedite liberari queat, quam Artis periti contra eandem movere possent. His adeo praegnantibus rationibus commotus ingeniosissimus AUCTOR idem problema in Cap. XV. quod in integro opere est maxime notatu dignum, de novo pertractare

 voluit,

voluit, ita ut ex hactenus allatis nihil in subsidium vocaverit, sed non nisi primis mechanicae principiis utatur, quo effecit, ut omnia hic evadant maxime perspicua. Statim quidem hoc faciliori modo uti potuisset CLAR. AUCTOR, sicque non leves difficultates in superiori tractatione occurrentes evitavisset: verum in argumento adhuc tam parum tractato haud incongruum erat, methodum operosiorem et prolixiorem praemittere, quo singulae notiones in re pene nova animo firmius imprimantur, ipsaeque difficultates, quibus haec pars Mechanicae inovoluta videbatur, luculentius perspiciantur. Insuper haud parum interest, nosse viam, qua incedentes Auctores novis Artibus condendis aut insigniter promovendis operam navarunt, licet postea praestantiores methodi vel ab ipsis vel ab aliis detegantur. Mira facilitate ac evidentia hanc novam methodum ex primis et ab omnibus concessis motus principiis derivavit CEL. AUCTOR, atque ob summam solutionis universalitatem, in eadem jam omnia continentur, quae Cap. IX. et X. per multas ambages magno labore erant evoluta. Supra, dum corpus quiescit, axis, circa quem ipsi vires primum motum gyratorium imprimunt, vehementer operose determinabatur; ista vero determinatio instar Corollarii ex nova hac problematis solutione sponte fluit. Deinde etiam hic planissima fiunt, quae de variatione momentanea motus gyratorii, dum corpus a nullis viribus sollicitatum circa axem non principalem gyratur, per nimis intricata ratiocinia tandem inventa

venta erant. Quae autem ſupra vix attingi poterant, cum corpus inſuper a viribus quibuscunque ſollicitatur, hic pari facilitate eodemqne labore feliciter expediuntur, ita ut hac nova methodo a primis motus principiis derivata univerſam theoriam motus corporum rigidorum perfecte condidiſſe cenſendus ſit CEL. AUCROR. Accedit, quod ipſa haec nova et univerſalis hujus problematis ſolutio formularum, quae ſuperiori methodo quodammodo dubia, ſaltem non prorſus evidenti, nitebantur, veritatem pleniſſime confirmet, cum omnes iſtae formulae jam ex univerſali ſolutione corollariorum inſtar nullo negotio deriventur. Cum denique haec praecepta pro motu corporum rigidorum determinando latiſſime pateant, ea non ad motum liberum ſolum adſtricta ſunt. Quomodocunque enim corporum rigidorum motus compeſcitur, ſive ſuper plano quodam, ſive juxta alia corpora incedere cogantur, ſive quodpiam eorum punctum fixum retineatur, quaeſtio ſemper ad tradita praecepta reduci poteſt.

Ad utriusque igitur generis motus, tam liberos, quam reſtrictos in ſequentibus Capitibus ab AUCTORE noſtro facta eſt applicatio. Graviſſima ejus generis quaeſtio, qua corpus motu libero, tam progreſſivo, quam gyratorio, circa axem variabilem latum a viribus externis ſollicitatur, circa motum vertiginis corporum coeleſtium verſatur. Eam ob cauſſam hoc argumentum in Cap. XVI. generatim ita pertractatur, ut in Aſtronomiam inde haud contemnenda incrementa re-

 dun-

dundent; cum motus lunae libratorius, praeceſſio aequinoctiorum, et nutatio axeos terrae principalia ſint hujus Capitis objecta. Excipit hanc tractationem plenior explicatio motus turbinum ſuper plano horizontali, ſemota frictione Et cum ſupra tantum ejusmodi turbines ſint conſiderati, in quibus omnia momenta inertiae inter ſe ſunt aequalia, quae conditio nimium erat limitata, nunc motus turbinum in genere exploratur, poſitis tantum duobus momentis inertiae principalibus inter ſe aequalibus, quae conditio cum indole turbinum neceſſario conjuncta videtur. Cum turbo ſit corpus cuſpide ſuper plano horizontali incedens, ita ut cuſpis ſit quaſi baſis ipſius cenſenda, hinc ad alia corporum genera ducitur CEL. AUCTOR, quae baſi quacunque ſuper plano incedant. Nimias autem ambages, quae in calculos inextricabiles perducerent, evitaturus, duo tantum corporum genera, cylindrica ſcilicet ac ſphaerica potiſſimum evolvit, quorum nimirum figura externa, qua plano applicantur, ſit vel cylindrica vel ſphaerica, quomodocunque materia intrinſecus fuerit diſtributa. Ad genus itaque cylindricum referuntur ea pendula, quae non ab axe lineari ſunt ſuſpenſa, ſed axiculis cylindricis utrinque plano horizontali incumbunt. Huc quoque refertur, ac ideo ſimul inveſtigatur motus vacillatorius, motui cunarum reciproco ſimilis. Ad genus praeterea ſphaericum pertinent turbines, quorum axes infra non in cuſpidem, ſed quaſi in haemiſphaerium deſinunt. Ab omnibus ejusmodi motibus, quibus corpus in ſuperficie alterius ince-

incedit, frictio est inseparabilis. Quare ut tractatio de ejusmodi motibus eo majorem in praxi habere possit usum, ultimo loco peculiaris tractatus de motu corporum rigidorum a frictione perturbato adnexus est. Explicata itaque frictionis natura in genere, et modo frictionem in calculum introducendi generatim evoluto, perpendet CEL. AUCTOR motus gravium progressivos a frictione impeditos, motus gyratorios corporum gravium circa axem fixum a frictione retardatos, quorsum pertinent motus pendulorum ab axiculis cylindrincis suspensorum, motus praeterea turbinum in cuspidem desinentium super plano horizontali, frictionis habita ratione, ac denique motus globorum centrum inertiae in ipsorum centro situm habentium super plano horizontali.

Haec erant, quae de praestantissimi hujus operis argumento praefationis loco praemittenda esse putavi. De eo quidem persuasus sum, L. B. etiam absque hac praeliminari recensione ab EULERO haud vulgares expectasse investigationes. Nihilo tamen secius haud incongruum mihi visum est, de iis saltem in antecessum aliquid in medium proferre, quae in hoc opere vel prorsus nova sunt, vel nova saltem methodo exposita, et quibus scientia mechanica maximi ponderis augmenta adsecuta est censenda. Mechanicam corporum rigidorum ad tantum perfectionis gradum in hoc tractatu perduxit Ill. AUCTOR, ut plura expectari non possint, nec debeant. Quomodunque enim problema de motu corporis rigidi definiendo fuerit complicatum, secundum principia stabilita sem-

per erui possunt aequationes fundamentales, motus variationes elementares definientes. Quodsi itaque accidat, ut aequationes differentiales, ex conditionibus problematis deductae, integrari nequeant; tum non Mechanicae, sed potius Analyseos defectui tribuendum est, quod plena problematis solutio dari nequeat. Una cum EULERO nostro Magnus Galliae Geometra, ILL. D'ALEMBERT, in enodandum generale de motu corporum rigidorum problema parem operam contulit. In praestantissimo *de praecessione aequinoctiorum et nutatione axeos terrae* tractatu, A. 1749. Parisiis gallico idiomate edito, exposita leguntur omnia, quae ad problematis nostri solutionem generalem inveniendam conducere possunt principia. Ac EULERUS noster, postquam ejusdem de praecessione aequinoctiorum et nutatione axeos terrae problematis solutionem suo more evolutam dederat in Historiae Academiae Regiae Berolinensis Tom. V. pro A. 1749. qui Tomus A. 1751 prodiit, in Tomo VI. sequente PERILLUSTRI D'ALEMBERT cedit gloriam debitam, qui arduam hanc de aequinoctiorum praecessione et axeos terrae nutatione quaestionem primus dedit resolutam. Postea vero EULERUS noster problematis de motu corporum rigidorum generalissime concepti resolutionem investigavit in Historiae Academiae Berolinensis Tomo VI. ad A. 1750. edito demum A. 1752. Sed methodus, qua tunc temporis usus est CEL. AUCTOR, ad multo majorem ab ipso perducta est perfectionem, post insignem de tribus axibus corporum principalibus proprietatem a SEGNERO dete-

detectam, ab ipso vero Auctore nostro ad usus mechanicos feliciſſimo ſucceſſu ulterius applicatam. Quod in applicatione ad problema de motu vertiginis terrae jam investigaverat, id in Opuſculis Mathematicis Pariſiis A. 1761. gall. id. editis denuo in generaliſſimo ſenſu conceptum problema enodavit Cel. D'ALEMBERT, et quidem in prioris Tomi *Commentatione ſecunda: de motu corporis cujuscunque figurae a viribus quibuscunque ſollicitati.* Hanc commentationem CEL. D'ALEMBERT Auctori noſtro, cum in elaborando hoc opere occupatus eſſet, cognitam non fuiſſe, ideo pro certo evincere poſſum, quia opus EULERI noſtri jam A. 1760. conſummatum et a CEL. AUCTORE initio A. 1761. ad me transmiſſum erat, prouti de eo teſtatur ſchedula jam A. 1761. impreſſa, qua inſtitutum Dni. Röſe de excudendo hoc opere indicebatur. Ipſa etiam methodus, qua CEL. D'ALEMBERT uſus eſt, adeo differt ab EULERIANA, ut ne minima ſuſpicio oriri queat, unum Auctorem alterius opus in ſubſidium vocaſſe. Sic iterum Germania de novae ſcientiae inventore certare poteſt cum Gallia, prouti alias de Calculi differentialis inventore cum Anglia certavit. Quivis horum primae magnitudinis Geometrarum peculiari uſus eſt methodo ac propriis inveniendi artificiis, quae vero methodus alteri palmam praeripiat, quaeſtio eſt, quam ſublimiorum hujusmodi ſcientiarum maxime peritis decidendam relinquo.

Si intereſt reipublicae litterariae, ut poſteris conſerventur ſcripta Auctorum, qui, novis Artibus condendis aut inſigniter am-

amplificandis ſcientiis, promeritam adſecuti ſunt gloriam; omnem ſane laudem meretur Illuſtr. Acad. Gryph. bibliopola et typograph. A. F. RÖSE, quod operam et impenſas excudendo huic praebere voluit operi, prae multis immortalitate digno. Verendum eſt, ne poſteri incuriam noſtri ſeculi indignentur, cum et alia ſcriptis mandaverit doctrinae ſuae monumenta Summus noſter EULERUS, ob ſumtuum ad ea typis mandanda neceſſariorum defectum hactenus inedita, inter quae eminet de calculo integrali opus abſolutiſſimum. Non poſſum non exſcribere hic verba, quibus rei hujus mentionem fecerunt Auctores diarii litter. Gryphisw. A. 1763. p. 98. *Wir wiſſen, daſs Herrn Eulers Integralrechnung zum Druck bereit lieget, und nur auf einen Verleger wartet. Wenn unſre Nachkommen wiſſen könnten, daſs bey uns jährlich eine ſolche Menge ſchlechter Schriften gedruckt und verkauft werden könnte, ſo würde es ihnen keine groſſe Idee von der Aufklärung unſrer Zeiten und der Unterſtützung, welche den Wiſſenſchaften wiederfähret, machen, wenn ſie leſen, daſs ein Werk, das für die Welt und alle Zeiten geſchrieben iſt, aus Mangel eines Verlegers ungedruckt lieget.*

Caeterum, ut emendate prodiret opus, omni qua potui providi diligentia. Quae interim oculorum aciem fugerunt, vel operariorum culpa admiſſa ſunt menda, ad calcem libri, ea ſaltem, quae ſenſum turbare poſſunt, ſunt adnotata, quae igitur B. L. operis lectionem inchoaturus tollat, officioſiſſime rogo. Scrib. Bützovii menſe Martio MDCCLXV.

WENCESL. JOH. GUSTAVUS KARSTEN.
Phil. D. et Math. P. P. O.

INDEX CAPITUM.

INTRODUCTIO

CONTINENS ILLUSTRATIONES ET ADDITIONES NECESSARIAS DE MOTU PUNCTORUM.

TRACTATUS

DE MOTU CORPORUM RIGIDORUM.

CAP.

ADDITAMENTUM.

SUPPLEMENTUM I.

DE MOTU CORPORUM RIGIDORUM A FRICTIONE PERTURBATO.

APPENDIX.

INTRO-

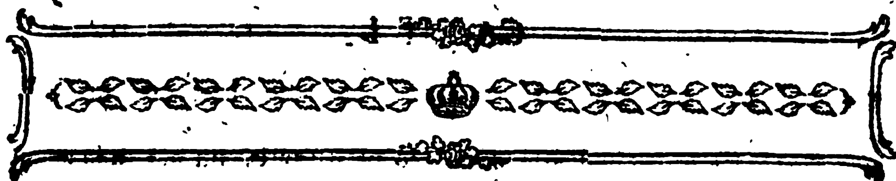
INTRODUCTIO

CONTINENS

ILLUSTRATIONES ET ADDITIONES NECESSARIAS

DE

MOTU PUNCTORUM.



CAPUT I.

CONSIDERATIO MOTUS IN GENERE.

DEFINITIO. 1.

1.

Quemadmodum *Quies* est perpetua in eodem loco permanentia: ita *Motus* est continua loci mutatio. *Corpus scilicet, quod semper in eodem loco haerere observatur, quiescere dicitur: quod autem labente tempore in alia atque alia loca succedit, id moveri dicitur.*

EXPLICATIO. 1.

2. Quanquam notiones quietis et motus in se planissimae videntur, tamen quo accuratiorem earum cognitionem acquiramus, singulas, quibus constant, ideas attentius considerari convenit. Ac primo quidem occurrit idea loci: quid autem sit locus? haud facile declaratur. Qui spatium immensum imaginantur, in quo totus mundus versetur, ejus partes a corporibus occupatas horum loca appellant, ob extensionem enim quodque corpus parem spatii partem occupet, et quasi impleat, necesse est. Verum hujus ipsius spatii notionem nos nonnisi per abstractionem concipimus, dum mente omnia corpora tollentes, id quod residuum fore arbitramur, spatii nomine appellamus: sublatis scilicet corporibus eorum adhuc extensionem residuam fore putamus; qui conceptus a Philosophis multis argumentis impugnari solet. Neque etiam hæc ipsa quæstio, nisi ante jam adæquata motus idea fuerit stabilita, dirimi posse videtur. A principio certe hujusmodi lubricas abstractiones repudiantes, rem prouti in sensus immediate incurrit, perpendere debemus, quos consu-

lentes de loco cujuspiam corporis aliter judicare non licet, nisi id ad alia corpora circumjacentia referendo, quorum respectu, quamdiu id eundem situm servaverit, id in eodem loco perseverare, sin autem in alium situm pervenerit, locum mutasse pronunciare solemus.

EXPLICATIO. 2.

3. Cum autem situm corporis respectu aliorum circumjacentium aestimamus, dum haec inter se eundem situm servent, judicium nostrum utpote geometricis quasi ideis innixum fallax esse nequit. Determinatur enim situs per distantias ab aliquot punctis diversis, neque unum vel etiam duo puncta ad hoc sufficiunt. Nam si dicam punctum O a puncto A intervallo $= a$ distare, situs puncti O minime determinatur. Sed universa superficies sphaerica circa centrum A radio $= a$ descripta relinquitur, in cujus singulis punctis punctum O aeque inesse posset, quorum nullum prae reliquis hoc modo ipsi pro loco, ubi existat, assignatur. Sin autem dicam, punctum O a puncto A intervallo $= a$, ab alia puncto B vero intervallo $= b$ distare; concipiatur superficies sphaerica circa A radio $= a$, simulque alio circa B radio $= b$ descripta; et quia intersectio harum superficierum est circulus, hujus singula puncta ita erunt comparata, ut a puncto A intervallo $= a$, a puncto B vero intervallo $= b$ distent. Certum ergo erit, punctum O in peripheria hujus circuli existere, et ubi revera existat, non definitur. Ponamus igitur, dari insuper puncti O distantiam a tertio quodam puncto C, quae sit $= c$, neque hoc tertium punctum C cum duobus superioribus in directum jaceat, et cum sperficies sphaerica circa C radio $= c$ descripta superiorem circulum duobus adhuc punctis secet, etiam nunc dubitamus, in utro eorum punctum O existat; veruntamen inter duo tantum puncta ancipites haeremus. Hinc concludimus, si puncti O distantias a quaternis punctis A, B, C, D, non in eodem plano sitis noverimus, ejus situm plane determinari; plerumque vero etiam tria sufficiunt, quando scilicet aliunde alterum duorum illorum punctorum, quae aeque satisfaciunt, excluditur.

SCHOLION.

4. Cum haec situs cujusque puncti determinatio sit geometrica, nulli prorsus dubio est subjecta: unde ab ea considerationes de quiete et motu exordiemur. Quae autem hic de situ punctorum sunt observata, facile ad quaevis corpora accommodantur, quoniam idea quietis vel motus in corporibus locum non habet; nisi quatenus singulis ejus

punctis

punctis tribuitur. Neque enim, quaecunque etiam idea quietis ac motus statuatur, ea subito de corpore quodam universo praedicari potest, cum fieri possit, ut in corpore alia puncta quiescant alia vero magis minusve moveantur. Atque hanc ob causam omnino necesse est, ut veram quietis motusve indolem primo tantum in punctis investigemus. Neque tamen ideo haec consideratio tanquam imaginaria est spectanda, propterea quod punctorum conceptus sit mere abstractus, quibus nonnulli etiam dubitarunt motum vel quietem adscribere. Verum, quicquid sit de hac controversia, necessario concedendum est, si corpus vel quiescat vel moveatur, puncta in eo concipi posse, quae vel quiescent vel movebuntur: neque hic interest, utrum talia puncta pro corporum elementis haberi queant nec ne? Nihil quoque obstat, quominus quis ut tribuerit loco horum punctorum vera corporum elementa, sive sint infinite parva, sive saltim quam minima substituere velit: res enim omnino eodem redibit, neque hinc ullum dubium nasci potest. Simili modo ea puncta A, B, C, D ad quae situm puncti O retuli, realitati minime repugnant, cum sint termini in veris corporibus existentes, a quibus distantiae mensurentur. Nisi quis existentiam corporum prorsus negaverit, cum quo nobis disputatio foret nulla, hujusmodi conceptus ad sublevandum investigationis negotium minime improbare poterit.

DEFINITIO. 2.

5. Dum quatuor plurave puncta easdem inter se servant distantias, si punctum aliquod O ab iis perpetuo maneat aequidistans, eorum respectu quiescere dicitur: propterea quod eorum respectu eundem situm conservat.

COROLL. 1.

6. Si A sit corpus solidum figuram suam constanter servans, in eo, quantumvis fuerit parvum, non solum quatuor, sed quam plurima concipere licet puncta, quae inter se easdem perpetuo teneant distantias.

COROLL. 2.

7. Quare si punctum O respectu istius corporis A eundem situm servet, quod fit, si ab omnibus ejus punctis perpetuo aeque maneat remotum, tum punctum O respectu corporis A quiescere dicitur.

COROLL. 3.

8. En ergo realem quietis definitionem nullis ideis vagis seu imaginariis implicatam, quae autem conjuncta est cum idea cujuspiam

corporis, cujus respectu punctum O quiescere dicitur: neque patet, quid sit quies absolute sic dicta separata a talis corporis notione.

EXPLICATIO. 1.

9. Verum hic in limine Mechanicae ne solliciti quidem esse debemus de quiete absoluta, quae an sit et qualis, etiam nunc prorsus ignoramus, in id tantum inquirentes, quid sensus nobis ostendant. Ubicunque autem nobis de quiete est sermo, semper nostra idea conjuncta est cum corpore quopiam, cuius respectu corpus vel potius punctum quiescere dicamus. Ita navigantibus corpora, quae respectu navis eundem situm retinent, quiescere dicuntur, aeque ac nos in continenti versantes corporibus, respectu soli eundem situm tenentibus, quietem tribuere solemus. Neque illi magis falli sunt putandi, quod navis moveatur, cum etiam universam tellurem moveri Astronomi statuant. In idea enim quietis hic stabilita, minime curamus, utrum corpus illud, cuius respectu quietem asserimus, quiescat, an moveatur. Quamdiu enim punctum O respectu corporis A eundem situm conservat, id hujus respectu quiescere pronunciamus, neque quicquam ultra hac locutione innuimus. Nova plane futura esset quaestio de quiete vel motu ipsius corporis A aliunde dijudicanda, quae ad illam definitionem nihil conferret. Ita in navi, quicquid ejus respectu eundem situm servat, eius quoque respectu quiescit, nihilque interest, utrum ipsa navis quiescat, an moveatur.

EXPLICATIO. 2.

10. Idea igitur quietis hic tradita inter relationes est referenda, cum non ex sola conditione puncti O, cui tribuitur, desumatur, sed eius cum alio quodam corpore externo A comparatio instituatur: ex quo si nobis unquam nosse liceat, an detur quies absoluta et quid sit? distinctionis causa hanc, quam definivimus, quietem respectivam appellemus. Atque hinc statim patet, fieri posse, ut idem punctum, quod respectu corporis A quiescat, respectu aliorum corporum non quiescat sed adeo varie moveatur. Quemadmodum corpus in navi quiescens respectu solis vel aliorum corporum coelestium aliter atque aliter movetur. Unde patet, ista quietis vel motus praedicata in ipso corpore vel puncto O nihil mutare, cum omnia ei simul convenire queant, prout ad alia atque alia corpora referatur.

SCHO-

SCHOLION.

11. Haec omnia simili modo de idea loci sunt intelligenda; cum enim quies sit permanentia in eodem loco, ut haec definitio quoque ad quietem respectivam pateat, punctum O, quod respectu corporis A quiescere dicitur, ejus quoque respectu in eodem loco peseverare dicendum est. Quia igitur in eodem situ respectu corporis A manet, idem locus conveniat cum eodem situ necesse est. Haec autem loci idea perinde ac quietis est respectiva, ita ut locus respectivus sit certus ac determinatus quidem situs respectu cujusdam corporis. Utrum detur alia magis naturalis loci idea, adhuc ignoramus; cujusmodi siquidem detur, is locus absolutus vocetur. Loco quidem respectivo, prouti eum hic definivimus, immobilitas, ut vulgo fieri solet, tribui nequit; si enim corpus, cujus respectu erat descriptus, ipsum promoveatur, locus cum ipso progredi censendus est. Sin autem cui videantur ea corpora absolute quiescere, quae respectu stellarum fixarum eundem locum retineant, ei locus absolutus erit certus ac determinatus situs respectu stellarum fixarum. Num autem relatio ad stellas fixas naturae rei magis sit consentanea, quam relatio ad alia quaevis corpora? hic etiamnum in dubio relinquere cogimur.

DEFINITIO. 3.

12. Si punctum O respectu alicujus corporis A, quod figuram conservat immutatam, situm suum continuo mutet, id respectu corporis A moveri dicitur.

Evidens est, figuram corporis A invariabilem assumi debere, ut quaterna puncta in eo concepta, ad quae punctum O refertur, inter se easdem distantias servent.

COROLL. 1.

13. Quae de quiete respectiva diximus, facile ad motum respectivum transferuntur; quando enim punctum O respectu corporis A eundem servat situm quiescere, quando autem ejus respectu situm continuo mutat, moveri respective dicitur.

COROLL. 2.

14. Simul vero patet, fieri posse, ut idem punctum O, quod respectu corporis A quiescat, respectu alius corporis B moveatur. Unde haec idea tam motus quam quietis est relativa, neque quicquam in ipso puncto O mutat.

COROLL.

COROLL. 3.

15. Motus igitur et quies nomine tantum, non vero re ipsa sibi opponuntur, cum utrumque simul eidem puncto, prout cum alio atque alio corpore conferatur, tribui possit. Neque motus a quiete aliter differt, atque alius motus ab alio.

COROLL. 4.

16. Motus itaque et quies perperam inter affectiones corporum numerantur, quandoquidem dum affectio cujuspiam rei mutatur, ipsa res mutationem passa sit censenda: cum contra corpori, sive ei motus sive quies tribuatur, nulla mutatio obveniat.

EXPLICATIO. 1.

17. Cadit ergo celebris illa distinctio inter motum et quietem, quam Philosophi tanquam maxime essentialem corporibus praedicare solent: si quidem rem de motu et quiete respectiva intelligimus. Verum objicient, rem longe aliter se habere, si de motu et quiete absoluta loquamur: quid autem sit motus absolutus et quies absoluta non satis definiunt. Si velint has denominationes ex relatione ad stellas fixas petendas esse, nihilominus tam motus quam quies erunt respectivi, neque a nostris definitionibus recedunt, nisi quod aliud ac determinatum corpus indicent, ad quod relatio sit instituenda, unde quid in ipsum corpus, quod eo refertur, redundet, nondum apparet. Ceterum minime nego, ullum esse discrimen, inter motum et quietem, vel inter corpus motum et quiescens, cum potius in eo definiendo tota Mechanica sit occupata: sed id jure equidem nego, motum et quietem ullam internam corporis mutationem involvere. Ad quod ergo praedicamentorum genus referri debeant quies et motus, Philosophi viderint, qualitates certe minime vocari possunt: nihil autem prohibet, has res inter relationes numerare, quandoquidem utcunque eadem res cum aliis aliisque objectis comparetur, ejus indoles interna nullam mutationem subit.

EXPLICATIO. 2.

18. Cum loci ideam definiverim, prout eam quidem sensuum judicium suppeditat, idea nunc quoque temporis, quae in notione quietis ac motus implicatur, occurrit. Dum enim quies perpetua in eodem loco *permanentia* dicitur, hoc ipsum *perpetuum* vel *permanens* sine temporis notione intelligi nequit. Verum motus idea temporis notionem magis

magis evolutam postulat, ex qua etiam divisio temporis in partes sive aequales sive inaequales percipi queat. Dum enim punctum O situm respectu corporis A mutat; haec mutatio cognosci nequit, nisi quanta mutatio quovis tempore sit facta, intelligamus. Si ergo, ut pluribus placet, temporis notitiam aliunde, nisi ex consideratione motus, haurire non liceret, neque tempus sine motu, neque motum sine tempore cognoscere possemus, neutrius ergo unquam ullam notitiam essemus consecuti. Divisionem quidem temporis ex motus contemplatione, solis scilicet, didicimus, verum sine motus subsidio videmur apprehendisse, quid sit *ante* et *post*; unde idea successionis sponte sequi videtur. Atque etiamsi nos temporis accuratiorem notitiam considerationi motus debeamus, hinc tamen nondum sequitur, tempus in se nihil esse praeter nostrum conceptum. Quid enim sint duo temporis intervalla aequalia? quilibet intelligit, etiamsi fortasse nunquam in iis aequales mutationes eveniant, ex quibus illam aequalitatem colligere possit. Quicquid igitur de temporis fluxu disceptetur inter Philosophos, ad motus cognitionem temporis mensura uti debemus, concedendumque est, tempus ita ab omni motu independenter fluere, ut in eo partes, tam aequales, quam secundum rationem quamcunque inaequales, concipere liceat. Qui hanc nobis veniam recusaverit, omnem motus cognitionem funditus sustulerit. Tempus igitur perinde nobis liceat in calculum introducere, ac lineas aliasque magnitudines geometricas.

DEFINITIO. 4.

19. In motu puncti spatium vocatur via, quam punctum motu suo percurrit, quae cum sit linea, erit vel recta vel curva. Illo casu *motus* dicitur *rectilineus*, hoc vero *curvilineus*.

COROLL. 1.

20. Cum aliam adhuc motus, nisi respectivi, ideam non habeamus, spatium quoque seu linea descripta ad corpus, cujus respectu motus aestimatur, est referenda.

COROLL. 2.

21. Hoc scilicet corpus, sive quiescat ipsum sive moveatur, quoniam haec ratio non in computum ducitur, tanquam fixum spectatur, ejusque respectu tractus et positio illius spatii a puncto descripti assignari debet.

COROLL. 5.

22. Cognitio ergo hujus ſpatii ad tres caſus revocatur, quorum primus eſt, ſi motus ſit rectilineus, ſpatiumve linea recta. Secundus, ſi ſpatium quidem ſit linea curva, ſed tota in eodem plano ſita. Tertius vero, ſi linea curva non eodem plano contineatur.

EXPLICATIO 1.

23. In Geometria jam aſſumitur, motu puncti lineam deſcribi, quod ipſum per ſe clarius eſt, quam ut demonſtratione egeat. Si enim punctum quod ante fuerat in A nunc ſit in B, interea lineam quandam continuam ab A ad B porrectam percurrerit neceſſe eſt, niſi quis dicere velit, id in A ſubito annihilatum, tum vero in B de novo reproductum eſſe; verum quia hoc eſſet miraculum, non motus, ad noſtrum inſtitutum non pertinet. Qui motum quidem agnoſcere nolunt, rem clarius ſe concipere opinantur, ſi dicant, in ſingulis punctis ſpatii, quod nobis percurſum videtur, punctum annihilari, ſtatimque in ſequentibus reproduci; quaſi tranſitus ab uno loco in alium difficilior eſſet intellectu, quam alterna deſtructio et creatio. Verum cum motus alio reſpectu quies eſſe poſſit, idem de quiete dicere coguntur, ut ſit perpetua ejusdem corporis deſtructio, in eodemque loco ſubito ſecuta creatio: quae opinio cum non differat ab ea, qua conſervatio corporum continua eorumdem creatio ſtatuitur, a vulgari vix diſſentire videtur. Cum enim nullum temporis punctum ſit, quo corpus non exiſtat, quin continuo exiſtat dubitari nequit, haecque continua corporum exiſtentia in motu aeque atque in quiete concedi debet. Ex quo conficitur, punctum ab uno termino in alium tranſire non poſſe, quin ſucceſſive totam quandam lineam, ab illo termino ad hunc extenſam percurrerit.

EXPLICATIO 2.

Fig. 1. 24. Ponamus punctum percurriſſe lineam APQB, et cum id ſimul in A et B eſſe nequeat, neceſſe eſt, ut in B reperiatur, poſtquam fuerit in A. Ex iis ergo, quae non ſimul fuiſſe percipimus, ideam temporis colligimus, atque cum punctum fuerit in A, idem non niſi elapſo aliquo tempore in B pervenire potuiſſe agnoſcimus. Quod idem cum de punctis mediis P et Q ſit ſtatuendum, punctumque prius pervenerit in P quam in Q, atque prius in Q quam in B, inde ſimul diviſionem temporis intelligimus, qua conſtat, tempus quo ex A in P pervenerit, minus eſſe eo, quo ex A in Q perveniat, hocque minus eo, quo ex A usque in B pertingat.

Hinc

Hinc patet, tempus esse quantitatem divisibilem et mensurabilem, ita ut non solum aliud alio majus minusve sit dicendum, sed etiam ejus partes sive aequales, sive secundum rationem quamcunque inaequales, assignari queant. Cum enim tempus sit quantitas, necessario concedi debet, tempus, quo punctum ex A in P pervenit, vel aequale vel majus esse vel minus tempore, quo porro ex P in Q pervenit: et quicquid dixeris, inter haec duo tempora quaedam ratio intercedat, necesse est. Summo ergo jure hic tempus, tanquam quantitatem divisibilem ac mensurae capacem, in calculum introduci posse postulo.

DEFINITIO. 5.

25. Motus *aequabilis* seu *uniformis* dicitur, quo aequalibus temporibus aequalia spatia percurruntur. Sin autem aequalibus temporibus inaequalia spatia, vel aequalia spatia inaequalibus temporibus conficiantur, motus vocatur *inaequabilis*.

COROLL. 1.

26. Si ergo punctum motu aequabili feratur, tempore duplo percurret spatium duplum, triplo triplum: atque in genere spatia percursa erunt in ratione temporum, ac vicissim. Nempe si tempore t percurratur spatium s, alio vero tempore T spatium S, erit $t : T = s : S$.

COROLL. 2.

27. In motu autem inaequabili res secus se habebit, neque spatia percursa s et S rationem temporum, $t : T$ tenebunt, sermo hic autem est de motu quocunque respectivo, cujus solum adhuc habemus ideam, ac perinde est, sive motus sit rectilineus sive curvilineus.

COROLL. 3.

28. Ex motu ergo aequabili vicissim accuratam temporis divisionem nanciscimur: cum enim spatii divisio geometrice institui possit, tempus inde similem divisionem in partes sive aequales sive inaequales impetrabit.

SCHOLION. 1.

29. Hinc intelligitur, temporis divisionem non esse meram mentis operationem, ut ii, qui tempori nonnisi in mente nostra locum concedunt, ideam temporis ab ipso tempore non secernentes, statuere solent. Si enim tempus nihil aliud esset, nisi ordo successivorum, neque extra

mentem quicquam esset, quo tempus determinaretur; nihil impediret, quo minus in omni motu temporis partes, quibus aequalia spatia conficiantur, pro aequalibus haberemus, cum successiones similes videantur, ita ut omnis motus aequo jure tanquam aequabilis spectari posset. Ipsa autem rei natura abunde testatur, motum aequabilem essentialiter ab inaequabili differre; ideoque in aequalitate temporum, qua nititur, plus, quam quod in ideis nostris resideat, insit necesse est. Atque hinc aequalitas temporum rationi cuipiam, extra mentem sitae, inniti dicenda est, nosque potius ejus cognitionem extrinsecus ex motu aequabili hausisse videmur.

SCHOLION. 2.

30. Quamdiu punctum motu aequabili fertur, ita ut temporibus aequalibus spatia aequalia percurrat, tamdiu aeque celeriter moveri dicitur: unde discimus, quid sit *aeque celeriter moveri*. Ac si duo puncta A et B motu aequabili incedant, illudque A singulis temporibus t spatia $= s$, hoc vero B iisdem temporibus spatia $= \sigma$ percurrat, fueritque $s > \sigma$, punctum A celerius ferri dicitur, quam B, hoc vero illo tardius; unde percipimus, quid sit *celerius*, quid *tardius*. Atque si punctum A eodem tempore spatium duplo vel triplo majus absolvat, quam punctum B, illud *duplo* vel *triplo celerius* incedere dicitur; sicque hinc adeo comparatio hujus rei, quae vocabulo *celerius* subjicitur, menti clare obversatur, etiamsi de re ipsa nihil adhuc definiverimus. Est autem haec res conceptus abstractus, quasi basin exhibens ejus, quod sub voce *celerius* cogitamus; vocaturque iste conceptus *celeritas* vel *velocitas*, cujus definitionem proponamus.

DEFINITIO. 6.

31. In motu aequabili ratio spatiorum ad tempora, quibus percurruntur, vocatur *celeritas* sive *velocitas*. Aestimatur ergo celeritas ex quoto, qui oritur, si spatium per tempus dividatur.

COROLL. 1.

32. Si ergo in motu aequabili spatium $= s$ tempore $= t$ percurratur, celeritas erit $= \frac{s}{t}$. Unde si celeritas littera v indicetur, habetur

$$v = \frac{s}{t}.$$

COROLL.

COROLL. 2.

33. Positis ergo his tribus rebus, spatio $= s$, tempore $= t$, et velocitate $= v$, ex binis tertia ita definitur; ut sit 1°. $v = \frac{s}{t}$; 2°. $t = \frac{s}{v}$ et 3°. $s = tv$.

COROLL. 3.

34. Hinc si alius praeterea fuerit motus aequabilis, quo spatium $= S$ tempore T conficiatur, ejusque celeritas dicatur $= V$, habebuntur istae notissimae proportiones 1°. $v : V = \frac{s}{t} : \frac{S}{T}$; 2°. $t : T = \frac{s}{v} : \frac{S}{V}$; 3°. $s : S = tv : TV$.

EXPLICATIO 1.

35. Dubium hic orietur, quomodo spatia per tempora dividi queant, cum sint quantitates heterogeneae, neque dici possit, quoties tempus v. gr. decem minutorum in spatio v. gr. decem pedum contineatur. Verum hic non de divisione absoluta est sermo. Sed de comparativa, quoniam celeritatis idea nihil absoluti involvit. Scilicet celeritas aliter nisi relative intelligi nequit; statim autem atque celeritatem certi cujusdam motus aequabilis tanquam cognitam assumimus, et quasi unitatem spectamus, in quocunque alio motu aequabili celeritas per numerum exprimetur, neque ulla amplius occurret difficultas. Fingamus enim in motu aequabili, quo spatium $= s$ tempore t absolvitur, celeritatem pro unitate assumi: ita ut $\frac{s}{t}$ tanquam unitas spectetur; in alio quocunque motu aequabili, quo spatium $= S$ tempore $= T$ percurritur, celeritas talis erit numerus, qui qui sit ad unitatem, ut $\frac{S}{T}$ ad $\frac{s}{t}$, eritque hic numerus $= \frac{St}{Ts} = \frac{S}{s} \cdot \frac{t}{T}$, cujus factores $\frac{S}{s}$ et $\frac{t}{T}$ veros quotos exhibent.

EXPLICATIO 2.

36. Verum superior difficultas quoque evanescit, omnia ad numeros absolutos revocando. Si enim in spatiis mensurandis spatium quoddam determinatum pro unitate assumamus, similiterque pro temporibus tempus quoddam determinatum pro unitate habeamus, hacque mensura con-

 stan-

ſtanter utamur, omnia tam ſpatia quam tempora numeris abſolutis exprimentur, quotum diviſionem promiſcuam nihil eſt quod impediat. Quoti ergo ſupra indicati certe erunt celeritatibus proportionales, et quia arbitrio noſtro adhuc relinquitur, quamnam celeritatem inſtar unitatis ſpectare velimus, nihil obſtat, quo minus eam ipſam celeritatem, quam quotus ille in unitatem abiens indicat, etiam pro unitate aſſumamus. Quam rationem ſi conſtituerimus, quoti ſupra aſſignati $\frac{s}{t}$ et $\frac{S}{T}$ revera quaſvis celeritates deſignabunt. Semper autem ſolae relationes mutuae ſufficere poſſunt, et quovis caſu oblato facile erit eas ad menſuras abſolutas revocare.

SCHOLION.

37. Hanc celeritatis notionem ex motu uniformi ſeu aequabili petivimus, nihilo vero minus etiam ad motum inaequabilem patet. Uti enim in motu aequabili celeritas ubique eſt eadem, ita in inaequabili mutari eſt intelligenda. Mox enim oſtendemus, in omni motu, utcumque ſit inaequabilis, minima ſpatii elementa ſingula motu aequabili percurſa concipi poſſe, ſicque in quovis ſpatii puncto celeritatem aſſignare licet, qua ſcilicet minimum ſpatiolum ibi conceptum percurritur. Atque hinc celeritas, tanquam indoles quaedam peculiaris motus a deſcriptione ſpatii non pendens, conſiderari poteſt, cum in quolibet ſpatii deſcripti puncto certa detur celeritas. Ex quo *celeritas* etiam ita definiri poſſet, ut ſit talis motus modificatio, qua is ad certum ſpatium certo tempore deſcribendum determinetur. Ceterum uti hic motum utcunque reſpectivum conſidero, celeritas quoque pari modo erit reſpectiva, atque in eodem puncto diverſa, idque eodem tempore, eſt agnoſcenda, prouti motus ad alia atque alia corpora referatur. Ita fieri poteſt, ut corporis in nave moti celeritas, reſpectu navis, maxime diſcrepet ab ejusdem celeritate reſpectu ripae.

DEFINITIO. 7.

38. Si motus ſit rectilineus, *directio motus* eſt ipſa recta, in qua fit: ſin autem fuerit curvilineus, in quovis ſpatii puncto tangens curvae praebet directionem motus. Quare in motu curvilineo directio continuo mutari dicitur, dum in rectilineo perpetuo eadem manet.

COROLL.

COROLL. 1

39. Directio ergo motus cognoscitur ex angulo, quo ea ad unam vel duas lineas rectas fixas inclinatur. Scilicet si motus fiat in eodem plano, sufficit ejus inclinationem ad unam rectam fixam nosse: sin autem non fiat in eodem plano, ejus inclinationem ad duas rectas fixas nosse oportet.

COROLL. 2.

40. In motu igitur curvilineo, statim ac linea curva a puncto moto descripta fuerit cognita, methodus inveniendi tangentes directionem motus in singulis punctis manifestabit.

SCHOLION,

41. Quemadmodum motus sine celeritate, ita etiam sine directione cogitari nequit, cum enim punctum tempusculo etiam minimo ex suo loco in alium transeat, spatioli interea percursi magnitudo ad tempusculum applicata motus celeritatem, ejus vero positio motus directionem praebet. In quiete quidem celeritas evanescit, motusque, cujus celeritas est nulla, in quietem abit; verum de quiete dicere non licet, directionem quoque evanescere, sed potius directionis ratio plane cessare est putanda: statim enim ac punctum quiescere dicimus, ne quaestio quidem de directione locum habet. Etsi autem in motu tot sint res, quae in ejus cognitionem ingrediuntur, cum quaeri possit: 1°. *Quonam loco punctum post datum tempus sit haesurum?* 2°. *Quamnam lineam seu spatium interea confecerit?* 3°. *Quantam quovis tempore habiturum sit celeritatem?* 4°. *Quaenam ejus futura sit motus directio?* quoniam celeritas et directio sunt notiones, ex motus idea derivatae, dummodo quovis casu primam quaestionem resolverimus, simul omnes confecerimus. Quod quo clarius exponatur, secundum supra factam divisionem, tria motus genera persequar, quorum primo punctum in linea recta moveri assumam, secundo vero spatium descriptum curvum quidem statuam, sed in eodem plano existens: tertio denique id genus persequar, quo spatium motu descriptum non in eodem plano fuerit situm.

PROBLEMA. 1.

42. Si punctum in linea recta moveatur, universam motus determinationem ad calculum revocare.

SOLU-

SOLUTIO.

Fig. 2. Totum negotium huc redit, ut ad quodvis tempus locus assignetur, ubi tum punctum reperiatur. Sit ergo AB linea recta, in qua punctum incedat, initio in A constituto, atque elapso tempore $= t$, pervenerit in S, statuaturque AS $= s$, quod erit ipsum spatium tempore t descriptum. Quodsi jam inter t et s aequatio detur, qua alterum ex altero definiri queat, inde omnia, quae ad motus cognitionem pertinent, innotescent. Differentiatione enim instituta pro temporis elemento dt spatii elementum ds, quod eo percurritur, derivatur: atque fractio $\frac{ds}{dt}$ celeritatem puncti in S exprimet. Constat enim, hanc fractionem continere quantitatem finitam. Quare si celeritas in S ponatur $= v$, erit $\frac{ds}{dt} = v$, unde tam ad quodvis tempus, quam ad quemvis spatii locum, celeritas assignari poterit. Directio autem motus ubique cum ipsa recta AB congruet.

COROLL. 1.

43. Si ad singula temporis momenta celeritas corporis detur v, ita ut relatio inter t et v constet, inde quoque spatia s singulis temporibus t descripta definientur ope aequationis $ds = vdt$, cujus integrale praebebit ipsum spatium $s = \int vdt$.

COROLL. 2.

44. Simili modo si ad singula spatii puncta celeritas v fuerit cognita, seu data sit relatio inter s et v, inde tempus t, quo spatium s absolvitur, definietur hac aequatione differentiali $dt = \frac{ds}{v}$, ita ut sit $t = \int \frac{ds}{v}$.

COROLL. 3.

45. Si ergo motus fuerit aequabilis, celeritas $\frac{ds}{dt}$ erit quantitas constans, quae si ponatur $= c$, erit $ds = cdt$, et integrando $s = ct$, quoniam sumto $t = 0$, etiam spatium s evanescere debet. Vicissim ergo, si

si relatio inter s et t ita fuerit comparata, ut inde pro $\frac{ds}{dt}$ quantitas constans eliciatur, motus erit aequabilis.

EXPLICATIO.

46. Quando dicimus, punctum nostrum motum elapso tempore t in S esse, haec locutio admitti nequit, nisi a significatu vocabuli *esse* omnis mora vel mansio segregetur. In vulgari autem sermone phrasis *in loco esse* idem significare solet, atque *in loco morari*, unde vetus illud sophisma contra motus existentiam maximam vim adipiscitur: *Si corpus movetur, vel movetur in loco, ubi est, vel in loco, ubi non est:* quorum cum neutrum dici possit, colligitur, corpus plane moveri non posse: prius enim certe dici nequit, si, *in loco, ubi est*, idem significat, atque *in loco, ubi moratur, seu quiescit.* Si loco vocabuli *esse* substitueretur *transire*, omnis difficultas tolleretur: nam ubi corpus transit, ibi sine dubio movetur: verum talis vox non satis fortis videtur ad existentiam simul innuendam, dum corpus seu punctum per S transit: videtur autem existentiae notio, ad quempiam locum applicata, moram quandam implicare, a motu prorsus alienam. Quare nisi hoc solo nomine motum e mundo tollere velimus, cavere debemus, ne cum his loquendi formulis, *in loco esse, vel existere, vel haerere*, ullam mansionem conjungamus, atque tali significatu hic equidem semper utar, ita ut plus non declarent, quam per locum transire, siquidem corpus moveatur. Hinc est, quod nonnulli Philosophi, hanc distinctionem negligentes, admodum perversas sibi notiones de motu finxerint; dum enim motum per successivam ejusdem corporis in diversis locis existentiam explicant, in singulis locis ipsi quandam moram tribuunt, unde subito in loca sequentia transeat. Si hac definitione incommodum, quod ex existentia sine mora in eodem loco pertimescunt, vitare volunt, saltus illos subitaneos certe multo magis pertimescere debebant; dum enim talis saltus fit, dicere non poterunt, ubi tum corpus existat; ac, si huic opinioni ulla ratio subesset, expediret potius, omnem motum negare, quam hujusmodi principia, naturam motus evertentia, constituere.

PROBLEMA 2.

47. Si punctum in linea curva moveatur, quae autem tota sita sit in eodem plano, universam motus determinationem ad calculum revocare per binas coordinatas.

SOLUTIO.

Fig. 3. Quoniam id corpus, cujus respectu motus aestimatur, ut fixum spectatur, planum quoque, in quo spatium percursum est situm, pro fixo est habendum. In eo autem pro lubitu duae rectae directrices OA et OB, inter se sive normales sive obliquae, accipiantur, ad quos motus referatur: sitque ESF via seu spatium, a puncto moto descriptum, in cujus puncto E initio fuerit. Iam tota quaestio huc redit, ut elapso tempore t locus in curva S definiatur, ubi tum punctum sit futurum. Ponatur totum spatium interea percursum seu linea $ES = s$, et ex S binis directricibus OA, OB, parallelae agantur SY et SX, vocenturque coordinatae $OX = SY = x$; $XS = OY = y$; atque si pro tempore t valores ipsarum x et y assignari queant, simul punctum S innotescet; quin etiam relatione inter x et y natura curvae ESF exprimetur. Tum vero ex angulo directricium AOB, qui sit $= \zeta$, habebitur pro elemento temporis dt elementum spatii $Ss = ds = \surd(dx^2 + 2dxdy \cos\zeta + dy^2)$, unde prodit celeritas in loco $S = \frac{ds}{dt}$, et pro motus directione reperitur angulus, quem ea cum altera directrice OA facit, cujus anguli tangens est $= \frac{dy \sin\zeta}{dx + dy \cos\zeta}$, et sinus $= \frac{dy \sin\zeta}{ds}$. Vel si angulus quaeratur, quem motus directio Ss cum altera directrice OB facit, erit ejus tangens $= \frac{dx \sin\zeta}{dy + dx \cos\zeta}$, et sinus $= \frac{dx \sin\zeta}{ds}$.

COROLL. 1.

48. Ut locus curvae S per coordinatas $OX = x$ et $XY = y$ determinatur, ita locus sequens s per earum elementa dx et dy definitur: scilicet punctum ex S egressum tempusculo dt secundum directionem OA per spatiolum dx, secundum directionem OB vero per spatiolum dy transfertur.

COROLL. 2.

49. Duplex ergo haec translatio per spatiola dx et dy veram translationem ex S in s per spatiolum $Ss = ds$ ita ostendit, ut tam ejus quantitatem ipsam, quam directionem declaret.

COROLL. 3.

50. Sin autem mobile tempusculo dt ſpatiola dx et dy revera percurreret, ejus celeritas futura eſſet $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$: ex quibus celeritatibus mente conceptis, non ſolum vera celeritas per ſpatiolum $Ss = ds$, ſed etiam hujus directio indicatur.

COROLL. 4.

51. Si inter binas directrices OA et OB angulus AOB $= \zeta$ conſtituatur rectus, calculus fit ſimpliciſſimus. Tum enim ex elementis dx et dy definitur $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$, et directionis Ss ad rectam fixam OA inclinationis tangens eſt $= \frac{dy}{dx}$.

SCHOLION. 1.

52. Geometrica plane eſt haec conſideratio, qua motus puncti, dum tempusculo dt ſpatiolum $Ss = ds$ peragrat, reſolvi concipitur in binos motus ſecundum directiones fixas OA et OB, quippe qua in ipſo motu nihil mutatur. Atque dum huic duplici motui ſua aſſignatur celeritas $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, hoc commodi inde conſequimur, ut non ſolum veram celeritatem $\frac{ds}{dt}$ ſed etiam motus directionem cognoſcamus, id quod in calculo plerumque maximum uſum praeſtabit. Cum enim celeritas ac directio ſint duae res, natura ſua diverſae, ambas hoc modo per duas celeritates, ſeu quantitates ejusdem generis, cognoſcere licet. Mente autem tantum motum puncti, pro quovis temporis elemento dt, in binos motus ſecundum datas directiones reſolvimus, et utrique ſuam velocitatem aſſignamus; non quaſi in puncto duplex ineſſet motus, quod ſane eſſet abſonum, ſed quoniam talis conceptus ad veram cognitionem perducit. Hoc ſubſidio uti licet, quando jam aliunde certum eſt, motum puncti in eodem fieri plano: at ſi de hoc non conſtet, ad ternas directrices fixas recurrere debemus, ſecundum quas motum in ternos motus reſolvi conveniet.

SCHOLION. 2.

53. Evolutio haec motus, in plano facti, usitata nititur ratione, lineas curvas ad binas directiones fixas, quibus coordinatae parallelae statuuntur, revocandi. Cum autem electio harum rectarum directricium ab arbitrio nostro pendeat, manifestum est, eundem motum infinitis modis calculo exprimi posse: qui cum omnes, pro quovis tempore, tam eandem celeritatem quam directionem monstrare debeant, motus etiam resolutio est arbitraria: Motus scilicet puncti, quo tempusculo dt spatiolum $Ss = ds$ percurrit, infinitis modis, mente saltem, in binos motus resolvi potest, prout aliae atque aliae lineae pro directricibus assumuntur: qui vero semper in hoc convenient, ut binae illae celeritates $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, utcunque fuerint diversae, si junctim sumantur, eandem semper tam celeritatem veram $\frac{ds}{dt}$, quam directionem seu positionem tangentis in S ductae, sint ostensurae. Quae infinita varietas, quoniam a Geometria inducitur, nihil habet, quod sit mirandum: interim tamen, quovis casu oblato, plurimum interest, qua ratione rectae illae directrices eligantur, quo calculus maxime facilis reddatur.

PROBLEMA. 3.

54. Si spatium, a puncto descriptum, non sit in eodem plano, universam motus determinationem per ternas coordinatas ad calculum revocare,

SOLUTIO.

Fig. 4. Corpus, cujus respectu motus aestimatur, et quod pro fixo habetur, suppeditabit ternas directiones fixas, in longum, latum ac profundum extensas, quarum electio cum arbitrio nostro relinquatur, statuuntur eae, ad calculi commodum, inter se normales. Sint igitur OA, OB et OC hae tres directrices, quarum binae priores in plano tabulae sint sitae, postrema vero OC huic plano perpendiculariter insistens concipiatur. Punctum autem motum cosecerit lineam ESF, extra planum tabulae utcunque sitam, in qua elapso tempore t ex E pervenerit in S, unde ad planum AOB demittatur perpendiculum SY, et ex Y ad OA normalis

malis YX. Vocentur hae coordinatae orthogonales, $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$, quae ternis directricibus erunt parallelae; inter quas per duplicem aequationem natura curvae ESF definitur, ita ut, si ad tempus t eorum valores assignari queant, iis locus S, ubi nunc punctum motum versatur, determinetur. Deinde posito toto spatio $ES = s$, quod tempore t est percursum, ex differentialibus dx, dy et dz, tempusculo dt convenientibus, colligetur elementum spatii $Ss = ds$ eodem tempusculo percursum, cum sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, unde celeritas in S erit $= \frac{ds}{dt}$. Quod autem ad directionem motus Ss attinet, ea indidem determinatur: producta enim recta yY ad concursum usque T cum recta AO, erit $XT = \frac{ydx}{dy}$, et si concipiatur planum super YT plano AOB normaliter insistens, in eo erit elementum Ss, quod productum cum recta YT angulum faciet, cujus tangens est $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et sinus $= \frac{dz}{ds}$. Quin etiam directio Ss cum recta, per S ipsi OA parallela ducta, faciet angulum, cujus cosinus $= \frac{dx}{ds}$; cum recta autem, per S ipsi OB parallela ducta, angulum, cujus cosinus $= \frac{dy}{ds}$, et cum recta, per S ipsi OC parallela ducta, angulum, cujus cosinus est $= \frac{dz}{ds}$: quibus rebus universa motus determinatio continetur.

COROLL. 1.

55. Hic ergo elementum spatii Ss tanquam diagonalis parallelepipedi consideratur, cujus latera sunt dx, dy et dz, ternis directricibus fixis OA, OB et OC parallela; ex quibus, cum parellepepidum statuatur rectangulum, diagonalis $Ss = ds$ ita definitur, ut sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

COROLL. 2.

56. Dum mobile tempusculo dt elementum Ss percurrit, interea secundum directionem, ipsi OA parallelam, per spatiolum dx; secundum directionem, ipsi OB parallelam, per spatiolum dy; et secundum directionem, ipsi OC parallelam, per spatiolum dz progredi concipi solet.

COROLL. 3.

57. Si haec triplex translatio ut verus motus spectetur, etiamsi tantum mente concipiatur, exprimet $\frac{dx}{dt}$ celeritatem, secundum directionem OA; porro $\frac{dy}{dt}$ celeritatem, secundum directionem OB; atque $\frac{dz}{dt}$ celeritatem, secundum directionem OC.

COROLL. 4.

58. Ex his tribus autem celeritatibus fictitiis non solum vera puncti celeritas in S, quae est $= \frac{ds}{dt}$ colligitur, sed etiam motus directio; atque adeo ex earum integralibus totus motus definitur.

SCHOLION. 1.

59. Calculi gratia hic ternas directrices OA, OB, et OC, inter se normales constitui; quae etiam, ut praecedente casu fecimus, utcunque obliquae assumi potuissent: verum indoles angulorum solidorum obliquorum non tam nota plerisque esse solet, ut eorum proprietates, tanquam ex elementis satis cognitae, hic assumi potuissent. Quin potius, quoniam imprimis calculi prolixitas est evitanda, merito semper directricibus orthogonalibus utemur. Interim tamen, si eae essent obliquae, angulique ponantur AOB $= \zeta$, AOC $= \eta$ et BOC $= \theta$, atque iis coordinatae x, y, z, parallelae ducantur, haberetur per formulam utique magis complicatam:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy \cos\zeta + 2dxdz \cos\eta + 2dydz \cos\theta)}$$

atque positio elementi Ss, seu motus directio, nimis incommode exprimeretur.

SCHOLION. 2.

60. Quoniam constitutio ternarum directricium OA, OB, OC, etsi inter se normalium, infinitis modis variari potest, idem motus infinitis modis repraesentari potest. Quin etiam, si punctum moveatur in linea recta, vel curva, tota in eodem plano existente, quasi hoc non constatet, motus nihilo minus per hujusmodi ternas directrices expediri poterit, praestabit tamen methodis simplicioribus supra traditis uti. Ex his ergo patet, eundem motum semper infinitis modis in ternos resolvi posse

posse, quorum cuique sua tribuatur celeritas, ita ut omnes junctim sumtae non solum ipsam puncti celeritatem, sed etiam motus directionem exhibeant, id quod in calculo summum praestabit usum, quoniam hoc modo a pluribus investigationibus satis taediosis circa curvaturam spatii descripti, eamque duplicem, nisi motus in eodem plano fiat, liberamur. Hae enim ternae celeritates, mente saltem puncto mobili tributae, totum negotium expedient; quo subsidio cum non sim usus in superioribus de Mechanica libris, in nimis intricatos calculos sum delapsus. Quare cum haec motus resolutio, etsi mente solum instituatur, tanti sit momenti, operae pretium erit, eam per peculiarem definitionem stabilivisse.

DEFINITIO. 8.

61. Motus *resolvi* dicitur, dum spatiolum, elemento temporis percursum, tanquam diagonalis parallelogrammi vel parallelepipedi consideratur, cujus latera datas tenent directiones; punctoque mobili duplex vel triplex motus, secundum latera parallelogrammi vel parallelepipedi, quisque cum sua velocitate, adscribitur.

SCHOLION. 1.

62. Quae hic de motu quasi elementari per spatiolum infinite parvum dicuntur, transferri possunt ad motum finitum, dum sit aequabilis et rectilineus: propterea, quod ea ideo motui elementari sint adstricta, quoniam quodque elementum lineae curvae, ut lineola recta, et motus per id aequabilis, spectari potest. Quo igitur haec magis fiant sensibilia, ea in motu finito aequabili et rectilineo explicabo, siquidem hinc applicatio ad motum elementarem facillime instituitur.

EXPLICATIO. 1.

63. Ponamus, punctum tempore $= t$ percurrere motu aequabili rectam SV, ut ejus celeritas sit $= \frac{SV}{t}$; et concipiamus circa SV parallelogrammum quodcunque SAVB descriptum, cujus recta SV sit diagonalis. Quo facto motus secundum latera SA et SB ita mente resolvi potest, ut illius celeritas sit $= \frac{SA}{t}$, et hujus $= \frac{SB}{t}$, utroque scilicet aequabili existente: atque hic duplex motus cum his celeritatibus lateralibus non solum Fig. 5.

ſolum veram celeritatem $\frac{SV}{t}$, ſed etiam veram motus directionem indicabit; ſicque ad cognitionem hujus motus ſufficiet, binas illas celeritates laterales definiviſſe. Neque vero hujusmodi reſolutio mechanico fundamento inniti eſt exiſtimanda; cum potius certum ſit, plus uno motu ſimul in eodem puncto ineſſe non poſſe, ſed ea ex mero conceptu geometrico nata, atque a natura motus plane aliena, eſt judicanda, in ſubſidium tantum calculi in Mechanicam introducta.

EXPLICATIO. 2.

Fig. 6. 64. Percurrat mobile tempore t motu aequabili rectam SV, quem motum ſecundum ternas directiones reſolvi oporteat. His agantur ex utroque termino S et V rectae parallelae SA, SB, SC, atque VP, VQ, VR, quoad quaeque plano binarum reliquarum directionum, ad alterum terminum conſtitutarum occurrat. Hoc modo orietur parallelepipedum, cujus SV eſt diagonalis: atque motus per SV, cujus celeritas eſt $= \frac{SV}{t}$ ita mente in tres motus ſecundum SA, SB, SC, reſolvi poteſt, ut motus ſecundum SA celeritas ſit $= \frac{SA}{t}$, motus ſecundum SB celeritas $= \frac{SB}{t}$, et motus ſecundum SC celeritas $= \frac{SC}{t}$. Ex his tribus celeritatibus non ſolum vera celeritas per diagonalem SV determinabitur, ſed etiam motus directio, ratione ternarum directricium, innoteſcit. Eodem vero modo, ſi SV ſit elementum curvae cujuscunque, tempuſculo dt percurſum, reſolutio in ternas celeritates ſecundum ternas quascunque directiones inſtitui poteſt.

SCHOLION. 2.

65. In his motus determinationibus ſecutus ſum uſitatam in Geometria methodum, naturam linearum curvarum per binas vel ternas coordinatas exprimendi; illud ſcilicet, quando curva tota in eodem plano eſt ſita, hoc vero, ubi eodem plano contineri nequit. Quae methodus uti primum ſe obtulit, ita nos manuduxit ad inſignem illam motus reſolutionem, ſecundum datas vel duas vel tres directiones inſtituendam, quae per univerſam Mechanicam ampliſſimi erit uſus, dum cognitio celeritatum lateralium ſimul motus directionem atque inflexionem in ſe complectitur, cujus conſideratio calculum alioquin non mediocriter perturba-

turbare solet. Verum cum in Geometria etiam saepe lineae curvae ad punctum aliquod fixum non sine egregio calculi compendio referuntur, eodem modo quoque motus evolutionem exposuisse juvabit, idque cum motus non solum in eodem fit plano, sed etiam extra planum vagatur: hoc quippe modo Astronomi feliciter uti solent, dum motus planetarum, respectu alicujus puncti, per angulos circa id descriptos distantiasque ab eodem definiunt, ubi si motus non fiat in eodem plano, insuper lineam nodorum cum inclinatione orbitae ad certum planum contemplantur; quare haud abs re erit, etiam hanc motus repraesentandi rationem paucis in genere explicare.

PROBLEMA 4.

Si motus fiat in eodem plano, universam motus determinationem per angulos, circa punctum quoddam fixum absolutos, describere.

SOLUTIO.

Si AS sit via a puncto moto in eodem plano descripta, in eodem accipiatur punctum fixum O, quod ad motus determinationem maxime accommodatum videatur, ductaque ad motus initium A recta OA, motus perfecte cognoscetur, sid ad quodvis tempus elapsum $= t$, quo punctum in S versetur, definire poterimus tam angulum AOS $= \phi$, quam distantiam OS $= z$. Cum enim inde natura curvae AS definiatur, tum etiam differentialia tam motus celeritatem, quam ejus directionem, determinabunt. Si enim punctum tempusculo dt ex S pervenerit in s, quo angulus AOS $= \phi$ cepit incrementum SO$s = d\phi$, et distantia OS $= z$ incrementum $sp = dz$, posito semper sinu toto $= 1$, erit S$p = zd\phi$, et Ss $= \surd(dz^2 + zzd\phi^2)$, unde celeritas in S $= \frac{\surd(dz^2 + zzd\phi^2)}{dt}$ et directio cognoscetur ex angulo ASO seu Ssp, cujus tangens est $= \frac{zd\phi}{dz}$. Fig. 7.

COROLL. 1.

67. Cum punctum motum tempore $= t$ circa O angulum descripserit AOS, et ab eodem puncto O jam intervallo OS $= z$ distet, ejus motus tanquam duplex spectari potest, alter angularis circa punctum fixum O, alter directus ab eodem puncto recedens, vel eo accedens.

COROLL. 2.

68. Et cum tempusculo dt angulus $AOS = \phi$ crescat elemento $d\phi$, fractio $\frac{d\phi}{dt}$ celeritatem angularem exprimet, tum vero ob dz augmentum distantiae $OS = z$, fractio $\frac{dz}{dt}$ celeritatem recessus a puncto O declarabit.

COROLL. 3.

69. Cognita autem utraque hac celeritate, tam angulari quam recessus, inde non solum vera puncti celeritas, sed etiam directio, tum vero insuper ipsa curva descripta AS assignari poterit.

PROBLEMA. 5.

70. Si punctum non in eodem plano moveatur, ejus motum, cum ad planum, tum ad datum in eo punctum fixum, per angulos exprimere.

SOLUTIO.

Fig. 8. Repraesentet tabula id planum, ad quod motus sit referendus, in quo sit O punctum illud fixum, quod quasi centrum spectetur. Moveatur punctum utcunque extra hoc planum in linea ES, et tempore elapso t pervenerit in S, unde in planum demittatur perpendiculum SM, ducanturque rectae MO et SO. Sit OA directio fixa in hoc plano assumta, atque manifestum est, ad datum tempus t locum puncti S definitum iri, si assignare poterimus 1°. angulum $AOM = \phi$. 2°. angulum $MOS = \psi$, ac 3°. distantiam $OM = z$. Quod quo facilius fieri possit, ducatur ex S tangens curvae descriptae, quae plano occurrat in T, unde agatur OT, quae erit intersectio plani, in quo punctum jam movetur, cum plano assumto. Vocarique solet haec recta OT linea nodorum, pro qua sit hoc tempore angulus $AOT = \omega$ et inclinatio plani OST ad planum assumtum $= \rho$, qui duo anguli ω, ρ si fuerint praeter angulum $AOM = \phi$ et distantiam $OM = z$ ad datum tempus t cogniti, locus puncti S, hoc est angulus $MOS = \psi$ cum distantia $OS = \frac{z}{\cos\psi}$, commode assignari poterit. Hunc in finem ex M in rectam OT ducatur normalis MN, simulque recta SN; atque ob angulum $TOM = \phi - \omega$, erit $MN = z\sin(\phi - \omega)$ et

et ON $= z \cos(\varphi - \omega)$: tum vero habebitur angulus MNS $= \rho$, unde fit MS $= z \sin(\varphi - \omega) \tan\rho$, et NS $= \frac{z \sin(\varphi - \omega)}{\cos\rho}$, hincque OS $= \frac{z}{\cos\rho} \sqrt{(\sin(\varphi - \omega)^2 + \cos(\varphi - \omega)^2 \cos\rho^2)}$ seu OS $= \frac{z}{\cos\rho} \sqrt{(1 - \cos(\varphi - \omega)^2 \sin\rho^2)}$. Verum hinc angulus MOS $= \psi$ ita definitur, ut sit $\tan\psi = \frac{MS}{OM} = \sin(\varphi - \omega) \tan\rho$. Cum igitur angulus AOT $= \omega$ cum inclinatione $= \rho$ aeque ad punctum sequens s, ubi punctum elapso insuper tempusculo dt haeret, atque ad punctum S pertineat, in differentiatione anguli ψ elementa ω et ρ pro constantibus habere licet, unde fit $\frac{d\psi}{\cos\psi^2} = d\varphi \cos(\varphi - \omega) \tan\rho$: erit vero etiam secundum praecepta differentiationis

$$\frac{d\psi}{\cos\psi^2} = (d\varphi - d\omega) \cos(\varphi - \omega) \tan\rho + \frac{d\rho}{\cos\rho^2} \sin(\varphi - \omega);$$

quibus valoribus aequatis oritur

$$\frac{d\omega}{\tan(\varphi - \omega)} = \frac{d\rho}{\sin\rho \cos\rho} = d.l \tan\rho$$

qua aequatione ratio inter progressionem momentaneam lineae nodorum OT et variationem inclinationis ρ continetur. Invento autem angulo MOS $= \psi$, per formulam $\tan\psi = \sin(\varphi - \omega) \tan\rho$, inde innotescit distantia OS $= \frac{z}{\cos\psi}$.

COROLL. 1.

71. Quoniam anguli ω et ρ ita a se invicem pendent, ut sit $\frac{d\omega}{\tan(\varphi - \omega)} = \frac{d\rho}{\sin\rho \cos\rho}$, patet si angulus AOT $= \omega$ maneat idem, etiam inclinationem ρ perpetuo eandem fore: tum ergo motus puncti fiet in eodem plano. Criterium ergo motus in eodem plano per punctum fixum O transeunte facti in hoc consistit, ut anguli ω et ρ sint constantes.

COROLL. 2.

72. Dum punctum mobile transit per planum assumtum, versabitur in ipsa linea nodorum OT, eritque tang $(\phi - \omega) = 0$, unde utcunque inclinatio ρ varietur, erit $d\omega = 0$, seu linea nodorum quiescet.

COROLL. 3.

73. Sin autem angulus TOM $= \phi - \omega$ fuerit rectus, ob tang $(\phi - \omega) = \infty$, utcunque linea nodorum moveatur, erit $d\rho = 0$, seu inclinatio per tempusculum dt non mutabitur.

SCHOLION.

74. Si hoc modo elementum spatii Ss exprimere, indeque celeritatem motus definire velimus, formula nimis fit complexa, quod etiam in directione usu venit. Alio igitur modo calculus institui potest, ut huic incommodo occurratur: ad datum scilicet tempus quaeratur primo positio lineae nodorum OT seu angulus AOT $= \omega$, tum vero inclinatio MNS $= \rho$, deinde in ipso plano TOS, in quo jam punctum moveri concipitur, angulus TOS $= \sigma$, una cum distantia OS $= v$. Quibus positis habebitur ON $= v \cos\sigma$; SN $= v \sin\sigma$, hinc SM $= v \sin\sigma \sin\rho$ et MN $= v \sin\sigma \cos\rho$. Ex his angulus SOM $= \psi$ colligitur, cum sit $\sin\psi = \sin\sigma \sin\rho$. Porro ob tang TOM $=$ tang $\sigma \cos\rho$, quia angulus TOM aequatur $\phi - \omega$, hic differentialia $d\omega$ et $d\rho$ ita a se invicem pendent, ut sit

$$\frac{d\omega}{\tan\sigma \cos\rho} = \frac{d\rho}{\sin\rho \cos\rho} \text{ seu } d\omega = \frac{d\rho \tan\sigma}{\sin\rho}.$$

Postea vero hinc colligitur elementum spatii $Ss = \sqrt{(dv^2 + vvd\sigma^2)}$ ideoque celeritas ipsa $= \frac{1}{dt}\sqrt{(dv^2 + vvd\sigma^2)}$; verum directio motus Ss in plano TOS ita ad rectam OS inclinatur, ut sit anguli OST tangens $= \frac{vd\sigma}{dv}$. In Astronomia autem, ubi haec evolutio potissimum adhibetur, angulus TOS vocari solet *argumentum latitudinis*, et angulus SOM *latitudo*: tum vero adjecto angulo TOM, cujus tangens est $=$ tang $\sigma \cos\rho$, ad longitudinem nodi AOT $= \omega$, summa seu angulus AOM vocatur *longitudo*.

CAPUT

CAPUT II.

DE INTERNIS MOTUS PRINCIPIIS.

DEFINITIO. 9.

75. *Interna motus principia* complectuntur omnia ea, quae in ipsis corporibus insunt, in quibus ratio sive quietis sive motus eorum contineatur; exclusis omnibus causis externis, quae quicquam ad eorum motum vel quietem conferre queant.

EXPLICATIO. 1.

76. Cum in capite praecedente modum exposuerim, motum in genere spectatum ad calculum revocandi, nunc in ejus causas inquirere animus est. Sive enim corpus quiescat, sive moveatur, sive in quiete perseveret, sive motum accipiat, eumque quomodocunque continuet, haec phaenomena a certis causis proficiscantur necesse est. Quicquid scilicet in corpore ratione motus vel quietis contingit, id temere ac sine ulla ratione fieri, nullo modo statui potest. Quaecunque autem sit ratio ea, vel in ipso corpore, de quo quaeritur, insit necesse est, vel extra id sit quaerenda; unde duo genera principiorum, quibus motus corporum definiatur, constitui debent, quorum illa *interna*, haec vero *externa* appellabo. Ad *interna* scilicet refero, quicquid in ipsis corporibus inest, in quo ratio sive motus sive quietis eorum continentur; quae autem extrinsecus ita in corpora agunt, ut eorum status sive motus sive quietis afficiatur, ea ad principia motus *externa* erunt referenda. Cum autem in mundo omnia corpora quaquaversus aliis contingantur, arctissimoque nexu inter se conjungantur, in hoc complexu neutiquam discernere licebit, quid principiis sive externis sive internis seorsim sit tribuendum. Quare ne in hac investigatione confundamur, mente saltem opus erit, omnia corpora ambientia e medio tollere, ut id, de quo quaeritur, quasi solitarium relinquatur: atque tale corpus, sive fuerit in quiete sive in motu, quomodo deinceps se sit habiturum, erit explorandum; hincque motus principia interna cognoscentur, ab externis sollicite distinguenda.

EXPLICATIO. 2.

77. Dum autem corpus ita solitarium et extra omnem nexum cum aliis corporibus, quasi solum in mundo existeret, sum consideraturus, a nonnullis Philosophis statim clamabitur, hanc hypothesin in se contradictionem involvere, cum omnia in mundo ita arctissimo nexu sint inter se colligata, ut, uno sublato, tota compages destruatur. Verum hic minime de ullo corpore e mundo tollendo agitur, sed quomodocunque aliquod corpus ab aliis ob nexum illum afficiatur, ne Philosophus quidem prohibebitur, quaestionem instituere, quid de illo corpore esset futurum, si nullatenus ab aliis afficeretur? non ut deinceps affirmet, hoc revera esse eventurum, sed ut discat, quid eorum, quae ipsi revera eveniunt, externis causis sit tribuendum. Talibus sane abstractionibus Philosophi perpetuo utuntur, ac, si eas proscribere vellent, ad nullius certe veritatis cognitionem aditus relinqueretur. Si autem licet, corpus ita considerare, quasi a nullis aliis afficeretur; perinde se habebit, ac si alia corpora plane non adessent; quid igitur opus est, hac investigatione reliqua corpora omnia praeter id, de quo quaestio instituitur, tanquam existentia contemplari? cum eo nihil plane conferant. His perpensis nihil profecto obstare potest, quominus aliquod corpus tanquam prorsus solitarium, et quasi reliqua corpora omnia e mundo essent sublata, consideremus: ac, si quem forte haec hypothesis adhuc offendat, relinquat is omnia corpora, dum nobis concesserit, nullam ab iis actionem in id corpus, quod considerandum sumsimus, redundare.

AXIOMA. 1.

78. Omne corpus, etiam sine respectu ad alia corpora, vel quiescit vel movetur, hoc est vel absolute quiescit, vel absolute movetur.

EXPLICATIO. 1.

79. Hactenus sensus secuti, alium motum vel quietem non agnovimus, nisi respectu aliorum corporum, unde tam quietem quam motum *respectivum* diximus. Nunc vero si omnia corpora praeter unum mente tollimus, ejus quoque ad illa relatio aufertur, qua hactenus ejus quietem vel motum dijudicavimus: ubi primo quaeritur, utrum etiamnunc judicium de motu vel quiete corporis locum habere possit, nec ne? si enim hoc judicium non aliunde, nisi ex comparatione situs corporis propositi cum aliis corporibus, peti queat, his remotis etiam ipsum judicium

dicium tollatur, necesse est. Verum tametsi nos quietem vel motum cujuspiam corporis non nisi ex relatione ejus ad alia corpora cognoscimus, inde tamen concludere non licet, has res in se nihil esse, praeter meram relationem in mente institutam, nihilque in ipsis corporibus inesse, quod ideis nostris quietis ac motus respondeat. Quantitatem quippe nobis etiam aliunde cognoscere non licet, nisi ex comparatione: tamen sublatis his, quibuscum comparationem instituebamus, in corpore tamen relinquitur quasi fundamentum quantitatis, quoniam si in majus extenderetur vel in minus contraheretur, vera mutatio in eo facta esset censenda. Ita si etiam unicum corpus existeret, id vel quiescere vel moveri esset dicendum; cum neque utrumque simul, neque neutrum statui possit. Unde concludo, quietem et motum non esse meras res ideales, ex comparatione sola natas, ita ut in ipsis corporibus nihil, quod iis respondeat insit; sed de corpore etiam solitario recte quaeri posse, utrum moveatur, an quiescat? ubi equidem eos Philosophos, qui omnia ad relationes revocant, minime pertimesco, cum iidem tantum motui tribuant, ut in vi motrice etiam aliquid substantiale agnoscant.

EXPLICATIO 2.

80. Cum ergo etiam de unico corpore, nullo ad alia habito respectu, vel his adeo annihilatis, recte quaeri possit, quiescat ne, an moveatur? alterutrum necessario statui debet. Qualis autem hæc futura sit quies, qualisve hic motus? cum mutatio situs respectu aliorum corporum hic nullum inveniat locum, ne cogitare quidem possumus, nisi spatium absolutum admittamus, in quo nostrum corpus locum quendam occupet, indeque in alia loca transire possit. Cum enim, secundum eosdem Philosophos, qui spatium absolutum maxime impugnant, plurimum intersit, utrum corpus quodpiam moveatur, an quiescat? nullo etiam ad alia corpora respectu habito dicant, in quanam alia re discrimen consistat. An dicent, id corpus revera moveri, quod situm suum respectu vicinorum continuo mutet? verum motus in his vicinis inesse posset, illo quiescente. An comparationem cum remotis institui oportebit? sed cum quibus primo? deinde cur cum hisce potius, quam cum aliis? Respondebunt tandem cum talibus, quae per se quiescant. Tum autem porro interrogo, non quomodo nos corpora per se quiescentia agnoscamus, sed quid sit per se quiescere? quando quidem nunc ad situm respectu aliorum non amplius confugere licet. Cogentur ergo tandem confiteri, ea corpora per se quiescere, quae in eodem spatii loco perseverent, a quo cum omnis

omnis consideratio aliorum corporum sit remota, ad ipsum spatium absolutum perveniunt, cujus respectu quae corpora vel quiescunt, vel moventur, ea absolute vel quiescere vel moveri dicimus.

SCHOLION.

81. Qui spatium absolutum negare voluerit, in gravissima incommoda delabitur. Cum enim motum et quietem absolutam tanquam vanos sine mente sonos rejicere debeat, non solum leges motus, quae huic principio innituntur, rejicere debet, sed etiam ne ullas quidem motus leges dari affirmare cogitur. Namque si ea, quae nos huc perduxit quaestio, *quid in corpore a nexu reliquorum separato sit eventurum?* per se est absurda, etiam ea, quae ab aliis in eo effici possent, per se incerta et indeterminabilia erunt, sicque omnia temere ac sine ulla ratione evenire essent statuenda. Vel si haec effugere velit, motum omnem negare debebit, qua tamen in sententia, etiamsi omnia argumenta contra eam allata feliciter refutaverit, minime acquiescere poterit, cum ne dicere quidem valeat, quid sit quies, quam per totum mundum constituerit. Sed contra tam apertas absurditates pugnare firmissimum nostrae sententiae fundamentum videtur.

AXIOMA. 2.

82. Corpus, quod absolute quiescit, si nulli externae actioni fuerit subjectum, perpetuo in quiete perseverabit.

EXPLICATIO.

83. Pronunciari hoc axioma solet de corpore quocunque, et per se tam perspicuum videtur, ut nulla probatione indigeat. Quo autem vis ejus clarius intelligatur, punctum tantum seu elementum corporis consideretur, quod si semel absolute quieverit, perpetuo in quiete perseverare debet: cum enim in eo nulla insit ratio, cur in unam potius directionem moveri incipiat, quam in omnes alias, atque extrinsecus omnis caussa motus adimatur, secundum nullam directionem motum concipere poterit. Nititur igitur quidem haec veritas principio sufficientis rationis; interim tamen in ipso puncto seu elemento corporeo caussa permanentiae in quiete agnosci debet, ita ut haec veritas pro necessaria sit habenda. Quod autem de puncto quocunque est probatum, id quoque de omnibus junctim sumtis, ideoque de quovis corpore, valeat necesse est: si enim singula ejus elementa quiescant, et in quiete perseverent, quin totum corpus

pus sit quieturum dubitari nequit. Interim circa hujusmodi corpus dubium moveri potest, quod fortasse ejus partes etsi quiescant, in se mutuo agant, motumque excitent: sed hoc etiam concessum nihil contra axioma facit; dum non solum totum corpus, sed etiam singulas ejus partes, ab omni actione externa liberamus: atque nobis sufficit, axioma hoc sensu admisisse, ut saltem omnes particulae corporum minimae quiescentes, quatenus in se invicem non agunt, in quiete persistant.

SCHOLION.

84. Quae lex hic circa quietem absolutam est facita, neutiquam ad quietem respectivam extendi potest. Si enim corpus, cujus respectu corpusculum adhuc quieverat, subito concutiatur, hoc non amplius ejus respectu in quiete permanebit. Finge globum super tabula jacentem in navi uniformiter progrediente, qui respectu navis utique in quiete perseverabit; irruente autem navi in scopulum haec quies respectiva subito cessabit, globusque respectu navis motum concipiet, etiamsi ipse nullam causam externam fuerit passus. Necessario ergo haec lex ad quietem absolutam adstringitur, et cum lex sit necessaria, etiam relatio corporum ad locum quempiam, quem occupent, est necessaria. Scilicet cum haec lex quietis perseverantiam in eodem loco innuat, id aliter nisi de loco absoluto interpretari non licet, locus autem absolutus per ordinem inter coëxistentia definiri nequit, quia alioquin nostra lex ad quietem respectivam extenderetur.

AXIOMA. 3.

85. Corpus, quod absolute movetur, si nulli externae actioni subjiciatur, secundum eandem directionem motu aequabili progredi perget.

EXPLICATIO. 1.

86. Hoc axioma quoque de particulis corporum minimis, quasi punctis, proprie est intelligendum, neque enim de corporibus magnitudine praeditis valet, nisi omnes particulae pari celeritate secundum eandem directionem moveantur: si enim initio vel inaequales celeritates vel secundum diversas directiones accepissent, singulae particulae ne motum hunc quidem conservare possent, quin a se invicem dissipentur, et corporis compages dissolvatur. Quod autem non est metuendum, si omnium particularum celeritates fuerint aequales, in eandemque directionem tendant, vel si corpus ita fuerit exiguum, ut in eo talis disparitas locum ha-

bere nequeat. Consideretur ergo hujusmodi punctum corporeum, quasi solum existeret, ac si motum quemcunque acceperit, ita ut data celeritate secundum datam directionem moveri inceperit: atque hoc punctum, vi istius axiomatis, perpetuo tam eandem celeritatem, quam eandem directionem conservabit. Quod cum sit pro axiomate receptum, demonstratione non indiget; interim tamen ratio haud difficulter afferri potest. Primo enim in directione nullam patietur mutationem, cum nulla esse possit ratio, cur in unam potius quam omnes alias plagas ab ea deflectat; aeque scilicet certe eandem directionem conservabit, ac punctum quiescens in quiete perseverabit. Quod autem porro ad celeritatem attinet, nisi ea perpetuo eadem maneret, vel augeri vel minui esset dicenda, quorum neutrum sine absurditate dici potest: sive enim augeretur sive minueretur, id secundum certam legem fieri deberet; qualis autem haec futura esset lex, nullo modo concipi posset, cum nulli certe prae reliquis tanta praerogativa conveniret. Deinde si quis forte dicat, celeritatem in ratione temporum diminui; rem nondum definiret, determinare enim insuper deberet, quanta celeritatis pars quovis tempore interiret, in quo quicquid assignaverit, cum nulla ratione fulciatur, nullo modo admitti potest; id quod etiam de quacunque alia lege valebit. Nihil aliud ergo relinquitur, nisi ut statuamus, celeritatem quoque perpetuo eandem manere, perinde ac directionem.

EXPLICATIO. 2.

87. Huic axiomati, aeque ac praecedenti, opinio eorum Philosophorum adversatur, qui statuunt, omnia corpora vi quadam occulta praedita esse, statum suum motus vel quietis continuo mutandi: quae opinio, nulli rationi innixa, funditus eo ipso evertitur, quod axiomati contradicat. Verum hoc axioma primo intuitu experientiae contrarium videri solet, cum in omnibus experimentis observemus, motum pedetentim retardari ac tandem penitus extingui, ita ut ex hoc fonte motus perpetuus negetur, dum vi nostri axiomatis omnis motus perpetuus esse deberet. Verum in his ipsis experimentis causa retardationis manifesto deprehenditur, cum in frictione tum in resistentia aeris aliisque motus obstaculis, quae nequaquam penitus tollere licet. Quas circumstantias si probe perpendamus, ex his ipsis experimentis concludere debemus, si omnia haec obstacula abessent, motum revera perpetuo esse duraturum. Quare cum in axiomate omnia obstacula expresse sint remota, tantum abest, ut haec experimenta ei adversentur, ut potius ejus veritatem sensibili argumento confirment.

ment. Ceterum probe cavendum eſt, ne hoc axioma, ad motum abſolutum adſtrictum, ad motus quoque reſpectivos extendatur.

DEFINITIO. 10.

88. Dum corpus abſolute, vel quieſcit, vel aequabiliter in directum promovetur, *in eodem ſtatu perſeverare* dicitur.

COROLL. 1.

89. Ambo ergo axiomata allata ita enunciari poſſunt, ut corpora, quatenus ab aliis non impediuntur, in eodem ſtatu perſeverent.

COROLL. 2.

90. Si ergo corpus, quod ante quieverat, moveri incipit, vel, quod motum, mutationem ſive in celeritate ſive in directione patitur, id *ſtatum ſuum mutaſſe* eſt cenſendum.

SCHOLION.

91. Permanentia in quiete, ſive in motu aequabili rectilineo, non incongrue *ſtatus* appellatur, quia corpus ad eam ſponte determinatur: quamdiu enim corpus ſibi eſt relictum, neque ulli externae actioni ſubjectum, recte in eodem ſtatu manere dicitur, ſiquidem mutatio ſtatus actionem externam innuere videtur. Manſio ergo in eodem ſtatu maxime differt a manſione in eodem loco, cum qua tum demum convenit, quando corpus quieſcit. Ad hanc ſtatus ideam nos deduxerunt axiomata ante ſtabilita, neque viciſſim idea ſtatus, quae per ſe eſſet arbitraria, ad eorum cognitionem ducere potuiſſet; hinc autem ipſa haec idea fixam ſignificationem eſt adepta.

DEFINITIO. 11.

92. Proprietas illa corporum, quae rationem perſeverationis in eodem ſtatu in ſe continet, *inertia* appellatur: quandoque etiam *vis inertiae*.

COROLL. 1.

93. Inertia ergo vera eſt cauſa, cur corpora in eodem ſtatu perſeverent, cum enim cauſa in ipſo corpore ſit quaerenda, ea ſine dubio pro communi omnium corporum proprietate haberi debet.

COROLL. 2.

94. Quodsi ergo quaeratur, cur corpus absolute quiescens quiescere, vel motum aequabiliter in directum moveri pergat, alia causa, praeter ejus inertiam assignari nequit; neque hujus phaenomeni causam usquam extra corpus quaeri licet.

SCHOLION.

95. Vox *inertiae* proprie ad eam corporum proprietatem indicandam, qua quiescentia in quiete persistunt, est adhibita, propterea quod in hoc statu motui se quasi opponunt: sed quia corpora, in motu constituta, aeque se omni mutationi ratione, tam celeritatis, quam directionis, opponunt, hoc nomen haud inepte ad conservationem status, sive quietis, sive motus, indicandum usurpatur. Vocatur etiam passim *vis inertiae*, quia *vis* est aliquid mutationi status reluctans; sed si vis definitur per causam quamcunque, qua status corporum mutatur, hic in ista significatione neutiquam accipi potest: ejus certe ratio maxime discrepat ab ea, qua deinceps vires agere ostendemus. Quare ne hinc ulla confusio oriatur, nomen *vis* omittamus, et hanc corporum proprietatem simpliciter nomine *inertiae* appellabimus.

EXPLICATIO.

96. Inertia ergo tantum cernitur in statu corporum absoluto, neque ad quietem respectivam aut motum respectivum referri potest. Corpus enim, respectu alterius, motu utcunque inaequabili et in linea curva incedere potest, cum tamen absolute, vel quiescat, vel uniformiter in directum moveatur, ideoque in statu suo perseveret: atque si nobis contigerit, corpus videre, de quo certi fuerimus, id nulli actioni externae esse subjectum, quomodocunque id nobis videbitur inaequaliter motu respectivo ferri, certe tamen pronunciare poterimus, id absolute vel quiescere, vel uniformiter in directum progredi. Quoniam autem quietem vel motum corporum nonnisi respectu aliorum nobis cognoscere licet, sensus nobis statum corporum absolutum minime declarant, unde criterium status absoluti inde petitum, quando corpora nulli actioni externae sunt subjecta, in hac scientia maximi est momenti. Fieri tamen potest, ut hoc axioma etiam in motu respectivo locum habeat, quando scilicet corpus, cujus respectu motus aestimatur, ipsum in statu suo manet, hoc est vel absolute quiescit, vel absolute uniformiter in directum promovetur.

THEOREMA 1.

97. Si corpus, cujus respectu aliorum corporum motum aestimamus, absolute vel quiescit, vel uniformiter in directum promovetur, tum axiomata pro quiete vel motu respectivo aeque valebunt, ac pro absoluto.

DEMONSTRATIO.

Considerentur duo corpora, quorum ambo motu absoluto uniformiter in directum ferantur, alterum describat tempore $= t$ spatium $Aa = at$, alterum vero eodem tempore spatium $Bb = bt$, ita ut illius celeritas sit $= a$, hujus vero $= b$: perinde autem est, sive hae rectae Aa et Bb sint in eodem plano, nec ne. Referatur jam motus corporis B ad corpus A, quod tanquam quiescens in A spectetur, et cum initio corpus B fuerit in B, elapso tempore $= t$ corpus B aestimabitur esse in $\mathfrak{C}$, ducta recta $A\mathfrak{C}$ ipsi ab parallela et aequali. Quare ob $b\mathfrak{C} = Aa = at$; erit $Bb : b\mathfrak{C} = b : a$ seu in ratione constante; et quia angulus $Bb\mathfrak{C}$ est quoque perpetuo idem, triangulum $Bb\mathfrak{C}$ est specie datum, hincque etiam angulus $bB\mathfrak{C}$ constans neque a tempore pendens, pariter ac ratio laterum Bb ad $B\mathfrak{C}$, quae sit ut b ad $\mathfrak{C}$, sicque $B\mathfrak{C} = \mathfrak{C}t$. Ex quibus concluditur, motum respectivum corporis B ita fore comparatum, ut ex B secundum rectam $B\mathfrak{C}$ sit progressum, temporeque t spatium descripserit $B\mathfrak{C} = \mathfrak{C}t$, ideoque celeritatem habeat constantem. Consequenter corpus B, quod absolute uniformiter in directum moveri ponebatur, etiam respectu corporis A uniformiter in directum movebitur, dummodo hoc corpus A etiam absolute uniformiter in directum proferatur. Fig. 9.

COROLL. 1.

98. Si angulus $Bb\mathfrak{C}$ ponatur $= \zeta$, qui ubique est idem, etsi rectae Aa et Bb non sunt in eodem plano, erit $B\mathfrak{C} = t\sqrt{(aa - 2ab\cos\zeta + bb)}$, sicque celeritas respectiva $= \sqrt{(aa - 2ab\cos\zeta + bb)}$ anguli autem $bB\mathfrak{C}$ tangens est $= \frac{a\sin\zeta}{b - a\cos\zeta}$.

COROLL. 2.

99. Si corpus A quiesceret absolute, motus respectivus corporis B non differret a motu ejus absoluto. Unde si in mundo unicum esset

 corpus

corpus absolute quiescens, reliqua corpora ad id referendo, eorum motum absolutum cognoscere liceret.

COROLL. 3.

100. Si in mundo esset corpus uniformiter in directum progrediens, ad quod reliqua corpora referantur, de iis, si nullam actionem externam subirent, affirmare possemus, ea etiam in statu respectivo esse perseveratura.

COROLL. 4.

101. Ob inertiam igitur corpora non solum in eodem statu absolutò, sed etiam in eodem statu respectivo, perseverare conantur, dummodo corpus, cujus respectu eorum status aestimutur, absolute vel quiescat, vel uniformiter in directum promoveatur.

EXPLICATIO 1.

102. Si in universo sol, vel potius ejus centrum, absolute quiesceret, omniaque corpora ratione situs cum eo comparentur, inertia efficiet, ut omnia corpora quae respectu centri solis quiescunt, in quiete, quae autem moventur, in eodem motu aequabili in directum progredi conentur, quoniam hoc casu eorum motus a respectivo non discreparet. At si, ut est verisimile, non centrum solis, sed potius centrum gravitatis commune totius systematis absolute quiescat, ejus respectu haec inertiae proprietas est intelligenda. Verum ad motum respectivum determinandum non sufficit, unicum punctum tanquam fixum considerare, quoniam inde tantum distantias non vero directiones cognoscere liceret, sed tribus vel adeo quatuor punctis fixis adhuc est opus, uti supra ostendimus. In mundo ergo stellae fixae tanquam totidem puncta fixa considerari solent, quae hypothesis si vera esset, omnia corpora in mundo, quae earum respectu vel quiescunt vel moventur, ob inertiam in eodem statu essent perseveratura, Atque hoc perinde eveniret, si omnes stellae fixae celeritatibus aequalibus secundum directiones parallelas per coelos uniformiter in directum feruntur. Verum in ipsis stellis fixis quaedam exiguae inaequalitates animadvertuntur, quarum rationem in hoc judicio haberi oportet, quod ergo pro maxime arduo merito habetur.

SCHO-

SCHOLION.

103. Quodsi ergo ejusmodi corpora, vel potius, ne eorum magnitudo moram facessat, puncta quasi corporea contemplemur, quae nulli actioni externae sint exposita, ea vel perpetuo quiescent, vel continuo uniformiter in directum promovebuntur, idque non solum absolute, sed etiam respective, si modo corpus, ad quod referuntur, ipsum in eodem statu absoluto persistat. Talem igitur motum, cujus ratio in sola inertia est sita, accuratius perpendere, ad calculumque revocare conveniet. Supra autem in genere tres pertractavimus casus, quibus calculus ad motus determinationem accommodabatur. Primus erat, quo motus rectilineus ad directricem, cum ejus directione congruentem, referebatur: secundus, quo motus ad duas directrices reducebatur, qui cum in omni motu in eodem plano facto succedat, etiam ad motum rectilineum uniformem, qualem hic examinamus, adhiberi poterit. Tertius casus latissime patens, quo tribus directricibus sumus usi, etiam hunc, quem tractamus, in se complectitur, operaeque pretium erit dispicere, quomodo formulae illae generales pro motu uniformi rectilineo futurae sint comparatae. Quare secundum hos tres casus motum aequabilem rectilineum ad calculum revocemus, hincque colligere poterimus, quid in omni motu inertiae sit tribuendum. Quatenus enim deinceps motus cujuspiam corporis aliter se habere deprehendetur, ejus causa non in inertia ejus, sed aliter extra corpus erit quaerenda.

PROBLEMA. 6.

104. Si motus rectilineus aequabilis ad unicam directricem cum ejus directione congruentem referatur, eum per calculum determinare, seu ad quodvis tempus ejus locum assignare. Fig. 2.

SOLUTIO.

Corpore, quod movetur, instar puncti considerato, fuerit id initio in A, et elapso tempore t pervenerit in S percurso spatio $AS = s$. Cum igitur celeritas in S sit $= \frac{ds}{dt}$, eaque perpetuo maneat eadem, si ea ponatur $= c$, habebimus $\frac{ds}{dt} = c$, et integrando $s = ct$, quae formula jam supra pro motu aequabili est tradita. Sed ut in genere phaenomena hujus motus, sine respectu ad quantitatem celeritatis habito, evolvamus, suffi-

ſufficit notaſſe $\frac{ds}{dt}$ eſſe quantitatem conſtantem: unde ejus differentiale nihilo erit aequale. Sumto ergo temporis elemento dt pro conſtante, erit $\frac{dds}{dt} = 0$, ideoque etiam ſuppleta homogeneitate $\frac{dds}{dt^2} = 0$.

COROLL. 1.

105. Si igitur in motu rectilineo fuerit $\frac{dds}{dt^2} = 0$, is ſimul erit aequabilis, atque ſi is fuerit abſolutus, vel abſoluto aequipollens, inertiae eſt tribuendum, quod ſit $\frac{dds}{dt^2} = 0$.

COROLL. 2.

106. Sin autem in motu rectilineo non fuerit $\frac{dds}{dt^2} = 0$, id indicio eſt, corpusculum non ſolam inertiam ſequi, ſed valorem ipſius $\frac{dds}{dt^2}$ cauſae cuipiam externae eſſe tribuendum, ſiquidem motus abſolute ſpectetur.

PROBLEMA 7.

107. Si punctum uniformiter in directum moveatur, ejusque motus ad duas directrices in eodem plano ſitas referatur, determinare hujus motus phaenomena, ad calculum revocata.

SOLUTIO.

Fig. 3. Sit ergo ſpatium a puncto deſcriptum EF linea recta, in eodem cum directricibus OA et OB plano ſita, atque elapſo tempore t verſetur mobile in S, unde directricibus parallelae agantur SY et SX, ſitque $OX = x$ et $XS = y$. Quia nunc linea ESF eſt recta, erit $\frac{dy}{dx}$ quantitas conſtans: deinde labente tempuſculo dt perveniat mobile in s, poſitisque $Xx = Sp = dx$ et $ps = dy$ item angulo $AOB = \zeta$, erit $Ss = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\zeta)}$ et celeritas in $S = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\zeta)}}{dt}$.

Cum autem ſit $\frac{dy}{dx}$ quantitas conſtans, poſito $dy = \alpha dx$, erit celeritas

tas $= \frac{dx}{dt}\sqrt{(1+aa+2a\cos\zeta)}$, quae etiam per hypothesin est constans. Quocirca tam $\frac{dx}{dt}$ quam $\frac{dy}{dt}$ erunt quantitates constantes, ideoque earum differentialia evanescent, hinc si motus sit rectilineus et aequabilis, sumto elemento dt constante, erit tam $\frac{ddx}{dt^2}=0$, quam $\frac{ddy}{dt^2}=0$, ac vicissim si hae formulae evanescant, erunt $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ quantitates constantes, ideoque etiam $\frac{dy}{dx}$, unde motus erit rectilineus et aequabilis.

COROLL. 1.

108. Si ergo punctum nullam actionem externam patiatur, motumque suum per solam inertiam prosequatur, certe erit tam $\frac{ddx}{dt^2}=0$, quam $\frac{ddy}{dt^2}=0$, quippe quibus conditionibus motus rectilineus et aequabilis indicatur.

COROLL. 2.

109. Quare si motus rectilineus aequabilis secundum directiones binarum directricium OA et OB resolvatur, utriusque motus celeritas erit constans: ac si vicissim uterque hic motus lateralis fuerit aequabilis, etiam motus verus non solum aequabilis, sed etiam rectilineus erit.

COROLL. 3.

110. Contra igitur, si in quopiam motu, ad directrices OA et OB relato, vel non fuerit $\frac{ddx}{dt^2}=0$, vel non $\frac{ddy}{dt^2}=0$, vel etiam neutrum, hoc indicio est, corpus non soli inertiae esse relictum, sed ab aliqua actione externa affici.

SCHOLION.

111. Quamdiu ergo corpus soli inertiae obediens uniformiter in directum movetur, sive absolute sive respectu corporis, quod ipsum in eodem statu absoluto perseverat; quomodocunque ejus motus secundum

F duas

duas directrices resolvatur, id quod utique infinitis modis fieri potest, semper uterque motus lateralis erit uniformis, hoc est talis, quem corpus vi inertiae prosequeretur. Atque haec est insignis proprietas hujus resolutionis, quod axiomata ad motum verum adstricta etiam in his motibus lateralibus, etsi fictis tantum, locum habeant, ex quo in calculum eximia commoda redundabunt. Majoris vero adhuc momenti haec resolutio agnoscetur, quando infra ostendemus, ab actione virium hos motus ex resolutione natos et ideales tantum perinde affici, ac si motus essent veri. Verum idem quoque in genere est tenendum de resolutione secundum ternas directiones, uti ex sequente problemate patebit.

PROBLEMA 8.

112. Si punctum uniformiter in directum moveatur, ejusque motus ad ternas directrices quascunque referatur, determinare hujus motus phaenomena ad calculum revocata.

SOLUTIO.

Fig. 4. Constitutis tribus directricibus OA, OB, OC, sit ESF linea recta a puncto motu uniformi percursa, elapsoque tempore t versetur in S, pro quo directricibus parallelae sint coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$, sive sint inter se normales sive obliquae. Quoniam ESF est linea recta, ejus etiam projectio TY in plano AOB erit linea recta, unde $\frac{dy}{dx}$ est quantitas constans. Simili modo, quia projectio in plano AOC est recta, erit quoque $\frac{dz}{dx}$ quantitas constans, itemque $\frac{dz}{dy}$. Ponatur nunc spatiolum tempusculo dt descriptum $Ss = ds$, erunt etiam $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$, $\frac{ds}{dz}$, quantitates constantes, quae conditiones inde sequuntur, quod linea ESF est recta. Ob motus porro aequabilitatem celeritas $\frac{ds}{dt}$ est constans, sicque constantes erunt istae quantitates $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, quibus tam aequabilitas motus, quam rectitudo spatii continetur. Sumtis ergo differentialibus, posito elemento dt constante, sequentes formulas nihilo aequales esse oportet;

$\frac{ddx}{dt^2}$

$$\frac{ddx}{dt^2} = 0, \quad \frac{ddy}{dt^2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{dt^2} = 0;$$

quibus adeo natura motus uniformis rectilinei determinatur.

COROLL. 1.

113. Quando ergo punctum nulli actioni externae subjicitur, ejusque motus absolutus ad tres directrices quascunque refertur, certe hae tres aequationes locum habebunt: $\frac{ddx}{dt^2} = 0$; $\frac{ddy}{dt^2} = 0$; et $\frac{ddz}{dt^2} = 0$, quarum ratio in inertia corpusculi est collocanda.

COROLL. 2.

114. Quare si motus fuerit rectilineus et aequabilis, quomodocunque is secundum ternas directiones fixas resolvatur, terni motus laterales etiam erunt aequabiles, cum sint $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ quantitates constantes.

COROLL. 3.

115. In motu ergo absoluto motus laterales, in quos secundum ternas directiones fixas resolvitur, etiamsi sint ficti, tamen legem inertiae sequuntur, ita ut hoc capite tanquam veri motus spectari possint.

SCHOLION.

116. Haec igitur sunt principia motus interna, quae ea proprietate communi innituntur, quae *inertiae* nomine appellari solet. Atque ex his principiis motum punctorum corporeorum, quando nulli actioni externae subjiciuntur, determinare valemus. Omnia nempe huc redeunt, ut si tale corpusculum quiescat absolute, id perpetuo in quiete sit perseveraturum, sin autem motum acceperit absolutum quemcunque, id perpetuo eadem celeritate in directum sit progressurum. Hic quidem corpora mota tanquam infinite parva sum contemplatus, sed tamen ea, quae sunt stabilita, ad corpora cujusvis magnitudinis accommodare licet. Verum antequam eo progrediamur, necesse est, quid vires externae efficere valeant, expendere, quam ergo investigationem etiam pro punctis seu particulis corporum minimis suscipiamus.

CAPUT III.

DE CAUSIS MOTUS EXTERNIS SEU VIRIBUS.

DEFINITIO. 12.

117. Quicquid statum corporum absolutum mutare valet, id *vis* vocatur: quae ergo, cum corpus ob caussas internas in statu suo esset permansurum, pro caussa externa est habenda.

COROLL. 1.

118. Caussa ergo, qua vel corpus absolute quiescens ad motum incitatur, vel in corpore absoluto motu lato ejus celeritas sive directio mutatur, vis appellatur.

COROLL. 2.

119. Est ergo vis caussa externa, statum absolutum corporum mutare valens; et quamdiu talis caussa externa non accedit, corpus in eodem statu absoluto sive quietis sive motus aequabilis in directum perseverat.

EXPLICATIO.

120. In corpore ipso nihil est, quod suum statum mutare conetur; ob hoc enim ipsum dicimus, corpus in eodem statu manere, quamdiu proprium quasi instinctum sequitur, neque ullam actionem externam subit. Quando ergo evenit, ut status absolutus cujuspiam corporis mutetur, caussa certe non in ipso corpore quaeri potest, alioquin enim nulla status mutatio contingeret, siquidem statum ita definivimus, ut corpus in eodem statu perseverare dicatur, quamdiu a nullis caussis externis sollicitatur. Caussa autem illa interna, ob quam corpus in eodem statu perseverat, est ejus inertia, in qua cum ratio omnium, quae in ipso corpore ad quietem sive motum spectant, contineatur, ea non solum penitus tolleretur, sed etiam ne stabiliri quidem potuisset; si quicquam in ipso corpore inesset, quod ad statum ejus mutandum tenderet. Quare si vocabulum *vis* ad eas caussas adstringamus, quae statum corporum absolutum mutare valeant, nulli certe corpori vis tribui potest, suum statum mutandi, sed quoties status cujus-

cujuspiam corporis mutatur, causa mutationis seu vis semper extra id existat necesse est.

SCHOLION. 1.

121. Hic ergo quaestio oritur, *unde vires, quibus corporum statum perpetuo mutari observamus, nascantur? an, cum non in corporibus sint sitae, substantiis immaterialibus erunt tribuendae?* Aliter quidem Philosophi argumentari solent; cum enim status corporum continuo mutetur, concludunt mutationis hujus causam in ipsis corporibus contineri, hincque porro inferunt, singula corpora vi esse praedita statum suum jugiter mutandi, sicque principium inertiae funditus evertunt. Verum in hoc ratiocinio insignem saltum committunt; priorem enim partem, quod causa mutationis status in corporibus sit sita, concedentes, alteram partem omnino negamus, quod singula corpora vi sint praedita suum statum mutandi. Causam scilicet mutationis status tantum ab eo corpore removemus, cujus status mutatur, eamque in aliis corporibus quaerendam esse affirmamus; atque adeo corporibus vim tribuimus aliorum statum mutandi, non suum. Quod tantum abest, ut absurdum videri debeat, ut potius ex hoc ipso, quod singula corpora facultate sint praedita in suo statu perseverandi, sequatur, in corporibus vim inesse debere aliorum statum mutandi. In congerie enim plurium corporum, nisi vel omnia quiescant, vel aequalibus celeritatibus secundum eandem directionem ferantur, necessario evenit, ut singula in statu suo salvo reliquorum statu permanere nequeant. Concipiamus enim duo corpora A et B, quorum illud ad hoc pervenerit, fieri certe nequit, ut corpus A motum suum continuet, quin simul corpus B de statu suo quietis deturbetur; neque ut corpus B in quiete persistat, quin simul corporis A motus sistatur. Quare cum ambo simul statum suum conservare nequeant, necesse est, ut vel utriusque vel saltem alterutrius status mutetur, idque ob hoc ipsum, quod utrumque in statu suo perseverare conatur. Consequenter ipsa singulorum corporum facultas in statu suo perseverandi vires suppeditat, quibus aliorum status immutari possit.

SCHOLION. 2.

122. Verum si porro quaeramus, cur ambo illa corpora A et B simul quodque in suo statu perseverare non possint: eam in impenetrabilitate manifesto sitam esse deprehendimus. Nam si illa corpora se invicem penetrare possent, ita ut alterum alteri liberrimum transitum per suum

 quasi

quasi substantiam permitteret, nihil certe obstaret, quo minus corpus A motum suum prosequeretur, corpusque B in quiete persisteret, sicque utrumque inertiae obtemperaret. Causa ergo virium illarum, quibus status corporum mutatur, non in sola inertia, sed inertia cum impenetrabilitate conjuncta est constituenda. Quoniam vero impenetrabilitas nonnisi de corporibus praedicari potest, corpora autem necessario inertia sunt praedita, impenetrabilitas per se inertiam involvit, ita ut impenetrabilitas sola recte pro fonte omnium illarum virium, quibus status corporum mutatur, habeatur. Hanc igitur corporum proprietatem, tanquam originem omnium virium, accuratius perpendere conveniet.

DEFINITIO. 13.

123. *Impenetrabilitas* est ea corporum proprietas, qua duo plurave corpora in eodem loco inesse nequeunt, atque adeo ad minima corporum elementa extenditur, ita ut ne duo quidem elementa in eodem loco existere possint.

COROLL. 1.

124. Per hanc ergo proprietatem omnia corpora extra se invicem existant necesse est, cum ne minimis quidem partibus in se invicem penetrare possint.

COROLL. 2.

125. Cum impenetrabilitas sit proprietas corporum necessaria, nulla vis prorsus datur, quae valeat duo corpora in eundem locum compingere, atque maxima vis tali effectui producendo aeque est impar ac minima.

COROLL. 3.

126. Quomodocunque ergo status corporum a viribus mutentur, tamen nunquam evenire potest, ut ab iis duo elementa seu puncta corporea in eundem locum compingantur.

EXPLICATIO. 1.

127. Perperam contra hanc generalem corporum proprietatem adducuntur quaedam experimenta, quibus corpora se invicem penetrare videntur et dicuntur. Dicitur scilicet globus explosus in argillam penetrare, sed hic ista vox *penetrare* alio sensu accipitur: nulla enim pars globi in ejus-

ejusmodi locum pertingit, ubi revera pars argillae existat; sed quia jam globus locum occupat, ante ab argilla occupatum, vox penetrationis adhibetur. Hic autem tantum negamus, corpus locum quempiam occupare posse, qui simul ab alio occupetur, non qui ante ab alio fuerit occupatus. Simili modo, quando aqua spongiam penetrare dicitur, aqua tantum interstitia seu poros spongiae replet, qui cum ante a substantia spongiae non distinguerentur, ipsa spongia penetrata videtur, sed re accuratius examinata deprehendimus, nusquam vel minimam spongiae particulam existere, ubi simul aequae particula existat. Eodem modo res se habet in corporibus, quae se in minus spatium comprimi patiuntur, nunquam enim duae particulae in eundem locum rediguntur, sed intervalla inter particulas coarctantur, ea materia adeo, qua ante implebantur, inde expulsa. His igitur probe perpensis nullum dubium relinquitur, quin corpora sint impenetrabilia, seu, quin omnino fieri nequeat, ut duo corpora simul in eodem loco existant.

EXPLICATIO 2.

128. Idea igitur impenetrabilitatis nititur idea *loci*, sine qua omnino consistere nequit. Si enim locus nihil esset a corporibus diversum, quid esset impenetrabilitas, nullo modo intelligi posset. Dicunt quidem Philosophi, qui loci realitatem negant, corpora necessario extra se existere; sed quid sit *extra* vel *intra*, si locus sine corporibus nihil sit, minime definiunt. Quae supra de quiete et motu absoluto sunt exposita, abunde evincunt, locum non esse merum mentis conceptum, et nunc ex impenetrabilitate luculenter perspicimus, ideam loci plus in se complecti; quam solam corporum relationem mutuam, ita ut sublatis corporibus etiam *loco* nullus locus relinqueretur. Est ergo locus aliquid a corporibus non pendens, neque merus mentis conceptus; quid autem extra mentem realitatis habeat, definire non ausim, etiamsi in eo aliquam realitatem agnoscere debeamus. Quando autem Philosophi omnes realitates in certas classes distribuunt, atque perhibent, ad nullam earum locum referri posse; malim credere, has classes ab iis perperam esse constitutas, cum res eo referendas non satis cognovissent. Simili modo ratio *temporis* est comparata, in quo nihil reale inesse autumant, cum tamen vocibus *ante* et *post* haud parum realitatis tribuant. Quemadmodum ergo vera idea loci et spatii plus in se continet, quam ordinem coexistentium, ita quoque vera idea temporis plus in se continet quam ordinem successivorum; quamvis concesserim, primas harum rerum ideas nobis inde esse natas.

SCHO-

SCHOLION. 1.

129. Stabilita impenetrabilitatis notione, non equidem dubitaverim, in ea essentiam corporum collocare: temerarium hoc videbitur, cum omnes fere Philosophi unanimiter clament, essentiam corporum nobis penitus esse ignotam. Hoc certe de corporum speciebus facile concedo, neque puto, auri vel argenti essentiam nobis esse cognitam. In quacunque enim re quis auri essentiam constituerit, incertum est, an ea auro in omni statu conveniat; et annon aliud corpus, quod non sit aurum, eadem sit praeditum, atque haec ipsa incertitudo assertum illud destruit; sed quando de corpore in genere quaestio est, talem objectionem non pertimesco; qui enim negare voluerit, essentiam corporum in impenetrabilitate sitam esse, is negare vel saltem dubitare debet, aut omnia corpora esse impenetrabilia, aut vicissim, quicquid sit impenetrabile, id esse corpus. Quae enim proprietas omnibus ac solis corporibus convenit, quin in ea corporum essentia sit constituenda, nemo Philosophorum dubitat. Primo autem omnia corpora esse impenetrabilia certissimum est, si enim darentur res extensae atque etiam inertia praeditae, quae scilicet sibi relictae vel quiescerent, vel uniformiter in directum moverentur, tamen si impenetrabilitate carerent, nemo eas inter corpora esset relaturus, hinc est, quod umbrae et spectra per machinas opticas repraesentata non pro corporibus habeantur. Deinde quicquid impenetrabile est, id quoque extensum et inertia praeditum sit necesse est; sine extensione enim impenetrabilitas concipi nequit, tum vero non mobile esse non potest, posita autem mobilitate inertia ponitur. Quare, quicquid est impenetrabile, nulla certe foret causa, cur id non pro corpore habeatur.

SCHOLION.

130. Verum gravior contra hanc sententiam objectio moveri potest, inde petita, quod impenetrabilitatem per se nobis percipere non liceat, quippe cujus notio necessario plura corpora in se involvit. Atque hinc facile concedo, definitionem, qua corpus diceretur substantia impenetrabilis, regulis Philosophandi non esse conformem, non quod essentia male in impenetrabilitate ponatur, sed quia haec definitio sine antecedente notione corporis intelligi nequit. Si enim quaeratur, quid sit substantia impenetrabilis? ac respondeatur, quae a corporibus, hoc est, aliis substantiis impenetrabilibus penetrari nequeat, negotium minime conficitur. Sed quamvis hanc proprietatem nonnisi ex compara-

paratione corporum mutua cognoscamus, tamen dubium est nullum, quin ratio impenetrabilitatis in proprietate quadam interna cujusque corporis sit sita, ita ut omnia corpora certa proprietate quadam sint praedita, qua efficiatur, ut inter se fiant impenetrabilia. Haec fortasse proprietas non inepte *soliditas* vocabitur, qua quasi materialitas constituatur, quae proinde recte pro essentia corporum habebitur. Fateor equidem, rem fere eo redire, ac si dicerem, essentiam corporum in *corporietate* consistere. Attamen impenetrabilitas nos ad originem virium manudicit, sicque a nudo sono egregie distinguitur; id quod uberius exponi meretur.

THEOREMA. 2.

131. Si duo corpora ita coeunt, ut neutrum statum suum conservare possit, quin per alterum penetret, tunc in se mutuo agunt, viresque exerunt, quibus eorum status mutetur.

DEMONSTRATIO.

Cum corpora in ejusmodi statu ponantur, ut in eo perseverare nequeant, nisi se mutuo penetrent; quoniam penetratio nullo modo fieri potest, necesse est, ut in eorum statu mutatio eveniat. Quia autem corporum status sine viribus externis mutari nequit, et in casu posito mutatio status actu producitur, vires sine dubio adesse debent, quibus hic effectus est tribuendus. Quaeritur ergo, unde hae vires oriantur? utrum ex ipsa corporum impenetrabilitate, an aliunde? si dicas, eas aliunde oriri, origo mente saltem tolli posset, salva impenetrabilitate ideoque nulla mutatio status contingeret, corporaque proinde se mutuo penetrarent, quod cum sit absurdum, necesse est, istas vires ab ipsa impenetrabilitate suppeditari. Statim scilicet atque corpora in statu suo perseverare nequeunt, quin se mutuo penetrent, ipsa impenetrabilitas vires suppeditat, quibus eorum status mutetur, ut penetratio evitetur; et dum hae vires effectum suum exerunt, corpora in se invicem agere dicuntur, alterumque alterius statum mutabit.

COROLL. 1.

132. Corpora igitur in se invicem agunt, quando ita congrediuntur, ut singula in statu suo perseverare nequeant, quin se mutuo penetrent; unde distincta notio actionis corporum, quae apud plerosque auctores nimis obscura esse solet, est haurienda.

COROLL. 2.

133. Vires, quibus hoc casu status corporum mutatur, ab eorum impenetrabilitate nascuntur, tantumque effectum producunt, ut penetratio impediatur, semperque hae vires tantae erunt, ut huic fini sufficiant.

COROLL. 3.

134. Magnitudo ergo harum virium non ex impenetrabilitate, quippe quae nullius quantitatis est capax, determinatur, sed ex mutatione status, quae effici debet, ne corpora se mutuo penetrent.

COROLL. 4.

135. Hae ergo vires, ex impenetrabilitate ortae, eatenus tantum se exerunt, quatenus penetrationi est occurrendum, et quantumvis magnis ad hoc viribus opus fuerit, eas impenetrabilitas semper suppeditabit, quandoquidem penetratio nullatenus contingere potest.

EXPLICATIO. 1.

136. Quando quodpiam corpus ab aliis impeditur, quo minus vel si quiescat, in quiete permaneat, vel si moveatur, uniformiter in directum progrediatur; tam ejus ipsius, quam illorum impenetrabilitas vires ad mutationem necessarias gignit, nam si vel illud vel haec essent penetrabilia, nullis opus esset viribus, ita ut hae vires non ex impenetrabilitate unius tantum corporis, sed duorum pluriumve conjunctim nascantur. Impenetrabilitas certe sine resistentia invincibili concipi nequit, ideoque jure pro fonte illarum virium, quibus penetratio avertitur, habetur. Quae ergo hactenus sunt tradita huc redeunt, ut corpora ob inertiam insitam in statu suo quietis vel motus aequabilis rectilinei tamdiu perseverent, quamdiu nulla penetratio est metuenda, simul ac vero statum suum continuare nequeunt, quin penetratio fieret, impenetrabilitas tantas suppeditat vires, quae ejusmodi mutationem in eorum statu producant, ut omnis penetratio avertatur. Quare cum mundus sit plenus corporibus, quorum status ita est diversus, ut si in eo quaeque vel per minimum temporis spatium manerent, ubique penetrationes essent secuturae, hinc uberrimus fons virium ad statum corporum continuo mutandum oritur. Quamquam ergo infinitam quasi copiam virium in mundo concedimus, easque adeo a corporibus oriri statuimus, ab eorum tamen opinione maxime abhorremus, qui corporibus conatum statum suum continuo mutandi tribuunt, cum

istae vires non directe ad statum mutandam, sed ad penetrationem avertendam tendant, quae nisi periclitaretur, nullae ejusmodi vires in mundo existerent.

EXPLICATIO. 2.

137. Iam quaestio hic oritur, num omnes plane vires, quarum effectus in mundo miramur, ex hoc fonte oriantur? hoc est, an status corporum a nullis aliis viribus praeter has, quas periculum penetrationis suppeditat, mutari possit? Ac primo quidem ad Mechanicam non pertinet definire, utrum spiritus in corpora agere eorumque statum mutare valeant? interim in corporibus nihil plane invenimus, quod actioni spirituali adversetur; atque actio in corpora non tam arduum opus videtur ut soli omnipotentiae divini Numinis sit tribuendum, cum adeo vilissimis corporibus sit concedendum. Quin potius fateri debemus, nullum nos perspicere rationem, cur animis potentiam in corpora agendi denegemus, etiamsi modum, quo agant, minime assignare possimus. Verum an corpora alio insuper modo in se mutuo agere valeant, praeter eum, quem declaravimus? id quidem negandum videtur. Si enim agerent, etiamsi nullum periculum penetrationis adesset, *in distans* agerent, neque pateret, quomodo conservatio status inde turbari posset; deinde vero, quia illa actio non ab impenetrabilitate proficisceretur, perinde agere deberent, quamvis corpora essent penetrabilia, quomodo autem actio subsistere posset, non liquet. Ex quo maxime verisimile videtur, corpora in se mutuo alias vires non exercere, nisi quibus penetratio avertatur, et cum hae vires minores esse nequeant, quam hic scopus exigit, ita etiam majores statui non possunt, quam sufficientes. Ceterum hic nihil certi statuere licet, sed contentos nos esse oportet, foecundum fontem virium in mundo operantium detexisse, ex quo simul actio corporum mutua, a plerisque Philosophis vel negata vel crassissimis tenebris involuta, satis luculenter perspiciatur. Quantae autem quovis casu sint istae vires ab impenetrabilitate corporum profectae, et quomodo iis status corporum immutetur, definiri nequit, nisi ante in genere in actionem virium inquisiverimus.

SCHOLION.

138. Perspecta ergo virium origine, recte assumere possumus, dari in mundo vires, quibus eorum status mutetur. Ac de hujusmodi quidem viribus, quatenus in corpora agentes se mutuo in aequilibrio tenent,

 nent,

nent, in Statica vel Dynamica tractari solet, ubi earum mensura, qua aliae aliis non solum sunt vel majores vel minores, sed etiam datam inter se rationem habere docentur. Referendae scilicet sunt vires ad genus quantitatum, cum ratione quantitatis inter se comparari possint: atque ex Statica intelligimus, quando duo vires inter se aequales, vel secundum datam rationem inaequales sint censendae. Quo igitur facilius earum effectum in statu corporum mutando exploremus, non solum a corpusculis infinite parvis, in quae agant, exordiri conveniet, quandoquidem hinc etiam tota motus tractatio est ducta: sed etiam actionem tantum momentaneam virium scrutabimur, ita ut quantum singulis temporis elementis efficiant, simus investigaturi, quoniam fieri posset, ut successu temporis quantitas virium mutaretur. At cum principia hinc pro corpusculis infinite parvis et pro temporis intervallo infinite parvo fuerint stabilita, haud difficile erit per integrationes ad motus corporum per finitum tempus mutatos progredi.

DEFINITIO. 14.

139. *Effectus alicujus vis, in dato corpusculo dato tempusculo productus*, vocatur id spatiolum, per quod vel corpusculum quiescens transfertur, vel si moveatur, ultra id spatium, quod ob inertiam esset percursurum, propellitur.

COROLL. 1.

140. Haec ergo effectus determinatio non est absoluta, sed ad certum corpus certumque tempus adstricta, quorum utrumque ut infinite parvum spectatur, ut hoc modo omnis variabilitas aliunde accessura tollatur.

COROLL. 2.

141. Si igitur posito corpusculo et tempusculo spatiolum fuerit idem, effectus quoque erit idem, unde et vis pro eadem est habenda, hocque sive corpusculum quiescat, sive jam moveatur.

COROLL. 3.

142. Scilicet si corpusculum movetur, vis eatenus tantum aestimatur, quatenus per certum spatiolum ultra id, quod motu jam insito percursurum esset, popellitur, vicissim enim ex quantitate hujus spatioli vis aestimabitur.

EXPLI-

EXPLICATIO.

143. Cum in Statica, unde virium menſuram haurimus, corpora, quibus applicantur, in quiete conſiderentur, nihil inde circa earum menſuram, quando in corpora mota agunt, definitur, ita ut iſta menſura in Mechanica nobis integra relinquatur. Concipiamus ergo Fig. 10. primo punctum ſeu corpusculum in S quieſcens, quod a vi quadam $= p$ ſollicitetur in directione $S\sigma$, atque effectus in hoc conſiſtet, ut id dato tempusculo dt per certum quodpiam ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ profeſatur, quod quomodo pendeat tam a vi p quam a tempusculo dt, deinceps definiemus. Hic tantum obſervo, ſi idem corpusculum habeat Fig. 11. motum, quo tempusculo dt deſcripturum eſſet ſpatium $Ss = ds$, illud tum ab aequali vi $= p$ ſollicitari eſſe cenſendum, quando eodem tempusculo dt ultra s per aequale ſpatiolum $s\sigma = d\omega$ profertur, ſiquidem vis p ſecundum ipſam motus directionem Ss urgeat. Sin autem vis in plagam contrariam urgeret, ab eaque corpusculum eo- Fig. 12. dem tempusculo dt per aequale ſpatiolum $s\sigma = d\omega$ repelleretur, tum vis illi $= p$ aequalis eſſet cenſenda. Generatim autem, ſi corpus- Fig. 13. culum habens motum, quo tempusculo dt percurſum eſſet ſpatium $Ss = ds$, ſollicitetur a vi quadam ſecundum directionem SV, hac efficietur, ut elapſo tempusculo dt corpusculum non in s ſed in σ reperiatur, ita ut quaſi ex s in σ per ſpatiolum $s\sigma$ directioni vis SV parallelum translatum concipi queat, etiam ſi revera ob actionem continuam ex S in σ per viam aequabilem pervenerit, ac tum demum iſta vis SV illi p, quae idem corpusculum quietum ſollicitabat, aequalis eſt cenſenda, cum hoc ſpatiolum $s\sigma$ aequale fuerit illi $S\sigma$ (fig. 10.)

EXPLICATIO. 2.

144. Pro viribus ergo, quibus corpora jam mota ſollicitantur, hanc dimetiendi rationem ſtabilimus, ut eas aequales judicemus iis, quae in iisdem corporibus quieſcentibus eodem tempore eundem effectum eſſent praeſtaturae. Haec autem ratio non indiget probatione, quia definitioni innititur, nobisque adhuc liberum fuerat, eam conſtituere. Si enim pro motu quocunque ſpatiola $s\sigma$ (figg. 11, 12, 13.) aequalia fuerint ſpatiolo $S\sigma$, per quod idem corpusculum quieſcens tempusculo eodem profertur a vi p; huic etiam illas vires aequales appellamus, quam libertatem rationi conſentaneam eo minus nobis quisquam adimere poteſt, cum haec appellatio quoque cum communi loquendi more conveniat. Neque enim ſtatuo, eaſdem impulſiones

quas in mundo obſervamus, pares effectus in eodem corpore ſive moto ſive quieſcente producere, atque omnino, concedo, a flumine idem corpus, ſive moveatur ſive quieſcat, longe aliter impelli. Verum hoc ipſum exemplum noſtram menſurae rationem egregie confirmat: dum enim affirmamus, idem corpus a flumine aliter impelli, prout vel quieverit, vel fuerit motum, vires inaequales agnoſcimus, ac pro corpore moto vim praeciſe tantam aeſtimamus, quanta in corpore quieſcente eundem effectum eſſet productura. Hinc etiam, quando de corporibus in flumine motis agitur, pro quovis celeritatis gradu vis, quam flumen actu in corpore exerit, ſollicite determinatur, ac ſemper tanta ſtatuitur, quanta in eodem corpore, ſi quieſceret, eundem effectum produceret. Quare diviſio virium in abſolutas et relativas in ſuperioribus libris facta, proprie huc non pertinet, cum quovis caſu et pro quovis momento ea vis in calculum introduci debeat, quae corpus motum aeque, ac ſi quieſceret, impellit. In contemplatione autem virium ipſarum plurimum intereſt noſſe, utrum corpora mota aeque afficiant, ac quieſcentia, nec ne?

SCHOLION.

145. Quod ergo ad quantitatem virium corpuscula mota ſollicitantium attinet, eam ex effectu ſeu ſpatiolo in definitione deſcripto *ita*
Fig. 10. petimus, quaſi corpuſculum quieſceret. Scilicet ſi corpuſculum in S quieſcens a vi $= p$ tempuſculo $= dt$ per ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ protru-
Fig. 11. datur, idem corpuſculum motum: quo tempuſculo dt percurſurum eſ-
12. 13. ſet ſpatium $Ss = ds$, tum ab aequali vi p urgeri cenſebitur, ſi ultra hoc ſpatium Ss inſuper per aequale ſpatiolum $s\sigma = d\omega$ ſecundum directionem vis proferatur, ita ut hic motus corpuſculi nihil omnino in effectu vis mutet. Sin autem in figg. 11, 12, 13, ſpatiolum $s\sigma$ majus fuerit vel minus, quam ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ (fig. 10), intelligemus, corpuſculum quoque a vi majore vel minore impelli. Quare ſi potuerimus effectus quarumcunque virium in corpuſculis quieſcentibus determinare, omnium quoque virium effectus in corpuſculis motis aſſignare poterimus, dummodo quovis caſu vires, quibus corpuſcula mota ſollicitantur, rite definiantur. Ubi quidem hoc perpetuo eſt tenendum, corpuſculum aliquod motum a vi $= p$ ſollicitari eſſe cenſendum, quando effectus in eo productus aequalis eſt illi, quem vis $= p$ in eodem corpuſculo quieſcente eodem tempore eſſet productura. Videamus ergo, quomodo in corpuſculo quieſcente ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ ſe ſit habiturum, ſi ab aliis atque aliis viribus, quarum menſura Statica docet, ſollicitetur.

THEO-

THEOREMA. 2.

146. Spatiola, per quae idem corpusculum quiescens eodem tempusculo dt a diversis viribus promovetur, sunt ipsis viribus proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Ponamus corpusculum a vi $= p$ tempusculo $= dt$ per spatiolum $= d\omega$ protrahi; ac si simul alia vis aequalis p secundum eandem directionem idem corpusculum sollicitaret, ab ea quoque per aequale spatiolum $= d\omega$ protraheretur, quoniam hic effectus a priori, unde motus tantum infinite parvus efficitur non turbabitur. Quare hoc copusculum a vi $= 2p$ sollicitatum tempusculo $= dt$ per spatiolum $= 2d\omega$ protrahetur. Simili modo si quotcunque vires aequales ipsi p, quarum numerus $= n$, simul secundum eandem directionem in idem corpusculum quiescens agant per tempusculum dt, id propellent per spatiolum $= nd\omega$, qui ergo est effectus vis $= np$.

COROLL. 1.

147. Si ergo duo fuerint corpuscula aequalia quiescentia, quorum alterum a vi $= p$, alterum a vi $= P$ urgetur, atque tempusculo $= dt$ illud promoveatur per spatiolum $= d\omega$, hoc vero per spatiolum $= d\Omega$, erit $d\omega : d\Omega = p : P$.

COROLL. 2.

148. Sunt igitur hi effectus, eodem tempusculo producti, ipsis viribus sollicitantibus proportionales, ubi quidem eadem virium mensura usurpatur, quae in Statica docetur.

SCHOLION. 1.

149. Fundamentum hujus demonstrationis in hoc consistit, quod vires tantum per infinite parvum tempusculum agere assumo, ita ut in corpusculo motus tantum infinite parvus gignatur, qui pro nullo haberi possit. Cum enim evenire queat, ut impulsio, quae in corpusculum quiescens vim $= p$ exerit, eadem in corpusculum motum aliam vim exerat, haec exceptio in nostro Theoremate locum non habet. Etiamsi enim plures vires, ipsi p aequales, quasi successive in corpusculum agere

agere concipiamus, singulae in eo eundem effectum producent, ac si quiesceret; neque motus infinite parvus in earum actione quicquam mutabit. Verumtamen hinc omnis successio, quae tantum mente est admissa, removeri debet, ut tota vis tantum per tempusculum dt agere sit censenda.

SCHOLION. 2.

150. Si quaeratur, cur vis determinata p in corpusculo dato per datum tempusculum dt determinatum effectum $d\omega$ producat? ratio in eo est posita, quod in corpusculo certa quaedam facultas in quiete perseverandi insit, quae est ipsa ejus inertia. Talis autem facultas in quiete perseverandi concipi non potest, sine quadam reluctantia, qua motus productioni adversetur, quae quo fuerit major ve minor, eo difficilius vel facilius actioni vis obsequetur. Quare cum haec facultas cum inertia conveniat, intelligitur, inertiam inter quantitates esse referendam, ita ut diversorum corpusculorum inertia ratione quantitatis diversa esse queat. Quam diversitatem cum hactenus nondum spectaverimus, effectus virium in eodem vel aequalibus corpusculis, quae scilicet aequali inertia sint praedita, sumus scrutati. Nunc igitur ad corpuscula diversa progressuri, ad mensuram inertiae deducemur, atque intelligemus, quomodo inertia in aliis major, in aliis minor inesse possit.

THEOREMA. 3.

151. Si aequales vires corpuscula inaequalia quiescentia sollicitent, effectus eodem tempusculo producti erunt reciproce inertiae corpusculorum proportionales.

DEMONSTRATIO.

Fig. 14. Concipiamus corpusculum A, quod quiescens a vi $= p$ tempusculo dt protrudatur per spatiolum $A\alpha = d\omega$: si jam aliud corpusculum B illi aequale a vi quoque aequali $= p$ secundum eandem directionem urgeatur, id ab ea eodem tempusculo dt protrudetur per aequale spatiolum $B6 = d\omega$. Coalescant nunc haec duo corpuscula in unum quod ergo a vi $= 2p$ tempusculo $= dt$ protrudetur per spatiolum $= d\omega$; ita ut vis duplicata $2p$ in corpusculo duplicato $2A$ eundem effectum producat, ac vis simplex p in corpusculo simplici A. Atque hinc intelligetur, si n corpuscula ipsi A aequalia coalescant, ut inde unum, quod sit $= nA$, resultet, hocque sollicitetur a vi $= np$, id tempusculo $= dt$ propulsum iri per spatiolum

culo $= dt$ propulsum iri per spatiolum $= d\omega$. Cum autem corpusculum nA a vi $= np$ tempusculo dt propellatur per spatiolum $= d\omega$, per Theorema praecedens, idem corpusculum nA a vi $= p$ sollicitatum tempusculo dt promovebitur per spatiolum $= \frac{d\omega}{n}$: similique modo corpusculum mA ab eadem vi $= p$ sollicitatum pari tempusculo dt promovebitur per spatiolum $= \frac{d\omega}{m}$, unde patet haec spatiola, quibus effectus metimur, $\frac{d\omega}{n}$ et $\frac{d\omega}{m}$ esse inter se reciproce, ut corpuscula nA et mA, seu ut eorum inertiae.

EXPLICATIO.

152. Cum corpusculum A certam habeat inertiam, qua effectus vis id sollicitantis determinatur, duo ejusmodi corpuscula aequalia in unum coalescentia exhibebunt corpusculum dupla inertia praeditum, tria triplum, et ita porro. Ac vicissim id corpusculum duplo majorem inertiam habere intelligendum est, ad quod per datum spatiolum dato tempusculo propellendum requiritur vis dupla. Unde manifestum est, quomodo inertia ad genus quantitatum referatur, et quomodo in aliis corporibus major, in aliis minor esse possit. Omnia scilicet corpuscula, quae ab aequalibus viribus eodem tempusculo per aequalia spatiola promoventur, ratione inertiae inter se aequalia aestimantur, atque ex conjunctione hujusmodi corpusculorum quotcunque oriri possunt corpora, quorum inertiae quamcunque rationem inter se teneant. Quantitas ergo inertiae in determinatione effectus a viribus oriundi maximi est momenti, et hanc ob rem in Mechanica summo studio est perpendenda, ubi cum peculiaribus nominibus indicari soleat, ea in singulari definitione explicari conveniet.

DEFINITIO. 15.

153. *Massa* corporis vel *quantitas materiae* vocatur quantitas inertiae, quae in eo corpore inest, qua tam in statu suo perseverare, quam omni mutationi reluctari conatur.

COROLL. 1.

154. Massa ergo seu quantitas materiae corporum non ex eorum magnitudine, sed ex quantitate inertiae, qua in statu suo perseverare conantur, omnique mutationi reluctantur, aestimari debet.

COROLL. 2.

155. Ex inertia igitur quantitas materiae judicatur, atque id corpus plus materiae continere existimatur, non quod majus volumen occupat, sed ad quod dato modo movendum major vis requiritur.

COROLL. 3.

156. Praecedens ergo Theorema huc redit, ut, si duo fuerint corpuscula quiescentia, quorum massae sint A et B, quae ab aequalibus viribus sollicitentur, spatiola, per quae ea eodem tempusculo protrudantur, sint reciproce ut massae.

SCHOLION.

157. Consideratio ergo motus nos ad cognitionem plurium insignium proprietatum corporum manuduxit, quarum prima est eorum inertia, qua in eodem statu absoluto sive quietis sive motus uniformis rectilinei perseverare conantur. Ac primo quidem inertiam tantum in genere cognovimus, nunc autem luculenter eam esse quantitatem et mensurae capacem intelligimus, qua idem plane significetur, quod vulgo nimis vage nomine massae seu quantitatis materiae exprimi solet, cujus adeo nunc quidem distinctam notionem assecuti videmur. In corporibus igitur praeter extensionem aliquid inest, quod eorum quasi realitatem constituit, eorum scilicet inertia seu materia, quae necessario cum soliditate seu impenetrabilitate conjuncta videtur, quid enim praeter materiam impenetrabile esse possit, nullo modo intelligitur. Neque etiam materiam sine extensione concipere licet, interim tamen in dubio relinquitur, an ea ita necessario cum volumine sit connexa, ut corpora ejusdem modis parem etiam massam seu quantitatem materiae contineant. Nulla certe ratio hujusmodi aequalitatem suadet, atque experientiam consulentes deprehendimus, sub aequali volumine in aliis corporibus plus, in aliis minus materiae concludi. Quanquam enim objici solet, vel non totum volumen materia impleri, vel materiam in poris contentam non ad ipsum corpus pertinere, hinc tamen minime evincitur, omnes corporum particulas aeque magnas etiam pari inertia esse praeditas. Sed haec quaestio imprimis ardua huc non pertinet, etiamsi probabile videatur, duplicis saltem generis materias in mundo existere, in quarum altera pro aequali volumine massa multo sit major quam in altera.

THEO-

THEOREMA 4.

158. Si corpuscula ratione massae inaequalis quiescant, atque a viribus quibuscunque singula sollicitentur, erunt spatiola, per quae eodem tempusculo protrudentur, in ratione composita ex directa virium in inversa massarum.

DEMONSTRATIO.

Sollicitetur corpusculum quiescens, cujus massa est $= A$ a vi $= p$, a qua tempusculo dt protrudatur per spatiolum $= d\omega$. Iam per Theor. 2. si idem corpusculum A sollicitaretur ab alia vi $= q$, ab ea eodem tempusculo promoveretur per spatiolum $= \frac{qd\omega}{p}$; sin autem aliud corpusculum quiescens, cujus massa $= B$, a vi $= q$ urgeretur, id ab ea eodem tempusculo dt promoveretur per spatiolum $= \frac{Aqd\omega}{Bp}$, per Theor. 3. Ergo si corpusculum quiescens A a vi $= p$, et corpusculum quiescens B a vi $= q$ sollicitetur, spatiola per quae ea eodem tempusculo dt proferentur, erunt ut $d\omega$ ad $\frac{Aqd\omega}{Bp}$ hoc est ut $\frac{p}{A}$ ad $\frac{q}{B}$.

COROLL. 1.

159. Si ergo spatiolum $d\omega$ innotuerit, per quod corpusculum, cujus massa $= A$, a vi $= p$ sollicitatum tempusculo dt protruditur, spatiolum, per quod aliud corpusculum, cujus massa $= B$ a vi $= q$ sollicitatum eodem tempusculo dt propellitur, erit $= \frac{Aqd\omega}{Bp}$.

COROLL. 2.

160. Absolute ergo loquendo erit spatiolum, per quod corpusculum tempusculo dt promovetur, ut vis sollicitans divisa per massam corpusculi: quod etiam de corpusculo moto valet, si ea, quae supra monuimus, hic probe observentur.

SCHOLION.

161. Quemadmodum igitur effectus virium corpuscula quaecunque sollicitantium tam a quantitate virium, quam a massa corpusculorum pendeat, si quidem tempuscula fuerint aequalia, ita definivimus, ut nullum dubium superesse possit, quin regula hic tradita necessario sit

 vera.

vera. Comparationem hic quidem tantum instituimus, quae inter spatiola illa, et vires et massas intercedit, verum notandum est, inter huiusmodi quantitates heterogeneas nullam determinationem absolutam constitui posse, neque hic aliter ad mensuras absolutas pertingere licet, nisi ut effectus quidam in mundo observatus pro cognito assumatur, atque ad eum tanquam ad unitatem reliqui effectus omnes revocentur, quod quomodo commodissime fieri queat, in sequentibus fusius ostendemus. Ceterum hinc nondum patet, quomodo effectus virium se sit habiturus, quando tempuscula fuerint inaequalia; neque enim licet hinc a tempusculo elapso dt ad tempusculum sequens dt progredi, quia corpusculum ob motum priori tempusculo conceptum jam ob inertiam sequente tempusculo aliquod spatiolum conficeret, cui demum id, quod a vi producitur, esset addendum. Quare ne hinc nostrae determinationes praecedentes turbarentur, tempuscula omnia inter se aequalia assumsimus, neque etiam temporis ratio haberi potest, nisi celeritas corpori jam jam impressa consideretur, quam investigationem sequente problemate suscipiemus. Hinc autem vicissim ea, quae hactenus sine respectu ad celeritatem habito sunt prolata, illustrabuntur.

PROBLEMA 9.

Fig. 15. 162. Si corpusculum celeritate quacunque moveatur, simulque a vi secundum motus sui directionem sollicitetur, definire mutationem momentaneam in ejus motu et celeritate productam.

SOLUTIO.

Sit A massa corpusculi, quod moveatur secundum directionem AB celeritate $= v$, qua ob inertiam perpetuo uniformiter in directum esset progressurum, nisi a vi externa sollicitaretur. Scilicet si tempore $= t$ descripserit spatium AS $= s$, indeque tempusculo dt pergat per spatiolum Ss $= ds$, erit $\frac{ds}{dt}$ ejus celeritas in S, nempe $= v$, quae cum sit constans, fiet $\frac{dds}{dt^2} = 0$, si nulla affuerit vis. Ponamus autem, corpusculum dum ex S egreditur sollicitari a vi $= p$ secundum ipsam motus directionem SB: atque evidens est, motum non amplius uniformem esse futurum, sed acceleratum iri, ex quo formula $\frac{dds}{dt^2}$ non erit nihilo aequalis, sed valorem quendam habebit positivum, quoniam vis sollicitans auget celeritatem

tem, in directione nihil mutans. Verum quia haec formula $\frac{dds}{dt^2}$ involvit illud spatiolum, per quod corpusculum ultra spatium motu insito descriptum profertur, erit ea directe ut vis sollicitans p et reciproce ut massa A seu $\frac{dds}{dt^2}$ erit ut $\frac{p}{A}$. Absoluta autem aequalitas constitui nequit, nisi omnes quantitates ad determinatas unitates reducantur; tantisper igitur liceat, hanc aequalitatem ita indefinite exhibere, ut sit $\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$, ubi λ denotat numerum per unitates infra stabiliendas determinandum. Effectus ergo vis sollicitantis p in hoc consistit, ut sit $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$: sumto elemento dt constante. Et cum celeritas sit $v = \frac{ds}{dt}$, erit $dds = dvdt$, ideoque $dv = \frac{\lambda p dt}{A}$; unde celeritatis incrementum innotescit, quod vis p in corpusculo A tempusculo dt producit, siquidem directio vis cum directione motus conveniat, ab eaque motus acceleretur.

COROLL. 1.

163. Effectus ergo vis sollicitantis p in corpusculum, cujus massa $=$ A et quod secundum eandem directionem movetur celeritate $= v$, qua tempusculo dt conficeret spatiolum $= ds$, in hoc consistit, ut sit $\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$: sumto dt constante, seu $dv = \frac{\lambda p dt}{A}$.

COROLL. 2.

164. Vicissim ergo si acceleratio motus sit cognita, quae est vel $\frac{dds}{dt^2}$ vel $\frac{dv}{dt}$, vis sollicitans assignari potest, eam producens, erit scilicet vis ista $p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dds}{dt^2}$ vel $p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt}$: quae secundum ipsam motus directionem urgere est censenda.

COROLL. 3.

165. Sin autem directio vis sollicitantis p directioni motus fuerit opposita, ab ea motus tantumdem retardabitur, eritque $\frac{dds}{dt^2} = \frac{-\lambda p}{A}$ vel

vel $\frac{dv}{dt} = \frac{-\lambda p}{A}$: vis scilicet respectu casus praecedentis tanquam negativa spectari potest.

EXPLICATIO.

166. Cum hic invenerimus $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$, ideoque corpusculum tempusculo dt spatiolum $ds + dds$ percurrere sit censendum, cum motu insito tantum spatiolum ds confecturum fuisset, viditur dds id ipsum esse spatiolum, quod ultra id, per quod motu insito ferretur, ob vim sollicitantem percurritur, ita ut $\frac{\lambda p dt^2}{A}$ esset id spatiolum $d\omega$ per quod corpusculum A quiescens a vi p tempusculo dt protrudi assumsimus. Verum observandum est, hic dds exprimere excessum spatioli, tempusculo dt percursi, supra id quod tempusculo praecedente dt percursum fuisset eadem agente vi p. Quare si spatiolum praesente tempusculo dt percursum sit $ds + d\omega$, denotante ds spatiolum motu insito descriptum et $d\omega$ spatiolum a vi p adjectum; praecedente tempusculo dt, si ab eadem vi fuerit sollicitatum, tantum spatiolum $ds - d\omega$ confecisset, minus scilicet, quam si nullam actionem fuisset passum. Cum igitur dds exprimat differentiam inter haec duo spatiola $ds + d\omega$ et $ds - d\omega$, erit $dds = 2d\omega$, ideoque $d\omega = \frac{1}{2} dds = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$, unde patet spatiolum $d\omega$, per quod corpusculum A quiescens a vi p tempusculo dt propellitur, duplo minus esse quam nostrum dds. In solutione quidem id non aequale sed tantum proportionale assumsi, ita ut hinc ei nihil roboris deesse sit putandum. Interim hoc adhuc alio modo ostendisse, operae erit pretium.

PROBLEMA. 10.

167. Data acceleratione, quae corpusculo moto A a data vi p secundum directionem motus sollicitante tempusculo dt inducitur, definire spatiolum $d\omega$, per quod idem corpusculum A quiescens ab aequali vi p sollicitatum eodem tempusculo dt protruderetur.

SOLUTIO.

Ob datam accelerationem habemus ex superioribus $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$ sumto elemento dt constante. Concipiamus jam vim sollicitantem p eandem

eandem manere, sive corpusculum celerius sive tardius moveatur, ita ut quantitas p pro constante haberi possit; vel potius determinemus hinc motum per tempus aliquot t, quod tamen ipsum adhuc sit infinite parvum, ita ut dubium nullum supersit, quie vis p interea maneat constans. Cum igitur habeamus $\frac{dds}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A}$ erit integrando $\frac{ds}{dt} = C + \frac{\lambda pt}{A}$, seu $ds = C\,dt + \frac{\lambda pt dt}{A}$, quae denuo integrata dat:

$$s = Ct + \frac{\lambda ptt}{2A},$$

quod est spatium tempore t confectum, cujus pars Ct denotat spatium, quod corpusculum A solo motu insito percursurum fuisset, si a nulla vi sollicitaretur; pars autem $\frac{\lambda ptt}{2A}$ est ejus augmentum ab actione vis insuper adjectum. Statuatur jam totum tempus t infinite parvum et loco t scribatur dt, atque $\frac{\lambda p dt^2}{2A}$ exprimet spatiolum $d\omega$, per quod corpusculum A ultra id, quod motu insito percurreret, tempusculo dt a vi p propelleretur; cui cum aequale sit id spatiolum $d\omega$, per quod idem corpusculum A quiescens eodem tempusculo dt ab aequali vi p protruderetur habebimus $d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$ seu $d\omega = \frac{1}{2}\, dds$, uti jam ante innuimus.

COROLL. 1.

168. Spatiolum ergo, per quod corpus A quiescens tempusculo infinite parvo dt a vi p urgetur, est differentiale secundi gradus seu infinities minus est spatio, quod celeritate quacunque finita eodem tempusculo describeret.

COROLL. 2.

169. Hoc porro spatiolum $d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$ est dimidium differentio-differentialis dds, quod eodem tempusculo dt ab eadem vi p in eodem corpusculo A utcunque moto producitur.

COROLL. 3.

170 Hinc jam cognoscimus, istud spatiolum $d\omega$, quod supra vi solli-

sollicitanti p directe et massae A reciproce proportionale ostendimus, insuper sequi rationem duplicatam tempusculi dt.

SCHOLION.

171. Ex his ergo valemus definire effectus virium in corpuscula utcunque mota, dummodo directio vis sollicitantis cum directione motus conveniat, seu et fuerit contraria. Superest ergo, ut inquiramus, quomodo is se sit habiturus, quando directio vis ad motus directionem est obliqua, quae investigatio facillime instituetur, motum corpusculi secundum praecepta supra tradita secundum duas vel tres directiones fixas resolvendo; etsi enim haec resolutio tantum est idealis, tamen uti per se est veritati consentanea, ita etiam ad actionem virium felicissimo successu accommodatur, atque hoc pacto totum negotium per eandem formulam absolvetur. Quanquam enim a viribus obliquis non solum celeritas corpusculi sed etiam directio immutatur, tamen haec posterior mutatio simul in mutatione motuum lateralium comprehendetur, ita ut pecularibus formulis pro inflexione directionis plane non sit opus. Quomodo igitur his casibus calculum instrui oporteat, ostendamus.

PROBLEMA. *.

Fig. 16. 172. Si corpusculum, dum data celeritate secundum directionem Ss movetur, a vi quadam secundum directionem Sp sollicitetur, definire ejus effectum in motu corporis dato tempusculo dt productum.

SOLUTIO.

Sit A massa corpusculi, quod motu insito percurreret spatiolum $Ss = ds$ tempusculo dt, ita ut ejus celeritas in S sit $= \frac{ds}{dt}$: sollicitetur autem interea secundum directionem Sp vi $= p$, atque hujus vis effectus in hoc consistet, ut elapso tempusculo dt non in s sed σ reperiatur, translatumque sit insuper per spatiolum $s\sigma = d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$ directioni vis Sp parallelum. Ad quem effectum commodius repraesentandum resolvatur motus secundum binas directiones Sp et Sq quascunque, quarum altera Sp conveniat cum directione vis, ita ut si nulla vis adesset, corpusculum describeret secundum directionem Sp spatiolum $Sp = dx$ et secundum directionem Sq spatiolum $Sq = dy$, completo parallelogrammo $Spsq$. Cum autem accedente vi p elapso tempusculo dt in σ reperiatur, ducta $\sigma\pi$ ipsi sp parallela, motus idem erit, ac si secundum directionem Sp descripsisset spatium $S\pi =$

$S\pi = dx + d\omega$, secundum directionem vero Sq spatium Sq ut ante. A vi ergo p tantum motus lateralis secundum directionem Sp, qua ipsa vis p agit, afficitur, altero motu laterali secundum Sq manente immutato, atque motus secundum Sp ita accelerabitur, ut sit $ddx = 2d\omega$, seu $ddx = \frac{\lambda p dt^2}{A}$. Quare si motus secundum binas vel etiam ternas directiones resolvatur, quarum una cum directione vis Sp conveniat, hic motus solus a vi afficietur perinde, ac si corpusculum revera secundum hanc directionem moveretur, reliquique motus laterales nihil omnino ab ista vi patientur.

COROLL. 1.

173. Quemadmodum ergo, facta hac motus resolutione, si nulla adesset vis sollicitans, foret $\frac{ddx}{dt^2} = 0$ et $\frac{ddy}{dt^2} = 0$, ita accedente vi p secundem directionem Sp sollicitante erit $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$, manente $\frac{ddy}{dt^2} = 0$.

COROLL. 2.

174. Simili modo sit motus per Ss in ternos motus resolvatur, et elementa per eos seorsim descripta tempusculo dt sint dx, dy, et dz, quorum primum dx in directione vis sollicitantis p sit sumtum, motus his tribus formulis continebitur:

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = 0, \text{ et } \frac{ddz}{dt^2} = 0.$$

COROLL. 3.

175. Hinc etiam colligitur, si corpusculum A simul tribus viribus p, q, et r sollicitetur, secundum ternas illas directiones, in quibus elementa dx, dy et dz assumuntur, motum corporis per has formulas determinatum iri:

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A} \text{ et } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

SCHOLION. 1.

176. Quando motus corpusculi, uti supra docuimus, secundum ternas directiones quascunque fixas resolvitur, a quibuscunque viribus corpusculum sollicitetur, perturbatio motus facile hujusmodi formulis determinari potest. Vires enim sollicitantes omnes secundum has easdem

Fig. 4. dem ternas directiones resolvantur, unde resultent istae vires p, q, r, quarum prima p urgeat secundum directionem OA, in qua elementum dx, secunda secundum directionem OB, in qua elementum dy, et tertia secudum directionem OC, in qua elemcotum dz capitur, tendantque singulae vires ad motus secudum istas directiones accelerandos. Quo facto motus ita perturbabitur, ut posito elemento temporis dt constante futurum sit

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}; \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}; \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

ubi notandum, si quae harum virium in plagam oppositam urgeat, eam negative sumi debere, ita ut motus lateralis ei respondens retardetur. Atque hujusmodi ternis formulis perturbatio omnium motuum, quomodocunque etiam corpusculum a viribus sollicitetur, includi poterit, quae cum sint similes inter se, universa Mechanica unico adeo principio inniti est censenda.

SCHOLION. 2.

177. Quin etiam hoc unicum principium complectitur axiomata praecedentis capitis pro motu spontaneo, seu casu, quo vires sollicitantes evanescunt: tum enim nostrae formulae declarant motum aequabilem rectilineum. Totius ergo Mechanicae fundamentum hoc una propositione includitur:

Si corpusculum cujus massa $= A$ sollicitetur a vi $= p$; ac per motus resolutionem in directione hujus vis, tempusculo dt conficiat spatiolum ds, celeritate $\frac{ds}{dt} = v$, erit

$$\frac{dds}{dt2} = \frac{\lambda p}{A} \text{ seu } dv = \frac{\lambda pdt}{A}.$$

Vel *augmentum celeritatis, secundum directionem vis sollicitantis acceptum, est directe ut vis sollicitans ducta in tempusculum, et reciproce ut massa corpusculi.*

Iam quaestio agitari solet, utrum hoc unicum principium, cui tota Mechanica atque adeo universa Motus scientia superstruitur, sit necessario, an tantum contingenter verum? Cujus decisio ex hactenus demonstratis haud difficilis videtur. Ubicunque enim corpora existunt, aliae certe leges in eorum motu locum habere nequeunt; omnesque aliae formulae praeter $\frac{pdt}{A}$, quibus quis incrementum celeritatis proportionale statuere voluerit, manifestas contradictiones essent implica-

plicaturae. Quare nullo modo dubitare licet, quin hoc principium inter veritates necessarias sit referendum. Atque non solum super terra, ubi ejus veritatem experimentis comprobare licet, sed etiam in planetis cunctisque adeo corporibus coelestibus audacter pronunciare possumus, omnes motus, quicunque ibi fuerint, per hoc unicum principium dirigi ac temperari. Quaestio autem haec de necessitate et contingentia non tam de isto principio, quam de aliquot aliis regulis, quae sub nomine legum motus circumferuntur, moveri solet. Verum quatenus hae leges rite ex nostro principio consequuntur, aeque erunt pro necessariis habendae: quae deinde ad certa corporum genera, veluti elastica, nonelastica, et fluida astringuntur, eae concessis talibus corporibus pariter non verae esse non possunt, dummodo ex nostro principio recte sint deductae.

SCHOLION. 3.

178. In superioribus de Mechanica Libris equidem principia hujus scientiae jam ita constitueram, ut eorum certitudo extra omnem dubitationem esset posita, hic autem visum est, ea alio modo ex natura corporum accuratius perpensa derivare, atque ad unicum principium derivare, ex quo deinceps omnia quae ad motum pertinent facilius deduci possent. Quanquam autem omnia, quae ad motum corpusculorum infinite parvorum seu quasi punctorum spectant, ibi jam susius sum persecutus, tamen quemadmodum eadem ex isto unico principio sint repetenda, breviter exposuisse juvabit, quae quidem ita pertractabo, ut via ad motus corporum finitorum scrutandos planior reddatur. Imprimis autem, cum hic tantum rationem seu proportionalitatem inter diversas quantitates notitiam motus ingredientes, quae per se sunt heterogenae, definiverim, quae ad mensuras absolutas revocari nequeunt, nisi motus quidam pro cognito assumatur; hic omnino necesse est, antequam ulterius progrediamur, motum quendam cognitum, cujusmodi est lapsus gravium, studiosius evolvere, indeque mensuras absolutas stabilire, quibus deinceps commode uti queamus. Etsi vero assumtio talis motus ab arbitrio nostro pendet, et ad experientiam deducitur, tamen hinc necessitati principii nostri nihil detrahitur, cum arbitrarium tantum se ad mensuras absolutas extendat, haeque ab unitatibus certis omnino arbitrariis pendeant.

CAPUT IV.

DE MENSURIS ABSOLUTIS EX LAPSU GRAVIUM PETITIS.

DEFINITIO. 16.

179. **G***ravitas* est vis, qua omnia corpora circa terrae superficiem deorsum urgentur; et vis, qua quodvis corpus ob gravitatem deorsum sollicitatur, ejus *pondus* vocatur.

COROLL. 1.

180. Gravitas ergo est causa externa, quae corpora terrestria deorsum pellit; neque igitur ipsis corporibus tanquam proprietas quaedam tribui potest.

COROLL. 2.

181. Corpus itaque circa superficiem terrae dimissum, etiamsi quieverit, ad motum deorsum incitatur, ac tamdiu labetur, donec obstacula lapsum arcentia inveniat.

COROLL. 3.

182. Quamdiu autem lapsus impeditur, sive corpus objecto immobili incumbat, sive sit suspensum, ejus pondus se per pressionem exerit.

EXPLICATIO.

183. Quotidiana experientia abunde testatur, omnia corpora, quae sub sensus cadunt, esse gravia: ac si quae potius levia videntur, dum sursum nituntur, causa aeri est tribuenda, quo sublato etiam levissima corpora aeque promte delabuntur, atque gravissima. Hic autem cogitationem ab omnibus obstaculis, quae lapsui corporum se opponere solent, abstrahimus. Experimentis autem in subsidium vocatis discimus, remotis omnibus motus obstaculis, primo omnia corpora aeque celeriter delabi, et secundo sive quiescant sive jam moveantur pari vi deorsum urgeri. Haec ergo duo phaenomena tanquam cognita assumo, etsi ampliorem motus notitiam requirant; cum hic tantum fixas mensuras stabilire sit propositum; undecunque enim nobis innotuerint, ad hunc scopum nihil interest.

SCHOLION.

184. Gravitatem esse vim externam, quae in corpora extrinsecus

agat, eaque deorsum impellat, etiam ii agnoscunt, qui ejus causam in attractione ponunt. Corpora enim non proprio quodam instinctu terram versus urgeri, sed a vi terrae attractrice attrahi statuunt. Rem scilicet ita concipiunt, quasi terra quaquaversus vires emitteret, quae corpora ambientia complexae terram versus impellant; neque vero hanc virium emissionem ope medii interjecti fieri putant, sed eam pariter locum habere volunt, etiamsi omnis materia inter terram et corpora tolleretur. Foret ergo gravitas vis immaterialis in corpora agens, verum cum terra ita conjuncta, ut hac sublata simul evanesceret; perinde igitur esset, ac si spiritus quidam corpora deorsum concitaret; quomodo enim aliter vis sese a terra per longinquas distantias sine adminiculo cujusquam materiae interjacentis propagare possit, nullo modo intelligere licet. Finge enim duo corpora A et B ad magnam distantiam a se invicem remota, inter quae nulla plane materia existat, atque circa corpus A nihil omnino aderit, quod ad corpus B pertineat; neque quicquam in corpore A mutabitur, etiamsi corpus B prorsus tollatur, ex quo hujusmodi emissio virium rationi contraria videtur. Quin potius veritati consentaneum est, vim gravitatis ab actione cujuspiam materiae subtilis sensus nostros effugiente oriri; etiamsi enim modum, quo talis vis produceretur, luculenter monstrare non liceret, tamen ad hujusmodi qualitates occultas confugere minime deceret. Verum in fluidis ejusmodi vires oriri posse, in Hydrodynamica docetur. Quando autem fautores attractionis dicunt, a Deo Telluri vim attractivam esse inditam, nihil aliud dicunt, nisi corpora ab Ipso Deo immediate terram versus impelli. Perpendamus ergo in genere descensum corpusculi a gravitate deorsum sollicitati.

PROBLEMA. 12.

185. Si corpusculum continuo deorsum sollicitetur a vi constante, motumque a quiete incipiat, ad datum tempus altitudinem confectam, et celeritatem quam acquisiverit, determinare.

SOLUTIO.

Sit A massa corpusculi, quod primum in A quieverit, unde continuo deorsum urgeatur a vi constante $= p$, cujus actione remotis omnibus obstaculis per lineam rectam verticalem AG descendet. Perveneriт ergo elapso tempore $= t$ in S, confecta altitudine $AS = s$; ac sumto temporis elemento dt constante, ejus motus hac aequatione definietur Fig. 17.

$dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$, seu $\frac{dds}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A}$, cujus integrale est $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A} +$ Const. At $\frac{ds}{dt}$ exprimit celeritatem in S; quae cum in A ubi $t = 0$ per hypothesin fuerit nulla, constans integratione ingressa evanescit, ita ut habeatur celeritas $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}$. Porro per dt multiplicando fit $ds = \frac{\lambda ptdt}{A}$, quae denuo integrata dat $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$, quoniam posito tempore $t = 0$, altitudo AS $= s$ evanescere debet. Elapso ergo tempore t corpusculum descendit per altitudinem AS $= s = \frac{\lambda ptt}{2A}$, ibique in S acquisivit celeritatem $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}$.

COROLL. 1.

186. Altitudo ergo lapsu confecta proportionalis est quadrato temporis, celeritas vero acquisita ipsi tempori; utrinque autem accedit ratio directa vis sollicitantis p et inversa massae A.

COROLL. 2.

187. Celeritas in S acquisita $\frac{ds}{dt}$ tanta est, qua si corpus uniformiter moveretur, eodem tempore t conficeret spatium $= \frac{tds}{dt} = \frac{\lambda ptt}{A}$, quod ergo est duplum altitudinis descriptae $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$.

COROLL. 3.

188. Cum omnia corpora remotis obstaculis aeque celeriter descendant, uti experientia testatur, necesse est, ut $\frac{\lambda p}{A}$ seu $\frac{p}{A}$ sit quantitas constans. Quare vis quodlibet corpus deorsum sollicitans p seu ejus pondus ad ejus massam A eandem tenet rationem.

EXPLICATIO.

189. Quando ergo quaestio est de lapsu corporum gravium, littera p exprimet corporis pondus, cujus distinctam habemus ideam, cum adeo

adeo mensurae ponderum sint notissimae, littera A vero ejusdem corporis massam denotat, cujus cognitio per se occultior ex hoc ipso satis clare percipitur, quod sit ponderi proportionalis. Deinde temporis t etiam claram habemus notionem, cum ejus quantitatem per mensuras certissimas, veluti minuta secunda, vel minuta prima, vel horas exprimere valeamus. Altitudo autem s, cum sit linea recta, per mensuras geometricas definitur. Verum littera λ, qua proportionalitas determinatur, per se definitum valorem non recipit, sed prout reliquae quantitates ad alias atque alias mensuras ceu unitates referuntur, ita etiam alii atque alii valores tribui debent. Statim autem ac reliquas quantitates p, A, t et s per determinatas mensuras exprimimus, littera λ determinatum valorem adipiscitur, qui ita comparatus esse debet, ut pro unico casu veritatem exhibeat, tum enim perpetuo eundem valorem retinebit, quamdiu scilicet iisdem mensuris utemur. Hic autem valor ex experientia peti debet, cum etiam mensurae assumtae experientiae innitantur; hinc vero discimus, quanta sit altitudo, per quam corpus grave dato tempore delabitur, unde litterae λ talis valor tribui debebit, ut formula nostra pro altitudine inventa $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$, si ad istum casum accommodetur, hanc ipsam altitudinem, quam experientia declarat, exhibeat.

SCHOLION.

190. Omnia ergo huc redeunt, ut pro omnibus quantitatibus in nostras formulas ingredientibus mensuras certas stabiliamus, quibus in posterum constanter utamur, si quidem omnium motuum phaenomena per mensuras cognitas exprimere velimus. Sunt autem quinque genera quantitatum, quibus omnis motus determinatio continetur

1°. Spatium percursum, quod cum sit linea ideoque quantitas geometrica, ejus mensura nulli dubio est subjecta.

2°. Tempus, cujus mensura cum sit notissima, cardo rei in hoc versatur, quantum tempus pro unitate assumere velimus.

3°. Celeritas, cujus cognitio planior esse nequit, quam si spatium assignare valeamus, quod ea celeritas dato tempore uniformiter esset percursura.

4°. Vis sollicitans ad mensuras cognitas erit revocanda.

5°. Massa corporum motorum in calculum ingreditur, cujus quantitas, quomodo aestimari debeat, quoque erit statuendum.

Quorum quinque quantitatum generum cum primum nulla difficultate laboret, quomodo quatuor reliqua per mensuras cognitas aptissime

sime in calculum introducantur, iisque convenienter littera λ definiatur; in sequentibus hypothesibus stabiliamus.

HYPOTHESIS. 1.

191. *Vires sollicitantes per pondera illis aequalia constanter exprimamus.*

EXPLICATIO.

192. Haec virium expressio per pondera nullam habet difficultatem, cum enim pondus cujusque corporis sit vis, qua id deorsum sollicitatur, vires sollicitantes et pondera sunt quantitates inter se homogeneae; et a quacunque vi aliquod corpus sollicitetur, semper corpus concipere licet, quod in superficie terrae positum pari vi deorsum sollicitaretur; hujusque corporis pondus justam illius vis mensuram exhibebit. Et quando quaestio est de tanta vi, ut nullum corpus circa terrae superficiem existere possit, quod aequale pondus haberet, sufficiet nosse, quoties illa vis major sit, quam pondus modici corporis in terrae superficie existentis; si quidem hinc quantitas illius vis aeque certe definiri poterit. Cum autem nunc quidem compertum sit, eadem corpora in omnibus terrae regionibus non paribus viribus deorsum impelli, certa quaedam terrae regio ad hanc mensuram eligi debet, ad quam etiam reliquae mensurae deinceps exponendae accommodentur. Nihil enim interest, quamnam regionem adhibeamus, dummodo in eadem experimenta, quibus sequentes mensurae innituntur, capiantur.

HYPOTHESIS. 2.

193. *Massam cujusque corporis per pondus exprimamus, quod idem in regione terrae constitutum esset habiturum.*

EXPLICATIO.

194. Ratio hujus mensurae in hoc est sita, quod pondera corporum massis eorum sint proportionalia; quare pondus cujusque corporis justam massae ejus mensuram praebere est censendum. Quando autem quaestio est de massis corporum extra terram versantium, ea saltem mente in terram, et eam quidem ejus regionem, unde virium mensuras hausimus, sunt transferenda. Hinc massa cujuscunque corporis nobis mensurabitur pondere, quod idem corpus, si in illa regione esset collocatum, haberet. Si de corporibus quaereretur, quae ob magnitudinem a memorata regione capi non possent, ea per partes essent consideranda; vel adeo sufficiet rationem nosse, quam massa corporis propositi

teneat

teneat ad massam alicujus dati corporis in ea regione existentis. Hoc modo vires et massae ad quantitates homogeneas sunt perductae, cum ambo per pondera simus expressuri; et quoniam in nostris formulis perpetuo vires per massas divisae occurrunt, perinde est quanam unitate in ponderibus dimetiendis utamur, sive libra sive uncia; semper enim quotus ex divisione vis cujuspiam per massam resultans numero absoluto exprimetur. Atque casu quidem gravitatis, cum tam vis sollicitans p quam massa corporis A per ejus pondus exprimatur, erit $\frac{p}{A} = 1$, unde elapso tempore t grave descendit per altitudinem $s = \frac{1}{2}\lambda tt$, et acquirit celeritatem $\frac{ds}{dt} = \lambda t$, qua corpus uniformiter latum tempore t percurret spatium $= \lambda tt = 2s$.

HYPOTHESIS 3.

194. *In dimetiendis temporibus perpetuo minutum secundum pro unitate assumamus.*

EXPLICATIO 2.

Quod minutum secundum sit pars sexagies sexagies vigesima quarta diei naturalis, satis notum est, cum dies in 24 horas, una hora in 60 minuta prima, et unum minutum primum in 60 minuta secunda dividi soleat. Diem autem hic assumo medium solarem, quo sol secundum tempus medium circa terram revolvi censetur. Quod tempus si forte non per omnia secula ejusdem durationis videatur, sufficit ejus quantitatem pro data quadam aetate nosse, et ea quidem, unde mensura massarum ex corporum ponderibus petitur. Quare si tempus quodpiam littera t designemus, haec littera erit numerus absolutus indicans, quot minuta secunda in tempore illo contineantur. Est autem haec temporis mensura commodissima, cum in omnibus experimentis tempora in minutis secundis notari soleant; fractiones etiam nimis frequentes hoc modo evitabimus, quae occurrerent, si majus temporis spatium pro unitate assumeremus.

HYPOTHESIS 4.

196. *Celeritatem commodissime metiemur per spatium, quod corpus ea celeritate uniformiter motum singulis minutis secundis percurret.*

EXPLICATIO.

Celeritatem sane clarius non cognoscimus, quam si spatium assignare valuerimus, quod corpus ea celeritate uniformiter latum uno minuto

ſecundo percurret: ita ſi dicam, globum ex tormento exploſum tantam habere celeritatem, qua uno minuto ſecundo ſpatium 1000 pedum percurreret, nemo non adaequatam hujus celeritatis ideam habebit. Hoc ergo modo celeritates et ſpatia percurſa per quantitates homogeneas, lineas ſcilicet, exprimentur, et cum tam tempora, quam vires ad maſſas applicatae, numeris abſolutis exhibeantur, in formulis noſtris duplicis tantum generis quantitates relinquentur, alterae lineae geometricae, alterae numeri abſoluti.

HYPOTHESIS 5.

197. *Denotet in poſterum nobis perpetuo littera g altitudinem, per quam grave uno minuto ſecundo libere delabitur.*

EXPLICATIO.

198. Per obſervationes et experimenta ſummo ſtudio in hunc finem inſtituta compertum eſt, corpus grave de quiete libere deſcendens primo minuto ſecundo delabi per altitudinem $15\frac{5}{8}$ pedum Rhenanorum, ita ut adhibita talium pedum menſura eſſet $g = 15\frac{5}{8}$. Sed quia gravitas non ubique terrarum eadem deprehenditur, haec quantitas non ſatis eſt fixa. Hinc ſupra jam monui, certam in terra regionem eſſe eligendam, quorſum tam vires quam maſſae per pondera experimendae referantur; hac autem regione conſtituta ibidem altitudo g, ex qua grave uno minuto ſecundo libere deſcendit, per experimenta accurate definiatur. Adjicere poſſem aetatem, unde ſimul menſura minutorum ſecundorum deſumatur, ſi quis putet, labentibus ſaeculis dierum mediorum durationem alterari. Verum quaecunque regio ad hoc inſtitutum eligatur perinde eſt, et dum omnes hactenus commemoratae menſurae eo redigentur, conclusiones denique conſentire debent; unde patet, has menſuras ad arbitrium noſtrum conſtitutas ipſa Mechanicae principia non afficere, nihilque eo arbitrarii induci, cum iis tantum id efficiatur, ut ad concluſiones in menſuris cognitis expreſſas perveniamus.

THEOREMA 5.

199. Omnibus quantitatibus ſecundum Hypotheſes modo traditas ad menſuras revocatis, pro littera λ in formulis ſuperioribus aſſumi debet dupla altitudo g, per quam grave uno minuto ſecundo delabitur.

DEMONSTRATIO.

Pro lapſu gravium enim, ſi ſecundum noſtras hypotheſes vis p et Fig. 17. maſſa A exprimatur, erit $\frac{p}{A} = 1$, et altitudo, per quam tempore t delabitur

habitur fiet AS $= s = \frac{1}{2}\lambda tt$. Hinc porro tempore t in minutis secundis expresso si statuatur $t = 1$, pro s prodire debet altitudo illa g, per quam grave uno minuto secundo delabi est assumtum, unde cum fiat $g = \frac{1}{2}\lambda$ evidens est, statui debere $\lambda = 2g$. Tum vero celeritas in fine minuti secundi acquisita erit $\frac{ds}{dt} = \lambda t = \lambda = 2g$. Haec scilicet celeritas tanta erit, ut corpus ea uniformiter latum singulis minutis secundis percurreret spatium $= 2g$, prorsus ut nostra recepta celeritatem mensurandi ratio exigit.

COROLL. 1.

200. Denotat ergo λ non numerum, sed lineam, quae cum spatio percurso s est homogenea, dum reliquae quantitates t et $\frac{p}{A}$ numeris absolutis experimentur.

COROLL. 2.

201. Si ergo corpusculum quiescens, cujus massa $= A$, a vi $= p$ sollicitatur, ab ea tempusculo dt protrudetur per spatiolum $= \frac{gpdt^2}{A}$; adhibendo scilicet perpetuo mensuras praescriptas.

COROLL. 3.

202. Ac si corpusculum A jam movetur, et a vi $= p$ sollicitatur, tum, resolutione motus instituta, ejus motus lateralis, quo secundum directionem vis sollicitantis fertur, et tempusculo dt spatiolum $= dx$ conficit, ita variabitur, ut si $ddx = \frac{2gpdt^2}{A}$, et $\frac{ddx}{dt} = \frac{2gpdt}{A}$, ubi $\frac{ddx}{dt}$ est incrementum celeritatis secundum hanc directionem.

COROLL. 4.

203. Si porro hinc celeritas motus lateralis secundum hanc directionem colligatur, quae est $\frac{dx}{dt}$, ea secundum nostram receptam mensuram ita exprimetur, ut indicet spatium, quod corpus ista celeritate uniformiter motum uno minuto secundo esset percursurum.

SCHOLION.

204. Talibus ergo unitatibus et mensuris, quales descripsimus, adhibitis, si pro λ scribatur $2g$, ex formulis nostris deinceps omnes motus ad mensuras absolutas facillime revocabimus: haecque ratio multo

commodior videtur, quam illa, qua antehac fueram usus, ubi celeritates per radicem quadratam ex altitudinibus, per quas grave labendo pares acquireret celeritates, expresseram; quem in finem loco celeritatum altitudines ipsis debitas in calculum introduxeram. Verum ex altitudine celeritati debita ipsa celeritas non tam perspicue cognoscitur, sed calculo quodam opus est, ut ad mensuras solitas reducatur. Deinde etiam temporis ratio peculiari calculo eget, quo nova quaedam unitas in calculum induci debet, ut tempus in minutis secundis eliciatur. Has ergo ambages tam ratione celeritatum quam temporum penitus evitabimus, si praescriptis mensuris utamur: totum autem discrimen in hoc est positum, quod ante in formulis generalibus littera λ fractionem absolutam $\frac{1}{2}$ significaverat, hic autem pro ea linea $= 2g$ scribatur. Unde si quis priorem modum secutus calculum pro quopiam motu definiendo instituerit, ejus calculus facile ad hunc modum reducetur, indeque promtissime omnes mensurae absolutae innotescent. Hinc etiam homogeneitas in aequationibus motum complectentibus facilius perspicitur, cum tantum spatia percursa et littera g sint quantitates lineares et quasi unius dimensionis, cujus generis quoque sunt celeritates, si forte in calculum introducantur: tempora autem t cum fractionibus $\frac{p}{\lambda}$ huic similibus numeris absolutis exprimantur, qui nullam dimensionem constituere sunt censendi. In calculo autem, ad modum ante usurpatum instituto, tam celeritates quam tempora per radices quadratas ex quantitatibus linearibus exprimebantur, quae adeo dimidiam tantum dimensionem constituere sunt existimanda. Repudiato ergo isto superiori modo ad mensuras absolutas perveniendi hunc novum modum utpote multo faciliorem et simpliciorem amplectamur, et in sequentibus constanter retineamus.



CAPUT V.

DE MOTU ABSOLUTO CORPUSCULORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE ACTORUM.



PROBLEMA. 13.

205. Si corpusculum a viribus ita sollicitetur, ut motum suum in eodem plano absolvat, definire tam spatium percursum, quam ad quodvis tempus ejus locum et celeritatem.

SOLU-

SOLUTIO.

Ut motus fiat in eodem plano, tam directiones virium, quibus continuo sollicitatur, quam directio motus primo impressi, in eodem plano sitae sint necesse est, quod planum ipsa tabula referatur. In quo ad lubitum assumantur binae directrices OA et OB ad calculi commoditatem inter se normales, sitque ESF spatium a corpusculo descriptum, in quo pervenerit elapso tempore t, quod in minutis secundis exprimatur, in punctum S, unde ad OA demisso perpendiculo SX sint coordinatae $OX = x$ et $XS = y$, posito ipso spatio percurso $ES = s$, ut sit $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$. Sit jam massa corpusculi $= A$, quae scilicet ejus pondus indicaret, si in regione terrae ad mensuras absolutas electa versaretur: et quibuscunque viribus in S sollicitetur, eas per resolutionem staticam ad duas revocare licet, secundum directiones SP et SQ directricibus parallelas. Sit ergo vis $SP = P$ et vis $SQ = Q$, ambae in ponderibus ipsis aequalibus datae. His positis, si temporis elementum dt constans assumatur, motusque pariter secundum directiones SP et SQ resolutus intelligatur, determinatio motus his duabus formulis continebitur: Fig. 18.

$$ddx = \frac{2gPdt^2}{A} \text{ et } ddy = \frac{2gQdt^2}{A}$$

Ubi, quod perpetuo tenendum, g denotat altitudinem, per quam grave in regione terrae memorata uno minuto secundo delabitur. Hinc erit celeritas motus lateralis secundum $SP = \frac{dx}{dt} = \frac{2g}{A} \int Pdt$ et secundum $SQ = \frac{dy}{dt} = \frac{2g}{A} \int Qdt$. Quodsi jam celeritas vera in S ponatur $= v$, ob $v = \frac{ds}{dt}$, et $ds^2 = dx^2 + dy^2$, derivabitur inde haec aequatio:

$$dx\, ddx + dy\, ddy = ds\, dds = \frac{2gdt^2}{A}(Pdx + Qdy)$$

ex qua cum sit $ds = vdt$ et $dds = dvdt$, elicitur:

$$vdv = \frac{2g}{A}(Pdx + Qdy)$$

hincque $vv = \frac{4g}{A} \int (Pdx + Qdy)$.

Porro posito $dy = pdx$, ut sit $ds = dx \surd (1 + pp)$, erit $ddy = pddx +$

$dpdx = \frac{2gQdt^2}{A} = \frac{2gPpdt^2}{A} + dpdx$, ideoque $dp = \frac{2gdt^2}{Adx}$ $(Q - Pp) = \frac{2gdt^2}{Adx^2}(Qdx - Pdy)$. At ob $ds = vdt = dx\sqrt{(1+pp)}$ erit $\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{v}$, hincque $dp = \frac{2g(1+pp)}{Avv}(Qdx - Pdy)$. Verum curvae ESF, quatenus verſus OA concava ſpectatur, radius osculi eſt $= -\frac{dx(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{dp} = -\frac{ds(1+pp)}{dp}$, qui ſi vocetur $= r$, ob $dp = -\frac{ds(1+pp)}{r}$ habebitur:

$$-\frac{ds}{r} = \frac{2g(Qdx - Pdy)}{Avv} \text{ seu } \frac{Pdy - Qdx}{ds} = \frac{Avv}{2gr}.$$

COROLL. 1.

206. Si ergo loco temporis t introducatur celeritas v, motus his duabus aequationibus exprimetur:

$$Avdv = 2g(Pdx + Qdy) \text{ et } Avvds = 2gr(Pdy - Qdx)$$

quae commodius adhibentur, ſi forte vires P et Q a celeritate corporis pendeant.

COROLL. 2.

207. Hic notandum eſt, formulam $\frac{Pdx + Qdy}{ds}$ exprimere vim tangentialem, at $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ vim normalem, quarum illa ſi dicatur $= T$ haec vero $= N$, habebimus

$$Avdv = 2gTds \text{ et } Avv = 2gNr$$

quae conveniunt cum formulis ſuperiori libro traditis.

COROLL. 3.

208. His autem introductis menſuris effectus vis tangentialis T in hoc conſiſtit, ut ſit $T = \frac{Avdv}{2gds}$. Vis autem normalis effectus in hoc, ut ſit $N = \frac{Avv}{2gr}$. Seu poſito $dy = pdx$ ob $r = -\frac{ds(1+pp)}{dp}$ erit $N = -\frac{Avvdp}{2gds(1+pp)}$, ſi quidem vim normalem verſus axem OA vergere ſumamus.

EXEM-

EXEMPLUM.

209. Sollicitetur corpusculum continuo secundum directionem BO vi constante et ejus ponderi A aequali, ut habeatur casus corporis supra terram projecti. Erit ergo vis $P = o$, et vis $Q = -A$, unde habemus has aequationes:

$$ddx = o \text{ et } ddy = -2gdt^2$$

Ponamus corpusculum initio in O ita esse projectum, ut fuerit ejus celeritas $= c$, et directio fecerit cum recta OA, quae horizontalis fingatur, angulum $= \zeta$, ita ut initio ejus celeritas secundum OA fuerit $= c \cos\zeta$ et secundum OB $= c \sin\zeta$. His positis, prior aequatio dabit $\frac{dx}{dt} = c \cos\zeta$, altera vero $\frac{dy}{dt} = c \sin\zeta - 2gt$, quoniam posito $t = o$, formulae $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ dare debent celeritates initiales. Porro autem integrando, quia posito $t = o$ tam x quam y evanescere debet, fiet

$$x = ct \cos\zeta \text{ et } y = ct\sin\zeta - gtt$$

seu $-4gy = 4ggtt - 4cgt \sin\zeta$ hincque

$$cc \sin\zeta^2 - 4gy = (2gt - c\sin\zeta)^2 = \left(c \sin\zeta - \frac{2gx}{c\cos\zeta}\right)^2$$

unde patet curvam esse parabolam, hac aequatione contentam

$$\left(\frac{cc\sin\zeta \cos\zeta}{2g} - x\right)^2 = \frac{cc\cos\zeta^2}{g}\left(\frac{cc\sin\zeta^2}{4g} - y\right)$$

cujus parameter $= \frac{cc\cos\zeta^2}{g}$; et axis verticalis a puncto O distans intervallo $= \frac{cc\sin\zeta \cos\zeta}{2g}$, atque verticis supra OA elevatio $= \frac{cc\sin\zeta^2}{4g}$. Deinde ob

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(cc - 4cgt\sin\zeta + 4ggtt)} = v$$

fiet celeritas in S nempe $v = \sqrt{(cc - 4gy)}$. Ac denique facto $y = o$ reperitur longitudo jactus $= \frac{cc\sin\zeta \cos\zeta}{g}$.

SCHOLION.

210. Aliis quaestionibus huc pertinentibus evolvendis hic non immoror, cum totum hoc argumentum jam fusius sim persecutus. Notetur autem, hic agi de motu absoluto eoque libero; etsi enim motum gravium hinc

hinc deduxi, qui cum ad terram referatur, utique eſt reſpectivus, atque a motu abſoluto plurimum diſcrepans, tamen in ſequentibus oſtendetur, eum tanquam abſolutum ſpectari poſſe. Cum enim omnia corpora terreſtria ſimilibus viribus urgeantur atque ipſa terra, his efficitur, ut ea reſpectu terrae perinde moveantur, ac ſi terra quieſceret, eaeque vires abeſſent, id quod capite ſequente luculenter oſtendetur. Praeterea vero haec intelliganda ſunt de motu libero, ita ut extrinſecus nihil obſtet, quo minus corpuſculum actioni virium obſequatur, quem motum probe diſcerni convenit a motu coacto, quo corpuſculum quaſi canali incluſum aliter niſi ſecundum ductum canalis moveri nequit, cujusmodi motus in libro ſecundo ſum contemplatus. Hic vero unicum adjiciam problema circa canalem in eodem plano formatum, ubi quidem ab omni frictione mentem abſtraho, quo facilius perſpiciatur, quomodo hujusmodi problemata ope hujus novae methodi reſolvi, ſimulque preſſio corpuſculi in latera tubi definiri debeat.

PROBLEMA 14.

211. Si corpuſculum canali in eodem plano formato fuerit incluſum, ſimulque a viribus quibuscunque ſollicitetur, determinare tam ejus motum in canali, quam preſſionem quam in canalem exerit.

SOLUTIO.

Fig. 18. Figura ergo canalis ESF ut data ſpectatur, quae ad binas directrices OA et OB inter ſe normales referatur, ut ante. Scilicet ſi elapſo tempore t corpuſculum pervenerit in S, ſit $OX = x$, $XS = y$, arcus $ES = s$: vires autem ſollicitantes ad easdem directiones revocatae ſint $SP = P$ et $SQ = Q$, exiſtente corpuſculi maſſa $= A$. Iam quatenus canalis inflectit directionem, quam corpuſculum per ſe eſſet ſecuturum, in id vires exerit etiamnum incognitas, quae ad easdem directiones reductae ſint ſecundum $SP = X$ et ſecundum $SQ = Y$; de quibus autem hoc conſtat, motum corpuſculi ab iis neque accelerari neque retardari. Cum nunc ſint vires ſecundum $SP = P + X$ et ſecundum $SQ = Q + Y$ poſita celeritate in $S = v$, et radio oſculi $= r$, habebimus ex §. 206. has aequationes:

$$Avdv = 2g((P + X)\,dx + (Q + Y)\,dy)$$
$$Avvds = 2gr\,((P + X)\,dy - (Q + Y)\,dx)$$

Sed quia vires X et Y nihil conferunt ad celeritatis incrementum dv, erit $Xdx + Ydy = 0$, ex altera autem aequatione pro harum virium cognitione elicitur

$$\frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{Avv}{2gr} - \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

Primo

Primo igitur motus per canalem determinatur hac aequatione: $Avdv = 2g(Pdx + Qdy)$, unde celeritas corpusculi v in quovis loco S cognoscitur. Deinde ipse canalis ejusmodi vires X et Y secundum directiones SP et SQ exerit, ut sit

$$\frac{Xdx + Ydy}{ds} = 0 \text{ et } \frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{Avv}{2gr} - \frac{Pdy - Qdx}{ds}.$$

Scilicet si hae vires ad directionem canalis Ss et normalis SN reducantur, inde oritur secundum directionem canalis vis nulla, et secundum normalem SN vis quae est $= \frac{Avv}{2gr} - \frac{Pdy + Qdx}{ds}$, atque tanta vi vicissim corpusculum urget canalem secundum directionem oppositam Sn, quae est pressio quaesita.

COROLL. 1.

212. Si ergo corpusculum, dum per canalem movetur, a nullis viribus externis P et Q sollicitatur, motus ejus ob $Avdv = 0$ erit uniformis. Tum vero ubique canalem premet normaliter vi $= \frac{Avv}{2gr}$ secundum directionem Sn positioni radii osculi oppositam.

COROLL. 2.

213. Vis haec, qua canalis premitur, $\frac{Avv}{2gr}$ vocatur *vis centrifuga* inde orta, quod corpusculum contra instinctum inertiae in linea curva progredi cogitur, estque in ratione composita directa massae A, quadrati celeritatis v, et reciproca radii osculi r.

COROLL. 3.

214. Si corpusculum praeterea sollicitetur a vi tangentiali secundum $Ss = T$ et normali secundum $SN = N$, erit primo $Avdv = 2gTds$, deinde canalis premitur secundum directionem Sn vi $= \frac{Avv}{2gr} - N$.

EXEMPLUM.

215. Si corpusculum a gravitate sollicitatum per arcum circularem OS ascendere cogatur, cujus centrum B, radius $OB = b$, qui sit verticalis et recta OA horizontalis, celeritas autem in O fuerit $= c$, erit vis $P = 0$ et vis $Q = -A$, atque $r = -b$; unde pro motu corporis habetur: $Avdv = -2Agdy$ seu $vdv = -2gdy$: ut sit $vv = cc - 4gy$, et celeritas evanescat in D, ubi $y = \frac{cc}{4g}$, vis autem, qua ca- Fig. 19.

L nalis

nalis premitur secundum SB, erit $= -\frac{A(cc-4gy)}{2gb} - \frac{Adx}{ds}$. Tum vero ob $xx+(b-y)^2 = bb$ erit $x = \surd(2by-yy)$, $dx = \frac{bdy - ydy}{\surd(2by-yy)}$ et $ds = \frac{bdy}{\surd(2by-yy)}$, hincque pressio secundum SB $= -\frac{Acc}{2bg} + \frac{2Ay}{b} - \frac{A(b-y)}{b} = -A + \frac{3Ay}{b} - \frac{Acc}{2gb}$, quae quia est negativa pressio in canalem aget secundum SN, eritque $= A\left(1 + \frac{cc}{2bg} - \frac{3y}{b}\right)$. Cum autem sit $v = \surd(cc-4gy)$, erit elementum temporis $dt = \frac{ds}{v} = \frac{bdy}{\surd(cc-4gy)(2by-yy)}$, vel ob $y = \frac{cc-vv}{4g}$ et $dy = -\frac{vdv}{2g}$ erit $dt = -\frac{2bdv}{\surd(cc-vv)(8bg-cc+vv)}$.

Si celeritas initialis c sit quasi infinite parva prae b, quia v excedere nequit c, erit proxime $dt = -\frac{dv}{\surd(cc-vv)} \cdot \surd\frac{b}{2g}$, et integrando $t = \frac{\surd b}{\surd 2g} \cdot A\cos\frac{v}{c}$. Unde si π sit semicircumferentia circuli, cujus radius $= 1$, erit tempus totius ascensus in D, quoad celeritas v evanescat, $= \frac{\pi\surd b}{2\surd 2g}$, quod tempus *semioscillatio* vocatur. Quare ut tempus integrae oscillationis $\frac{\pi\surd b}{\surd 2g}$ sit unius minuti secundi, seu $= 1$, radius BO $= b$ capi debet $= \frac{2g}{\pi\pi}$, quae est longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis. Quare si $g = 15{,}625$ ped. Rhen. erit longitudo istius penduli $= 3{,}166287$ ped. Rhen,

SCHOLION.

216. Non opus est ut moneam, canalem ideo hic tantum esse assumtum, ut motus secundum datam lineam cogatur; id autem pluribus modis veluti pendulis effici potest, cujusmodi casum in praecedente exemplo evolvere visum est. Ceterum Problemata huc pertinentia in secundo Mechanicae Libro satis prolixe pertractavi. Cum autem ibi hoc desiderari

rari poſſit, quod methodum, qua nunc quidem corporum coeleſtium motus ad calculum revocari ſolent, et quam deinceps demum uſurpare coepi, non expoſuerim, operae pretium erit, eam hic accuratius explicare. Pertinet autem ab probl. 13. ab eoque tantum hoc differt, quod motus non per coordinatas, ſed per diſtantias a puncto fixo et angulos circa id deſcriptos definiatur. Quatenus ergo hic motus in plano abſolvitur, praecepta eum ſecundum hanc methodum inveſtigandi tradam, poſtea idem pro motu non in eodem plano facto oſtenſurus.

PROBLEMA. 15.

217. Si corpuſculum libere moveatur in plano, in quo perpetuo duabus ſollicitetur viribus, altera ad punctum quoddam fixum O tendente, alterius vero directione ad illam exiſtente normali; ad quodvis tempus diſtantiam corpuſculi S a puncto fixo O et angulum AOS definire. Fig. 20.

SOLUTIO.

Elapſo tempore t corpuſculum, cujus maſſa $=$ A, pervenerit ex A in S, ponaturque diſtantia OS $= u$, et angulus AOS $= \phi$. In S autem ſollicitetur primo a vi ſecundum SO pellente, quae ſit $=$ V, deinde vero a vi ſecundum directionem SV ad OS normali urgente, quae ſit $=$ S. Quem caſum quo facilius ad probl. 13. reducere poſſimus, demiſſo ex S ad fixam OA perpendiculo SX introducamus coordinatas OX $= x$ et XS $= y$, erit $x = u \operatorname{coſ}\phi$ et $y = u \operatorname{ſi}\phi$. Tum vero binas vires V et S ad easdem directiones SP et SQ revocemus, habebimusque vim SP $= -$ V $\operatorname{coſ}\phi -$ S $\operatorname{ſi}\phi$, et vim SQ $= -$ V $\operatorname{ſi}\phi +$ S $\operatorname{coſ}\phi$ quas ſupra vocavimus P et Q. Quocirca nanciſcemur has duas aequationes:

$$ddx = -\frac{2gdt^2}{A}(V\operatorname{coſ}\phi + S\operatorname{ſi}\phi)$$

$$ddy = -\frac{2gdt^2}{A}(V\operatorname{ſi}\phi - S\operatorname{coſ}\phi)$$

ex quarum combinatione deducimus

$$ddx\operatorname{coſ}\phi + ddy\operatorname{ſi}\phi = -\frac{2gVdt^2}{A}$$

$$ddx\operatorname{ſi}\phi - ddy\operatorname{coſ}\phi = -\frac{2gSdt^2}{A}$$

Cum autem ſit $x = u\operatorname{coſ}\phi$ et $y = u\operatorname{ſi}\phi$, erit

$$x\operatorname{coſ}\phi + y\operatorname{ſi}\phi = u \text{ et } x\operatorname{ſi}\phi - y\operatorname{coſ}\phi = 0$$

unde differentiando:

$$dx\operatorname{coſ}\phi + dy\operatorname{ſi}\phi = du \text{ et } dx\operatorname{ſi}\phi - dy\operatorname{coſ}\phi + ud\phi = 0$$

$$\text{ſeu } dx\operatorname{ſi}\phi - dy\operatorname{coſ}\phi = -ud\phi$$

 denuo

denuoque differentiando:

$$ddx \cos\varphi + ddy \sin\varphi + ud\varphi^2 = ddu$$
$$ddx \sin\varphi - ddy \cos\varphi + dud\varphi = - dud\varphi - udd\varphi$$

Quibus valoribus substitutis, adipiscemur pro motus determinatione has duas aequationes.

$$\text{I.} \quad ddu - ud\varphi^2 + \frac{2gVdt^2}{A} = 0$$

$$\text{II.} \quad udd\varphi + 2dud\varphi - \frac{2gSdt^2}{A} = 0$$

COROLL. 1.

218. Posterior aequatio per u multiplicata per integrationem reducitur ad hanc $uud\varphi = \frac{2gdt}{A}\int Sudt$, ubi notandum est, $\frac{1}{2}uud\varphi$ exprimere elementum areae AOS, unde haec area erit $= \frac{g}{A}\int dt\int Sudt$. Evanescente ergo vi laterali $SV = S$, haec area AOS est ipsi tempori t proportionalis, quomodocunque fuerit comparata altera vis V versus punctum O sollicitans.

COROLL. 2.

219. Si prior aequatio per du, posterior per $ud\varphi$ multiplicetur, aggregatum fiet

$$duddu + udud\varphi^2 + uud\varphi dd\varphi = -\frac{2gVdt^2du}{A} + \frac{2gSudt^2d\varphi}{A}$$

unde integrando elicitur

$$du^2 + uud\varphi^2 = \frac{4gdt^2}{A}\int(Sud\varphi - Vdu)$$

ubi $\sqrt{(du^2 + uud\varphi^2)}$ exprimit elementum arcus AS, ita ut $\frac{du^2 + uud\varphi^2}{dt^2}$ sit quadratum celeritatis in S.

COROLL. 3.

220. Si secunda multiplicetur per $2u^3d\varphi$, ob dt constans reperitur integrale:

$$u^4d\varphi^2 = \frac{4gdt^2}{A}\int Su^3d\varphi,$$

unde per praecedentem eruimus:

$$uudu^2 = \frac{4gdt^2}{A}\left(uu\int Sud\varphi - \int Su^3d\varphi - uu\int Vdu\right)$$

seu

seu $uudu^2 = \frac{4gdt^2}{A}(2\int udu\int Sud\phi - uu\int Vdu)$

ubi notandum, quod elementum temporis dt extra signa integralia reperiatur.

COROLL.

221. Si $S = 0$, qui est casus virium centripetarum, erit $uud\phi = ffdt$, et $ud\phi = \frac{f2dt}{u}$, quo valore in coroll. 2 substituto fit

$$du^2 = -\frac{f4dt^2}{uu} - \frac{4gdt^2}{A}\int Vdu + ccdt^2$$

ideoque $dt = \frac{udu}{\sqrt{(ccuu - f^4 - 4guu\int Vdu : A)}}$

et $d\phi = \frac{ffdu}{u\sqrt{(ccuu - f^4 - 4guu\int Vdu : A)}}$.

SCHOLION.

222. Usus harum formularum est amplissimus in Theoria Astronomiae, ex iisque determinari solent longitudo, anomalia et distantia planetae ad certum punctum sollicitati. Verum hic non est locus haec fusius prosequi, cum ad Astronomiam pertineant. Sufficiat nimirum hic methodum ejusmodi problemata tractandi in genere explicasse; progrediamur ergo ad motus non in eodem plano factos expendendos.

PROBLEMA. 16.

223. Si corpusculum libere moveatur a viribus quibuscunque sollicitatum, determinare ejus motum per ternas coordinatas inter se normales. Fig. 21.

SOLUTIO.

Constitutis ternis directricibus OA, OB et OC ad se invicem normalibus, moveatur corpusculum, cujus massa $= A$ in linea ESF, et elapso tempore t pervenerit in S, unde ad planum AOB demisso perpendiculo SY, ex Y ad OA agatur normalis YX, ut habeantur tres coordinatae inter se normales et directricibus parallelae, quae vocentur $OA = x$ $XY = y$ et $YS = z$, spatium autem jam percursum ES dicatur $= s$, ut sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ et celeritas in $S = \frac{ds}{dt}$, quae ponatur $= v$. Iam a quibuscunque viribus corpusculum in S sollicitetur, eas reducere licet ad easdem ternas directiones. Sollicitetur ergo ab his viribus $SP = P$; $SQ = Q$ et $SR = R$, quarum effectus per superiora determinabuntur per tres sequentes aequationes:

$$ddx = \frac{2gPdt^2}{A}; \quad ddy = \frac{2gQdt^2}{A} \quad \text{et} \quad ddz = \frac{2gRdt^2}{A}.$$

ubi quidem elementum dt ſumtum eſt conſtans. Prout ergo vires P, Q, R, a coordinatis x, y, z, vel etiam a celeritate $\frac{ds}{dt} = v$ pendeant, ex Analyſi ſubſidia reſolutionis erunt petenda. Interim notaſſe juvabit, cum ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et $vv = \frac{ds^2}{dt^2}$, ideoque $vdv = \frac{dsdds}{dt^2} = \frac{dxddx + dyddy + dzddz}{dt^2}$, fore:

$$vdv = \frac{2g}{A}(Pdx + Qdy + Rdz).$$

qua acceleratio corpuſculi definitur. Pro curva autem invenienda ponatur $dy = pdx$ et $dz = qdx$, ut ſit $ds = dx\sqrt{(1+pp+qq)}$ et $v = \frac{dx}{dt}\sqrt{(1+pp+qq)}$: Hinc ob $ddy = pddx + dpdx$ et $ddz = qddx + dqdx$, ſi loco ddx valor $\frac{2gPdt^2}{A}$ ſubſtituatur, reperitur:

$$dpdx = \frac{2gdt^2}{A}(Q - Pp) \text{ et } dqdx = \frac{2gdt^2}{A}(R - Pq).$$

Quare ſi hic pro dt^2 ſcribatur $\frac{dx^2(1+pp+qq)}{vv}$, erit

$$dp = \frac{2gdx(1+pp+qq)}{Avv}(Q - Pp)$$

$$dq = \frac{2gdx(1+pp+qq)}{Avv}(R - Pq)$$

ſeu $Qdx - Pdy = \frac{Avvdp}{2g(1+pp+qq)}$

et $Rdx - Pdz = \frac{Avvdq}{2g(1+pp+qq)}$.

At ſi pro p et q reſtituantur valores $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, fiet

$$Qdx - Pdy = \frac{Avv(dxddy - dyddx)}{2gds^2}$$

Rdx

$$Rdx - Pdz = \frac{Avv\,(dxddz - dzddx)}{2gds^2},$$

quae invicem divisae praebent.

$$P(dzddy - dyddz) + Q(dxddz - dzddx) + R(dyddx - dxddy) = 0$$

COROLL. 1.

224. Celeritas igitur in quovis curvae puncto determinatur hac aequatione differentiali

$$Avdv = 2g\,(Pdx + Qdy + Rdz)$$

ubi $\frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$ designat vim tangentialem ex viribus sollicitantibus ortam.

COROLL. 2.

225. Pro curva autem definienda binae ex his tribus aequationibus sufficiunt:

$$2gds^2\,(Qdx - Pdy) = Avv\,(dxddy - dyddx) = Avvdx^2\,d\,.\,\frac{dy}{dx}$$

$$2gds^2\,(Pdz - Rdx) = Avv\,(dzddx - dxddz) = Avvdz^2 d\,.\,\frac{dx}{dz}$$

$$2gds^2\,(Rdy - Qdz) = Avv\,(dyddz - dzddy) = Avvdy^2\,d\,.\,\frac{dz}{dy}$$

binae enim simul tertiam involvunt. Tum vero hinc consideratio differentialis constantis excessit.

COROLL 3.

226. Ultima aequatio, a celeritate immunis, etsi differentialia secundi gradus continet, tamen non ad differentiale dt constans assumtum est adstricta, ita enim potest repraesentari,

$$Pdz^2\,d\,.\,\frac{dy}{dz} + Qdx^2\,d\,.\,\frac{dz}{dx} + Rdy^2\,d\,.\,\frac{dx}{dy} = 0$$

SCHOLION.

227. Ternae vires P, Q, R, quibus corpusculum in S sollicitari ponimus, reducuntur ad unam, quae est $= \surd(PP + QQ + RR)$, ac si ea ponatur $= V$, ejus directio inclinatur ad SP angulo cujus cosinus est $= \frac{P}{V}$, ed SQ angulo cujus cosinus est $= \frac{Q}{V}$, et ad SR angulo cujus cosinus est $= \frac{R}{V}$. Tum si directio istius vis V cum directione motus Ss faciat angulum $= \omega$, erit vis accelerans seu secundum Ss sollicitans $= V\cos\omega$, quae

Fig. 22. quae cum sit $= \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$, erit $\operatorname{cos}\omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Vds}$, unde vis normalis colligitur $= V \operatorname{si}\omega$, cujus positio ope trigonometriae Sphaericae commodissime repraesentatur. Concipiatur S ut centrum sphaerae, unde ad superficiem porrigantur recte SP, SQ et SR, ut sint arcus PQ, PR, et QR quadrantes; directio motus transeat per s, et media directio virium per V, eritque

$$\operatorname{cos}Ps = \frac{dx}{ds};\ \operatorname{cos}Qs = \frac{dy}{ds};\ \operatorname{cos}Rs = \frac{dz}{ds}$$

$$\operatorname{cos}PV = \frac{P}{V};\ \operatorname{cos}QV = \frac{Q}{V};\ \operatorname{cos}RV = \frac{R}{V},$$

ac praeterea $Vs = \omega$ seu $\operatorname{cos}\omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Vds}$.

Cognito angulo ω, capiatur $sVN =$ quadranti, erit recta ex centro S per N ducta directio vis normalis: et puncti N positio ita ex ejus distantiis a punctis P, Q, R definitur, ut sit

$$\operatorname{cos}PN = \frac{P}{V \operatorname{si}\omega} - \frac{dx \operatorname{cos}\omega}{ds \operatorname{si}\omega};\ \operatorname{cos}QN = \frac{Q}{V \operatorname{si}\omega} - \frac{dy \operatorname{cos}\omega}{ds \operatorname{si}\omega} \text{ et}$$

$$\operatorname{cos}RN = \frac{R}{V \operatorname{si}\omega} - \frac{dz \operatorname{cos}\omega}{ds \operatorname{si}\omega}.$$

Hinc igitur cum infinitae dentur rectae normales ad directionem motus Ss, inter eas determinatur illa, secundum quam agit vis normalis, et quae directionem motus incurvat, ita ut radius curvedinis in ipsam rectam SN incidat, qui erit $= \frac{Avv}{2gV \operatorname{si}\omega}$ (207).

PROBLEMA. 17.

Fig. 21. 228. Si corpusculum, cujus massa $= A$, in tubo seu canali moveatur, neque ab ullis viribus sollicitetur, determinare ejus motum, et pressionem, quam ubique in tubum exeret.

SOLUTIO.

Sit ESF figura tubi, in quo corpusculum moveatur, in quo elapso tempore t pertigerit ad S confecto spatio $ES = s$. Locus autem S ut ante referatur ad ternas directiones fixas OA, OB, OC inter se normales, quibus coordinatae parallelae vocentur $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$. Iam quia corpusculum cogitur ubique tubi directionem sequi, ipse tubus vires in id necessarias exeret, quae autem ita erunt comparatae, ut inde celeritas nullam mutationem patiatur. Erit ergo celeritas constans, quae sit $= c$, unde

unde fit $\frac{ds}{dt} = c$ et $s = ct$. Revocentur vires a tubo exertae ad easdem ternas directiones, sintque SP $= X$, SQ $= Y$ et SR $= Z$, et ob celeritatem immutabilem $Xdx + Ydy + Zdz = 0$. Deinde quia $dt = \frac{ds}{c}$, loco dt constans erit elementum ds, ex quo formulae principales erunt

$Accddx = 2gXds^2$; $Accddy = 2gYds^2$ et $Accddz = 2gZds^2$

existente $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Tota ergo vis, quam tubus in corpusculum exercet, fiet

$$\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \frac{Acc\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}{2gds^2} = V,$$

cujus directio inclinata erit ad rectam SP angulo cujus cosinus $= \frac{X}{V} = \frac{ddx}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$, ad SQ angulo cujus cosinus $= \frac{Y}{V} = \frac{ddy}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$ et ad SR angulo cujus cosinus $= \frac{Z}{V} = \frac{ddz}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$. Huic autem vi aequalis et contraria est pressio, quam corpusculum vicissim in tubum exerit.

COROLL. 1.

229. Si radius osculi curvae in S ponatur $= r$, ob vim normalem $= V$ et celeritatem $= c$ erit $r = \frac{Acc}{2gV}$, ideoque

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}, \text{ sumto } ds \text{ constante.}$$

COROLL. 2.

230. Radii osculi autem positio cum directione vis V, qua corpusculum a tubo urgetur, congruit, inclinabitur igitur is ad rectam SP angulo, cujus cosinus $= \frac{ddx}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$, ad SQ angulo, cujus cosinus $= \frac{ddy}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$ et ad SR angulo, cujus cosinus est $= \frac{ddz}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$.

SCHOLION.

231. Posset hic etiam motus expendi, quando corpusculum non in linea data, sed tantum in data superficie progredi cogitur, sed quia hoc argumentum copiose jam est tractatum in II. Libro Mech. ne hic nimis sim prolixus, id non attingam. Praesertim cum pateat, totum negotium huc redire, ut directio vis, quam superficies in corpusculum exerit, sit ad ipsam superficiem normalis: Quare ex aequatione superficiei proposita determinetur positio normalis, seu ejus inclinatio ad ternas directiones SP, SQ et SR, quae cum positione vis V ante definita congruere debebit. Atque hinc nova colligetur aequatio inter coordinatas x, y, z, quae cum priori data conjuncta definiet viam in superficie percursam, quam esse inter suos terminos brevissimam per se est perspicuum. Revertor ergo ad motum liberum, ac docebo, quomodo motus non in eodem plano factos per angulos ad certum punctum fixum relatos definiri conveniat, ea scilicet ratione, quam supra probl. 5 (70) exposui. Quod quia in Astronomia Theoretica maximam affert utilitatem, neque haec motuum evolutio in praecedentibus libris est explicata, ei sequens problema destinemus.

Tab. III. Fig. 23.

PROBLEMA 18.

232. Si corpusculum partim ad punctum fixum O partim ab aliis quibuscunque viribus sollicitetur, definire ejus motum respectu ejus puncti.

SOLUTIO.

Constituto plano, quod sit planum tabulae, per punctum fixum O transeunte, ad quod motus referatur, in eoque sumta directrice fixa OA, pervenerit corpusculum elapso tempore t in S, unde primo in planum demittatur perpendiculum SY, et ex Y in rectam OA normalis YX, ut habeantur coordinatae orthogonales $OX = x$, $XY = y$, $YS = z$. Cum jam corpusculum in S primo a vi secundum SO sollicitetur, ea resolvatur in directiones YO et SY: reliquae vero vires cum ad easdem directiones, tum ad YV in plano tabulae ad OY normalem revocentur, ita ut omnino tres habeantur vires, quarum prima sit secundum YO = V, altera secundum YV = S, et tertia secundum SR = R. Quae vires cum sint cognitae, ad directiones coordinatarum reducantur, sicque posito angulo AOY $= \phi$ obtinebuntur hae vires:

vis secundum $XO = V\cos\phi + S\sin\phi = -P$
vis secundum $YX = V\sin\phi - S\cos\phi = -Q$
vis secundum $SR = R$

quarum effectus per tres sequentes formulas exprimetur.

$$Addx = -2gdt^2 (V\cos\phi + S\sin\phi)$$
$$Addy = -2gdt^2 (V\sin\phi - S\cos\phi)$$
$$Addz = -2gRdt^2 \text{ posita massa corpusculi} = A.$$

Vo-

Vocetur porro distantia OY $= u$, et ob $x = u \cos\phi$ et $y = u \sin\phi$, binae priores aequationes uti supra (217) ad has duas redigentur.

$$\text{I. } ddu - ud\phi^2 + \frac{2gVdt^2}{A} = 0$$

$$\text{II. } udd\phi + 2dud\phi - \frac{2gSdt^2}{A} = 0.$$

Ponatur nunc angulus SOY $= \psi$, qui corpusculi latitudo vocatur, dum angulus AOY $= \phi$ est ejus longitudo; erit SY $= z = u$ tang ψ. At pro hoc angulo ψ commodius inveniendo sit OT linea nodorum, angulus AOT $= \omega$ et inclinatio plani per O et directionem motus in S ducti ad planum assumtum $= \varrho$, erit TOY $= \phi - \omega$, hinc ductis YN et SN ad OT normalibus, fiet ON $= u \cos(\phi - \omega)$, et YN $= u \sin(\phi - \omega)$, ideoque YS $= u \sin(\phi - \omega) \operatorname{tang}\varrho = z$, hincque $\operatorname{tang}\psi = \sin(\phi - \omega) \operatorname{tang}\varrho$, et uti supra (70).

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tang}(\phi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin\varrho \cos\varrho} = d \,.\, l \operatorname{tang}\varrho$$

Quare cum sit $d\varrho = \dfrac{d\omega \sin\varrho \cos\varrho}{\operatorname{tang}(\phi - \omega)}$, erit

$$dz = du \sin(\phi - \omega) \operatorname{tang}\varrho + u(d\phi - d\omega)\cos(\phi - \omega) \operatorname{tang}\varrho$$
$$+ u \sin(\phi - \omega) \,.\, \frac{d\omega \operatorname{tang}\varrho}{\operatorname{tang}(\phi - \omega)}$$

$$\text{seu } dz = (du \sin(\phi - \omega) + ud\phi \cos(\phi - \omega)) \operatorname{tang}\varrho$$

qui valor denuo differentiatus dat:

$$ddz = (ddu \sin(\phi - \omega) + du(2d\phi - d\omega)\cos(\phi - \omega) + udd\phi$$
$$\cos(\phi - \omega) - ud\phi(d\phi - d\omega)\sin(\phi - \omega)) \operatorname{tang}\varrho$$
$$+ (du \sin(\phi - \omega) + ud\phi \cos(\phi - \omega)) \frac{d\omega \operatorname{tang}\varrho}{\operatorname{tang}(\phi - \omega)}.$$

sive

$$ddz = \left(ddu \sin(\phi - \omega) + 2dud\phi \cos(\phi - \omega) + udd\phi \cos(\phi - \omega) - ud\phi^2 \sin(\phi - \omega) + \frac{ud\phi d\omega}{\sin(\phi - \omega)}\right) \operatorname{tang}\varrho$$

Cum igitur sit

$$ddu - ud\phi^2 = -\frac{2gVdt^2}{A} \text{ et } udd\phi + 2dud\phi = \frac{2gSdt^2}{A}$$

obtinebitur

$$ddz = \left(\frac{-2gVdt^2}{A} \sin(\phi - \omega) + \frac{2gSdt^2}{A}\cos(\phi - \omega) + \frac{ud\phi d\omega}{\sin(\phi - \omega)}\right) \operatorname{tang}\varrho.$$

Quare

Quare ob $ddz = \frac{2gRdt^2}{A}$ erit

$$\frac{ud\phi d\omega}{\sin(\phi-\omega)} = \frac{2gdt^2}{A}(V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) + R\cot\rho)$$

seu $d\omega = \frac{2gdt^2 \sin(\phi-\omega)}{Aud\phi}(V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) + R\cot\rho)$

et $d.l\tang\rho = \frac{2gdt^2\cos(\phi-\omega)}{Aud\phi}(V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) + R\cot\rho)$.

Inventae ergo sunt quatuor aequationes, quibus problematis solutio continetur.

COROLL. 1.

233. Cum igitur ad datum tempus t assignari debeant hae quatuor quantitates u, ϕ, ω et ρ, nacti sumus primo has duas aequationes differentio-differentiales

$$ddu - ud\phi^2 + \frac{2gVdt^2}{A} = 0 \text{ et } udd\phi + 2dud\phi - \frac{2gSdt^2}{A} = 0$$

deinde has duas simpliciter differentiales

$$d\omega = \frac{2gdt^2 \sin(\phi-\omega)}{Aud\phi}(V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) + R\cot\rho)$$

$$\text{et } d.l\tang\rho = \frac{d\omega}{\tang(\phi-\omega)} \text{ seu } d.\tang\rho = \frac{d\omega\tang\rho}{\tang(\phi-\omega)}.$$

COROLL. 2.

234. Inventis autem his valoribus colligetur tam angulus SOY $= \psi$ *latitudo* dictus; quam distantia vera SO, ex his formulis, $\tang\psi = \sin(\phi-\omega)\tang\rho$ et $OS = \frac{u}{\cos\psi}$, ubi u dici solet *distantia curtata*.

COROLL. 3.

235. Si fuerit $\sin(\phi-\omega) = 0$, hoc est, si corpusculum per planum assumtum transit, supra jam vidimus, fore $d\omega = 0$; at nunc patet, tam lineam nodorum, quam inclinationem, nullam mutationem pati, si fuerit:

$$V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) + R\cot\rho = 0.$$

COROLL. 4.

236. Est vero $V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) = -Q\cos\omega + P\sin\omega$, atque introductis primitivis viribus P, Q, R erit

$$V\sin(\phi-\omega) - S\cos(\phi-\omega) + R\cot\rho = P\sin\omega - Q\cos\omega + R\cot\rho,$$

atque haec est quasi vis, tam locum lineae nodorum quam inclinationem immutans.

SCHO-

SCHOLION.

237. Imprimis hic notari meretur, quod variatio momentanea in situ lineae nodorum et inclinatione, satis concinna hac methodo exprimi potuerit, unde in Astronomiam Theoreticam insignia commoda redundant. Ex hoc fonte à Cel. Mayero Prof. Goetting. incredibili studio deductae sunt Tabulae Lunares excellentissimae, quibus Astronomia fere ad summum fastigium evecta est censenda. Cum autem motus lunae, qui hac methodo definitur, neutiquam sit absolutus, sed ad centrum terrae relatus, in hac investigatione simul motus terrae ratio est habenda; quare ut hac methodo uti queamus, praecepta tradi conveniet, quorum ope motus respectivos ad calculum revocare liceat, siquidem motus ejus corporis, cujus respectu aliorum corporum motus aestimantur, fuerit cognitus. Quod argumentum cum non satis dilucide in superioribus Mechanicae Libris sit expositum, hic majori cura illud pertractabo; quo facto ad motus corporum finitorum, quos ibi nondum attigeram, feliciori cum successu progredi licebit.

CAPUT VI.

DE MOTU RESPECTIVO CORPUSCULORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE ACTORUM.

THEOREMA 6.

238. Si corpusculum A a viribus quibuscunque sollicitetur; ejus motus respectu puncti O, quod uniformiter in directum fertur, per easdem vires determinabitur. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Tempusculo dt feratur corpusculum A ob motum insitum per spatium Aa, ob vires autem sollicitantes detorqueatur per spatiolum ab, ita ut ab sit effectus virium tempusculo dt in corpusculo A productus. Interea autem punctum O progrediatur per spatium Oo, ita ut elapso tempusculo dt hoc punctum sit in o, cum ante fuisset in O, corpusculum autem in b; cum ante fuisset in A. Jam ex O ducatur Oα ipsi oa aequalis et parallela;

 item-

itemque $\alpha\mathfrak{C}$ aequalis et parallela ipsi ab; atque respectu puncti O corpusculum videbitur ex A in b pervenisse eodem tempusculo dt, qui motus ita se habebit, ac si ob motum insitum descripsisset spatium $A\alpha$, simulque ex α detorqueretur per spatiolum $\alpha\mathfrak{C}$. Scilicet si corpusculum a nullis viribus sollicitaretur, ac per Aa aequabiliter in directum moveretur, etiam motus respectivus foret aequabilis rectilineus per $A\alpha$, uti supra ostendimus. Nunc autem ob vires sollicitantes, in motu absoluto producitur spatiolum ab, in respectivo autem spatiolum $\alpha\mathfrak{C}$, quod cum illi sit parallelum et aequale, motus respectivus ab iisdem viribus turbatur ac motus absolutus. Hinc si punctum O uniformiter in directum feratur, ejus respectu motus corpusculi A, a quibuscunque viribus sollicitetur, perinde se habebit, ac si punctum O quiesceret, corpusculumque ab iisdem viribus sollicitaretur.

COROLL. 1.

239. Si ergo vires noverimus, quibus corpusculum A sollicitatur, ex iis per praecepta ante tradita non solum ejus motum absolutum, sed etiam respectivum ad punctum O, quod uniformiter in directum progreditur, relatum definire valemus.

COROLL. 2.

240. Atque adeo eaedem formulae differentio-differentiales tam motum absolutum quam respectivum determinabunt: discrimen tantum in integratione cernetur, quae utroque casu rite ad statum initialem est accommodanda.

COROLL. 3.

241. Sive ergo punctum O, cujus respectu motus aestimatur, quiescat, sive moveatur uniformiter in directum, investigatio motus perinde se habet. Scilicet uti effectus inertiae hoc casu non mutatur, ita etiam effectus virium idem manet.

EXPLICATIO. 1.

242. Dum punctum et corpusculum ex o et b in O et $\mathfrak{C}$ mente transferuntur, efficiendum est ut $\mathfrak{C}$ respectu O eundem situm teneat, ac b respectu o, quod cum O et o ut puncta spectentur, rem minime determinare videtur, quandoquidem, ut supra innuimus, sola distantia ob et $O\mathfrak{C}$ situm respectivum contineret. Verum stabilito jam spatio absoluto plagas seu directiones fixas assumere licet, ita ut $O\mathfrak{C}$ non solum ipsi ob aequalis sed etiam in eandem plagam directa statui debeat, id quod evenit, si $O\mathfrak{C}$ ipsi ob aequalis ac parallela accipiatur. Res eodem redit, si secundum prima praecepta loco puncti O corpus extensum assumatur, in quo tria vel quatuor puncta

fixa

fixa concipere liceat: tum autem hoc corpus O, cujus respectu motus alterius aestimatur, ita secundum Oo moveri est censendum, ut singula ejus puncta paribus celeritatibus secundum directiones inter se parallelas ferantur. Tum enim quem situm tenuerit corpusculum *b* respectu quatuor punctorum in corpore *o* assumtorum, eundem situm tenebit corpusculum in *C* translatum respectu eorundem quatuor punctorum, dum corpus adhuc est in O. His notatis manifestum est, motum corpusculi absolutum, quo ex A in *b* transfertur, dum punctum O in *o* progreditur, convenire cum motu respectivo, quo ex A in *C* transfertur. Quod etsi hic tantum de temporis elemento *dt* est ostensum, quoniam idem de omnibus temporis elementis simili modo ostenditur, recte affirmamus in genere, totum motum respectivum hic definitum motui absoluto respondere.

SCHOLION.

243. Quae hic de motu respectivo corpusculi A respectu puncti O sunt tradita ac porro tradentur, alias et potissimum in Astronomia sub titulo *motus apparentis* proponi solent. In puncto scilicet O, cujus respectu motus corpusculi A aestimatur, spectator constituitur, et quaestio ita proponitur, quomodo huic spectatori motus corpusculi sit appariturus. Nam spectator, quomodocunque punctum O, quod est ejus statio, moveatur, motum suum non sentire censetur, ita ut se constanter in eodem loco O persistere arbitretur. Quare cum nunc vidisset corpusculum in A, elapso autem tempusculo *dt* in *C*, corpusculum ipsi interea ex A in *C* translatum videbitur, cum tamen revera ex A in *b* pervenerit; dicitur ergo translatio ex A in *C* *motus apparens*. In casu ergo nostri Theorematis spectator uniformiter in directum promoveri assumiter, atque demonstravimus, motum apparentem corpusculi A per praecepta Mechanica definitum iri, si corpusculum ab iisdem viribus, quae actu in id agunt, sollicitari statuatur. Eaedem nimirum formulae differentio-differentiales tam motum apparentem, quam motum verum exprimient: pro motu autem apparente ita integrari debent, ut initio vel aliquo tempore dato cum motu apparente conveniant. Totum ergo discrimen demum in integratione se exerit.

EXPLICATIO. 2.

244. Vires motum respectivum turbantes propterea illis, quae motum absolutum afficiebant, aequales esse debent, quia effectus seu spatiola *ab* et *αC* aequalia deprehendimus. Atque haec virium aequalitas in calculo facile observatur, si ad genus virium absolutarum pertineant, quae perinde in corpusculum motum agunt atque quiescens: sin autem corpusculum A ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae ab ejus celeritate pendent,

dent, cujusmodi est resistentia fluidorum, quantitas earum virium ex celeritate corpusculi vera, quam in motu absoluto habet, est petenda, eademque in motu respectivo adhibenda. Veluti si corpusculum A in fluido moveretur, resistentia seu vis, quam ab eo patitur, pendebit ab ejus celeritate absoluta, qua spatiolum Aa percurrit, eademque vis in calculum pro motu respectivo introduci debet; atque insignis error committeretur, si resistentiam ex celeritate motus respectivi, qua spatiolum Aα conficitur, definire vellemus. Quem errorem ut evitemus, ipsum fluidum, quatenus absolute quiescit, pro motu respectivo quasi motu aequali et opposito ei, quo punctum O movetur, ferretur, contemplari debemus; tum enim fluidum hoc motu praeditum aeque afficiet corpusculum motu respectivo per Aα progrediens, atque fluidum quiescens afficit corpusculum motu absoluto per Aa latum. Perpetuo autem quoties de motu respectivo quaestio est, non solum corpusculum A, sed totum quasi spatium cum omnibus corporibus, quae in id agere queant, motu aequali et contrario ei, quem punctum O habet, moveri est concipiendum, quandoquidem hoc motu ficto punctum O ad quietem redigitur.

THEOREMA. 7.

Fig. 25. 245. Si duo corpora A et B utcunque moveantur a viribus quibuscunque sollicitata, iisque eodem momento insuper motus aequales secundum eandem directionem imprimantur, motum inter se eundem conservabunt.

DEMONSTRATIO.

Exprimat recta Aa motum corporis A, seu sit spatium ab eo tempusculo dt descriptum; similique modo corpus B tantam habeat celeritatem, qua eodem tempusculo dt describeret spatium Bb: a viribus sollicitantibus autem illud ex a in m, hoc vero ex b in n deflectatur, ita ut nunc elapso tempore dt recta mn referat situm relativum, qui ante recta AB referebatur. Incipiente autem tempusculo dt subito utrique corpori motus aequalis secundum eandem directionem imprimatur, quo solo corpus A in p et B in q tempusculo dt transferretur, ita ut rectae Ap et Bq futurae sint aequales ac parallelae. Accedente autem motu jam insito, si parallelogramma A$a\alpha p$ et B$b\mathfrak{b}q$ compleantur, diagonales Aα et B$\mathfrak{b}$ spatia referent, quae corpora ob utrumque motum tempusculo dt essent percursura. Jam ob rectas $a\alpha$ et $b\mathfrak{b}$ aequales et parallelas, etiam ab et $\alpha\mathfrak{b}$ erunt aequales et parallelae, ita ut situs relativus $\alpha\mathfrak{b}$ post novum motum impressum conveniat cum situ relativo ab. Capiatur porro $\alpha\mu$ aequalis et parallela ipsi am, et $\mathfrak{b}\nu$ aequalis et parallela ipsi bn, et cum μ et ν nunc sint loca corporum

acce-

accedentibus viribus ſollicitantibus, erit quoque $\mu\nu$ aequalis et parallela ipſi mn. Quare manentibus iisdem viribus ſollicitantibus motus impreſſus nihil mutat in ſitu et motu relativo amborum corporum.

COROLL. 1.

246. Hoc etiam ad plura patet corpora: quotcunque enim fuerint, ſi ſingulis ſimul motus aequales et paralleli imprimantur, motus eorum relativus inter ſe non mutabitur, a quibuscunque etiam viribus ſingula ſollicitentur.

COROLL. 2.

247. Motus hic de novo impreſſus eodem redit, ac ſi totum ſpatium cum corporibus motu illo novo abriperetur uniformiter in directum. Compoſitio enim motus hic adhibita cum translatione ſpatii convenit.

SCHOLION. 1.

248. Hic non tam de vera motus impreſſione ſermo eſt, quae utique ſine notabili concuſſione fieri non poſſet, quam de motu, quem corporibus mente tantum imprimi concipimus. Neque enim que in iſto capite traduntur, ad veras mutationes in motu factas ſunt referenda, cum inſtitutum noſtrum hic ſit motus quoscunque abſolutos ad reſpectivos reducere, ita ut formulae tantum oſtendant motum reſpectivum, abſolute nullam plane mutationem paſſo. Atque hinc etiam iſtud Theorema ex praecedente ita demonſtrari poteſt: concipiatur praeter corpora A et B punctum O, quod ſecundum directionem Oo parallelam illi, ſecundum quam corporibus novus motus imprimitur, uniformiter moveatur eadem celeritate, ita ut tempuſculo dt percurſurum eſſet ſpatium $Oo = Ap = Bq$ his parallelum, ſed contra directum. Quoniam igitur ante demonſtravimus, motum reſpectivum corporum A et B reſpectu puncti O iisdem viribus atque abſolutum determinari, evidens eſt hunc motum reſpectivum obtineri, ſi toti ſpatio cum corporibus motus aequalis et contrarius ei, quo punctum O movetur, imprimatur. Hoc autem modo punctum O ad quietem redigitur, corporibus A et B autem ipſe ille motus ſecundum Ap et Bq imprimitur: et quia ea reſpectu puncti O eundem motum retinent, etiam inter ſe eundem motum relativum conſervabunt.

SCHOLION. 2.

249. Quaeſtio de motu quocunque reſpectivo ſeu apparente per calculum determinando eo redit, ut definiatur primo, qualis motus

 cor-

corpori insuper mente saltem imprimi debeat, deinde a qualibus viribus praeter eas, quibus actu urgetur, sollicitari sit intelligendum, ut si hic motus tanquam absolutus tractetur, et per formulas supra traditas exprimatur, ipse motus respectivus, qui desideratur, sit proditurus. Evidens enim est, semper tam in motu insito, quam in viribus sollicitantibus ejusmodi mutationem concipi posse; ut motus hoc modo mutatus cum respectivo quem quaerimus conveniat. Totum ergo hoc negotium duplici mutatione, altera in motu insito, altera in viribus sollicitantibus facta absolvitur, quae autem utraque mente tantum instituitur: unde nulla difficultas ex eo nasci potest, quemadmodum corporibus A et B motus illi secundum Ap et Bq, praeter eos motus, quibus jam feruntur, imprimi debeant. Sufficit enim declarasse, hanc impressionem ita esse intelligendam, ut corpus A celeritate Aa latum, si ipsi insuper celeritas Ap tribuatur, motu per diagonalem $A\alpha$ expresso progredi sit censendum: Haec scilicet motus impressio seu potius additio conformis est regulis supra datis circa resolutionem motus in duos tresve laterales; quae etiam mente tantum instituitur. Talis motus impressio etiam ita referri solet, ut totum spatium cum corporibus in eo contentis motu quodam abripi concipiatur. Atque in priori quidem Theoremate vidimus, si punctum, cujus respectu motum aestimari oporteat, uniformiter in directum progrediatur, pro motu respectivo definiendo nihil in viribus sollicitantibus esse mutandum, sed tantum motum insitum ita mutari debere, ut insuper inprimatur motus aequalis et contrarius ei, quo punctum illud moveatur.

THEOREMA. 8.

Fig. 26. 250. Si corpuscula A, B, C, utcunque moveantur a viribus quibuscunque sollicitata, eaque insuper secundum directiones parallelas a viribus ipsorum massis proportionalibus sollicitentur, eorum situs relativus non turbabitur.

DEMONSTRATIO.

Fuerint nunc corpuscula in A, B, C, quae tam ob motum insitum quam vires sollicitantes tempusculo dt pervenirent in a, b, c, quibus punctis jam eorum situs relativus definitur. Concipiamus autem ea interea praeter istas vires sollicitari singula secundum directiones parallelas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ a viribus, quae sint ipsorum massis proportionales, eaque jam non in a, b, c, reperientur, sed in α, β, γ, ita ut spatiola $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ futura

sint

sint inter se parallela et aequalia: atque evidens est, punctorum α, β, γ situm relativum inter se eundem fore ac punctorum a, b, c ubi essent futura, si hae novae vires non accessissent.

COROLL. 1.

251. Si ergo corpuscula A, B, C, quovis instanti praeter vires quibus actu urgentur, a viribus ipsorum massis proportionalibus secundum directiones inter se parallelas sollicitentur, ad quodvis tempus eundum inter se situm relativum tenebunt, ac si istae novae vires abfuissent.

COROLL. 2.

252. Motus igitur solis ac planetarum relativus inter se non immutantur, si singula haec corpora praeter vires, quibus actu sollicitantur, a novis viribus ipsorum maassis proportionalibus impelli concipiantur secundum directiones inter se parallelas.

COROLL 3.

253. Si istae vires adjectae ita assumantur, ut ea, quae in corpusculum A agit, aequalis sit et contraria ei, qua actu sollicitatur, hujus motus non immutabitur: quod si singulis momentis fieri concipiamus, corpusculum A in statu suo permanebit, et uniformiter in directum promovebitur.

EXPLICATIO.

254. Dubium hinc oriri potest, an etsi puncta α et β eundem situm inter se teneant ac puncta a et b, deinceps non alius situs relativus sit proditurus? Ad quod diluendum seponamus primo vires, quibus haec corpuscula actu sollicitantur, ac remotis etiam viribus adjectis sequenti tempusculo corpuscula pervenirent in a' et b', ut esset $aa' = Aa$ et $bb' = Bb$; sin autem hae vires pro tempusculo praecedente dt admittantur, pervenient in α' et β', ut sit $\alpha\alpha' = A\alpha$ et $\beta\beta' = B\beta$, sicque erit $b'\beta'$ aequalis et parallela ipsi $a'\alpha'$, ita ut situs relativus punctorum α', β' idem sit qui punctorum a', b'. Recte quidem hic objiceretur, spatiola $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ perperam ipsis $A\alpha$ et $B\beta$ aequalia assumi, cum ob actionem virium celeritates sint mutatae, sed quia mutatio utrinque est similis, nihilominus spatiola $a'\alpha'$ et $b'\beta'$ inter se manebunt aequalia et parallela, id quod sufficit, etiamsi non sint ipsorum $a\alpha$ et $b\beta$ praecise dupla. Quaecunque autem vires per alterum hoc tempusculum dt in ambo corpuscula agant, prius A

 aeque

aeque ex α' detorquebitur, atque ex a', et posterius B aeque ex β' atque ex b': sicque etiam sive novae vires massis propotionales accesserint sive secus, idem adhuc situs relativus conservabitur. Ponamus enim, a viribus propriis corpusculum A ex a' in m transferrit, idemque ex α' in μ, transferetur, ut sit $a'm$ aequale et parallelum ipsi $\alpha'\mu$; simili modo si corpusculum B a propriis viribus ex b' in n transfertur, idem ex β' in ν transferetur, ut sit $\beta'\nu$ aequale et parallelum ipsi $b'n$. Cum igitur puncta μ et ν eundem situm relativum teneant, quem puncta m et n, patet etiam, temporis successu a viribus illis insuper adjectis situm relativum non mutari.

PROBLEMA 19.

Fig. 25. 255. Si corpusculum B moveatur utcumque a viribus sollicitatum, ejus respectu determinare motum respectivum corpusculi A, quod etiam a viribus quibuscunque sollicitatum utcunque moveatur.

SOLUTIO.

Imprimatur initio utrique corpori motus aequalis et contrarius ei, quo tunc corpusculum B fertur, ac primo saltem momento corpusculum in quietem redigetur: ambo autem corpora motu relativo inter se perinde incedent, ac si iste motus communis illis non fuisset impressus: quin etiam cum tantum in statu initiali haec mutatio sit facta, utriusque motus subsequens iisdem formulis exprimetur. Corpusculum vero B, quatenus actioni virium est subjectum, deinceps quidem movebitur; verum si id continuo insuper a viribus his contrariis et aequalibus agitur, concipiamus, ut illarum effectus destruatur, id perpetuo in quiete perseverabit. Quare ne motus relativus turbetur, concipiamus etiam corpusculo A singulis temporis momentis similes vires applicari, quae scilicet sint contrariae illis, quibus corpusculum B sollicitatur, ad easque se habeant ut massa A ad massam B. Hoc modo corpusculum B plane ad quietem redigetur, motu alterius A respectu hujus non mutato, eritque ergo iste motus ipsius A ejus motus respectivus, qualis spectatori in B constituto esset appariturus. Ad hunc igitur motum respectivum per calculum determinandum, corpusculum A a duplicis generis viribus sollicitari est considerandum, primo scilicet ab iis ipsis viribus, quibus revera sollicitatur: deinde vires, quibus corpusculum B sollicitatur, in ratione massarum B ad A augeantur vel minuantur, atque secundum directiones contrarias corpusculo A insuper applicatae intelligantur. Ex his viribus motus corpusculi A, quasi esset absolu-

solutus, per praecepta ante exposita determinetur, atque obtinebitur, ejus motus respectivus quaesitus.

COROLL. 1.

256. Si ergo elapso tempore t corpusculum A sollicitetur a vi $= P$, corpusculum B vero a vi $= Q$, hinc capiatur vis $= \frac{AQ}{B}$, quae insuper corpusculo A applicetur in directione contraria ei, qua vis Q in corpusculum B agit.

COROLL. 2.

257. Quodsi ex his viribus, corpusculo A quovis tempore applicatis, formulae differentio - differentiales ejus motum definientes colligantur, integratio ad statum initialem, qui ut cognitus spectatur, est accommodanda, dum scilicet constantes per integrationes ingressae ex hoc statu determinantur.

SCHOLION 1.

258. Ope hujus regulae motus lunae, qualis ex centro terrae spectaretur, definiri solet; etsi enim corpora coelestia ob vastam magnitudinem hinc excludi videntur, tamen infra docebitur, ea perinde moveri, ac si eorum massae in cujusque centro gravitatis essent collectae, ita ut instar punctorum considerari possint. Ad motum ergo hunc lunae apparentem definiendum, non sufficit vires nosse, quibus luna continuo sollicitatur, sed etiam vires diligenter sunt inquirendae, quarum actioni ipsa terra subjicitur. Has vires deinde in ratione massae terrae ad massam lunae diminui oportet, haeque insuper lunae in directionibus contrariis iis, quibus in terram agunt, applicatae concipi debent; atque ex his viribus junctim sumtis motus lunae respectivus, qualis spectatori in centro terrae constituto esset appariturus, determinari debet. Simili modo si centrum solis non quiescat, motusque planetarum primariorum respectu centri solis sit definiendus, omnes vires, quas Sol subit, praecepto modo insuper in planetas transferri debent. Unde patet, usum hujus problematis per universam Astronomiam Theoreticam esse amplissimum: verum etiam inde in investigationem aliorum motuum, ubi saepenumero motus respectivos nosse expedit, maxima subsidia redundant.

SCHOLION 2.

259. Atque haec sunt, quibus ea, quae in superioribus libris de motu punctorum exposui, partim illustranda partim supplenda sunt visa, ubi equidem non solum motus principia clarius exposuisse et confirmasse videor, sed etiam eorum applicationem ad quosvis casus non mediocriter sublevavi, reductionemque ad mensuras absolutas faciliorem reddidi. Tum vero etiam doctrinam de motu respectivo, in illis libris fere penitus neglectam, hic diligentius exponendam putavi, quoniam ea etiam in sequentibus uberrimum usum praestabit. Progredior itaque ad eas Mechanicae partes, quas in illis libris plane non attigeram, ac primo quidem occurrunt corpora rigida, quorum figura nullius mutationis est capax, quorum motus evolvi oportebit, tam quando sibi sunt relicta, quam a viribus quibuscunque sollicitata. Tum vero demum licebit has investigationes ad motus corporum flexibilium, elasticorum atque adeo fluidorum prosequi: quorsum etiam referri debent motus ex concursu plurium corporum cujusque indolis oriundi. Quae diversa genera si perpendamus, intelligemus in Mechanica amplissimum campum aperiri nostris studiis, cujus cultura largissimam messem polliceatur.



TRACTA-

TRACTATUS

DE

MOTU CORPORUM RIGIDORUM.

CAPUT I.
DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM RIGIDORUM.

DEFINITIO. 1.

260.

Corpus rigidum vocatur, cujus figura nullam mutationem patitur; seu cujus singula elementa constanter easdem inter se distantias conservant.

COROLL. 1.

261. Cognito ergo loco quaternorum punctorum corporis rigidi, ejus situs innotescit, cum inde omnium reliquorum punctorum loca determinentur: dummodo quatuor illa puncta non sint in eodem plano.

COROLL. 2.

262. Plerumque etiam ad situm corporis rigidi cognoscendum sufficit positionem trium ejus punctorum nosse, dummodo non sint in directum sita: quanquam enim hoc modo duplex relinquitur situs, saepissime uter locum habeat, aliunde patet.

EXPLICATIO.

263. Corpora rigida non ita definio, ut eorum figura nullam plane mutationem pati possit; quandoquidem constat, nulla in mundo dari corpora tam dura, quorum figurae alterandae nullae omnino vires pares existant, cum etiam durissimus adamas diffringi queat. Ad classem ergo corporum rigidorum ea omnia refero corpora, quae dum moventur, actu nullam mutationem in figura sua patiuntur, seu quae vires, quarum actionem revera subeunt, sine ulla figurae suae mutatione sustinere valeant,

 etiam-

etiamsi majoribus viribus non resisterent. Ita in corporibus, quorum motus hic contemplari institui, ejusmodi structuram partiumque nexum statuo, qui a viribus ea actu sollicitantibus turbari nequeat, id minime curans, quando ab aliis viribus afficerentur. Hinc ad vires sollicitantes hic potissimum erit attendendum, quarum respectu corpora pro rigidis erunt habenda, quorum compages earum actioni satis resistat, etiamsi eadem respectu aliarum virium minime pro rigidis essent habenda. Fieri itaque poterit, ut corpora admodum mollia ac debilia nobis sint rigida, alia vero per se multo duriora hinc excludi debeant. Quare dum motus hujusmodi corporum investigamus, in vires, quibus eorum compages partiumque connexio afficitur, sedulo inquiri conveniet, ut intelligamus, quanta firmitate sit opus, ut figura conservetur. Corpus igitur ut rigidum spectabimus, quando nexus inter ejus partes satis est firmus, ut ne duo quidem elementa a viribus, quas actu sustinet, vel propius ad se invicem cogi, vel longius a se invicem divelli queant.

SCHOLION.

264. Corpus ergo rigidum alium motum recipere nequit, nisi quo omnia ejus puncta easdem perpetuo inter se distantias conservant: nihilo vero minus tale corpus infinitorum motuum est capax, dum enim adeo unum aliquod ejus punctum quiescit, aliud per circumferentiam sphaerae circumferri potest, et quomodocunque hoc moveatur, tertium aliquod punctum sive celerius sive tardius moveri potest, ut tamen ab illis duobus debitas distantias servet. Ex quo intelligitur, si nullum punctum quiescat, adhuc multo majorem fore motuum multiplicitatem, qui quidem in corpore inesse possint: cognito autem trium punctorum non in directum sitorum motu, reliquorum omnium hoc est motus totius corporis innotescit. Inter omnes autem hos motus is est simplicissimus, quo singula corporis puncta secundum directiones inter se parallelas paribus celeritatibus quovis temporis momento promoventur: tali enim motu situs relativus omnium particularum neutiquam turbatur. Atque hoc motus genus, quod in omnia corpora cadit, accuratius contemplemur.

DEFINITIO. 2.

265. *Motus progressivus* est, quo singula corporis puncta paribus celeritatibus secundum directiones inter se parallelas quovis temporis momento promoventur.

COROLL.

COROLL 1.

266. Cognito ergo motu unici puncti omnium punctorum motus utpote illi aequalis innotescit; singula enim puncta quovis temporis momento secundum eandem directionem et eadem celeritate feruntur, atque illud punctum.

COROLL 2.

267. Sive ergo unum aliquod punctum lineam rectam sive curvam motu quocunque describit, omnia plane puncta in aequalibus lineis sive rectis sive curvis simili modo movebuntur.

COROLL 3.

268. Tali motu, sive sit rectilineus sive curvilineus, distantiae binorum quorumque punctorum corporis non mutantur. Quin etiam rectae bina quaeque puncta jungentes perpetuo sibi manent parallelae.

SCHOLION.

269. Hic motus tanquam simplicissimus, et cujus omnia corpora sunt capacia, primus se considerandum offert, eumque in motibus corporum coelestium primo animadvertimus. Dum enim ea ut puncta spectamus, calculum ita instituimus, quasi solo motu progressivo per coelos ferrentur, ac deinceps denum ipsis insuper motum gyratorium tribuimus: ubi quidem prior motus *periodicus*, posterior *vertiginis* vocari solet. Quando autem corpori solum motum progressivum sine ullo adjuncto gyratorio tribuimus, rem ita concipimus, ut rectae bina quaeque puncta corporis jungentes perpetuo sibi parallelae seu easdem coeli plagas versus directae maneant. At quoties haec conditio in quopiam motu locum non habet, illud corpus non motu progressivo solo seu puro moveri, sed insuper motus quidam gyratorius admisceri censetur, cujusmodi admixtio quomodo fiat, infra fusius exponetur. Ceterum hinc statim patet, lunam, quoniam terrae semper fere eandem faciem obvertit, non motu progressivo puro promoveri, sed ei motum quendam gyratorium admisceri. Quae ergo hoc capite tradentur, de motu progressivo puro, etiamsi vox *puri* non adjicitur, intelligenda sunt, quando enim gyratio quaedam superadditur, motus in aliud genus transit.

THEOREMA 1.

270. Corpus, cui semel fuerit impressus motus progressivus, ob inertiam perpetuo hoc motu uniformiter in directum progredi perget, nisi a caussis externis turbetur.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur corpus in minima elementa divisum, et cum singula aequales celeritates secundum directiones parallelas acceperunt, dum in statu suo perseverare conantur, situm relativum inter se non mutant. Omnia ergo simul motum suum uniformiter in directum prosequi possunt, sine ullo penetrationis periculo: hincque nulla nascetur vis, quae cujusquam elementi statum immutare tendat. Singula igitur elementa perinde motum suum continuabunt, ac si a se invicem essent soluta, nulloque nexu inter se cohaererent. Quare nisi externae causae accedant, corpus, quod semel acceperit motum progressivum, hoc motu perpetuo uniformiter in directum progredi perget.

COROLL. 1.

271. Quemadmodum ergo corpus finitum, si semel quieverit, quiescere pergit, ita si semel motum progressivum acceperit, eundem perpetuo conservat. Sicque perseverantia in eodem statu etiam ad corpora finitae magnitudinis patet, dummodo motus fuerit progressivus.

COROLL. 2.

272. Quia a continuatione hujus status partium corporis nexus nullam vim patitur, conservatio figurae etiam nullam firmitatem exigit, respectu ergo talis motus omnia corpora ut rigida considerari possunt.

COROLL. 3.

273. Inertia ergo est causa, quod omnia corpora, ne fluidis quidem exceptis, quorum particulae nullo vinculo inter se connectuntur, vel in eodem statu quietis, vel in eodem statu motus progressivi perseverent.

EXPLICATIO.

274. Veritas Theorematis hoc nititur fundamento, quod singula elementa motum suum libere prosequi possint, neque ullum impediat, quo minus reliqua in suo statu perseverent. Cujus ratio clarius percipietur, si casum contemplemur, quo corpori initio motus quidam gyratorius fuerit impressus, ita ut alia elementa celerius alia tardius moveri inceperint: tum enim si singula elementa suum quaeque motum continuarent, mox a se invicem separarentur ac dissiparentur, sicque corporis compages

pages dissolveretur. Hoc ergo casu nexus particularum obstaret, quo minus singula elementa motum impressum prosequi possent. Quod cum non eveniat, si singulis elementis motus aequales secundum directiones parallelas fuerint impressi, quae est conditio motus progressivi, nulla etiam causa adest, cur cujusquam elementi status mutaretur. Quin etiam nullum elementum in motu suo mutationem pati posset, quin simul status reliquorum perturbaretur. Ex quo necesse est, ut corpus, quod semel hujusmodi motum progressivum acceperit, eodem motu perpetuo uniformiter in directum progredi debeat. Ubi imprimis notandum est, in tali motu compagem partium nullam vim sustinere, ita ut etiamsi inter se omni nexu distituerentur, tamen easdem perpetuo distantias inter se essent conservaturae. Quare cum nulla hinc gignatur vis figuram corporis mutare tendens, cui rigiditas resistere debeat, omnia corpora respectu talis motus tanquam rigida spectari possunt.

THEOREMA. 2.

275. Si corporis motu progressivo lati singula elementa viribus, quae massis eorum sint proportionales, secundum directiones inter se parallelas sollicitentur, eorum situs relativus non mutabitur, et singula elementa motum quaeque suum libere continuabunt.

DEMONSTRATIO.

Quia vires singula elementa sollicitantes ipsorum massis statuuntur proportionales, effectus eodem tempusculo producti erunt aequales, et quia directiones virium sunt inter se parallelae, ab actione virium situs partium relativus non mutabitur, et singula elementa perinde movebuntur suis quaeque viribus obsequentia, ac si a se invicem essent dissoluta. Omnia scilicet elementa quovis momento aequaliter movebuntur, ita ut motus totius corporis aequalis sit futurus motui, quo quodque ejus elementum, si esset solitarium, moveretur; ideoque motus corporis erit progressivus.

COROLL. 1.

276. Neque ergo hoc casu, etiamsi vires adsint sollicitantes, compages partium ullam vim sustinet. Ex quo si etiam corpus esset fluidum, ejusque partes nullo nexu invicem cohaererent, tamen figuram suam conservaret, et pro rigido haberi poterit.

COROLL. 2.

277. Prout ergo vires singulis temporis momentis fuei ratae, singula corporis elementa in lineis vel rectis vel curvis tur, ac, si unius motus erit determinatus, simul motus toti innotescit.

COROLL. 3.

278. Corpus autem ejusmodi viribus sollicitari ponitur, qi gula corporis elementa ita agunt, ut sint massis eorum proporti secundum directiones inter se parallelas agant. Deinde requiritu pus initio vel fuerit in quiete, vel motum acceperit progressivu quo singula ejus elementa celeritatibus aequalibus secundum eand ctionem moveri coeperint.

SCHOLION.

279. Si quis dubitet, an dentur ejusmodi vires, quae in sing poris elementa ita agant, ut sint massis eorum proportionales, si ea secundum eandem directionem sollicitent? exemplum quidem tis adduci posset, quae, ut jam supra notavimus, singula corpor menta et quidem pro ratione massae afficit. Verum haec propriet tum in corporibus tam exiguae molis admitti potest, ut prae distantia tro terrae pro nihilo haberi queat: si enim corpus insignem habeat m ejus elementa, quae a centro terrae magis minusve distant, inaeq actiones gravitatis subibunt; deinde etiam singularum virium directi quippe quae circa centrum terrae convergunt, non amplius pro paral haberi possunt. Sed hic minime de eo quaeritur, an ejusmodi vires, les in Theoremate assumsimus, in mundo existant? sufficit enim, veritatem pro talibus viribus etsi forte fictis agnovisse. Quod autem his viribus demonstravimus, idem etiam de aliis, quae his aequivalea valebit; atque hinc erat exordiendum, si quidem effectum quarumcunq virium in corpora rigida agentium indagare velimus. Quales vero vir his assumtis aequivaleant, posito scilicet corpore rigido, in Statica docem unde investigatio unius vis illis aequivalentis est haurienda. Eatenus autem tantum reductio omnium istarum infinitarum virium ad unicam habet locum, quatenus corpus est rigidum, mutationique figurae resistit, si enim omnia ejus elementa a se invicem prorsus essent dissoluta, loco harum virium alias, quae ipsis perfecte aequivalerent, substituere non liceret. Nunc igitur

ratio rigiditatis, seu firmitatis, qua partes corporis invicem connexae fuerint, in computum ingredietur.

PROBLEMA. 1.

180. Si corporis rigidi singula elementa secundum directiones inter [para]llelas a viribus sollicitentur, quae sint ipsorum massis proportiona[les, i]nvenire unicam vim omnibus illis viribus junctim sumtis aequiva[lentem].

SOLUTIO.

Referatur corpus rigidum ad ternas directrices OA, OB, OC, inter [se no]rmales, et sit in Z ejus elementum quodcunque, cujus massa pona[tur] dM vocata totius corporis massa $= M$. Statuantur pro puncto Z [tres] coordinatae directricibus parallelae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. [Sollic]itentur ergo singula corporis elementa a viribus ipsorum massis pro[porti]onalibus secundum directiones directrici OC parallelas, ita ut elemen[tum] dM in Z sollicitetur in directione Zv, vi $= \lambda dM$. Quia omnes istae [vires] sunt inter se parallelae, vis omnibus aequivalens eandem tenebit dire[ctio]nem eritque summae omnium aequalis, ita ut sit $= \lambda M$. Designet [recta] GV ipsi OC parallela hanc vim aequivalentem $= \lambda M$, cujus positio [ex p]uncto G, ubi ea per planum AOB transit, innotescet. Ductis ergo [ex G] rectis GE et GF directricibus OB et OA parallelis, vocetur $OE = e$ [et O]F $= f$, atque ex Statica constat, momentum vis GV respectu cujusvis [axis] aequale esse debere momentis singularum virium respectu ejusdem axis [sim]ul sumtis. Iam respectu axis OA vis $Zv = \lambda dM$ momentum est $\lambda y dM$ [om]niumque momentorum summa $= \lambda \int y dM$, quae aequalis esse debet mo[me]nto vis GV, quod est $= \lambda M f$, unde fit $f = OF = GE = \dfrac{\int y dM}{M}$. [Si]mili modo respectu axis OB erit vis $Zv = \lambda dM$ momentum $= \lambda x dM$, [hu]jusque integrale $= \lambda \int x dM$, quod aequale esse debet momento vis GV [$=$] λM respectu ejusdem axis, quod est $\lambda M e$, unde fit $e = OE = GF$ $= \dfrac{\int x dM}{M}$. Atque his formulis vera positio vis aequivalentis GV deter[mi]natur, cujus quantitas est $= \lambda M$, directio parallela directrici OC, ac distat a plano AOC intervallo $GE = \dfrac{\int y dM}{M}$, a plano autem BOC intervallo $GF = \dfrac{\int x dM}{M}$. Sicque una habetur vis $GV = \lambda M$ omnibus viribus

bus elementaribus Zv aequivalens, si modo corpus fuerit rigidum, uti in Statica assumitur.

COROLL. 1.

281. Dum ergo vires elementares Zv sint massulis proportionales et inter se parallelae, vis omnibus aequivalens GV eandem habet positionem, sive illae vires sint majores sive minores, littera enim λ non ingreditur in distantias GE et GF.

COROLL. 2.

282. Quia vis aequivalentis $GV = \lambda M$ directio est rectae OC parallela, si modo unicum punctum veluti I constaret, per quod transeat, ejus positio perfecte determinaretur. Ex formulis autem pro GE et GF inventis patet, directionem GV per centrum gravitatis corporis transire.

COROLL. 3.

283. Vis igitur $GV = \lambda M$ totum corpus, si modo motu progressivo puro feratur, perinde afficiet, ac vis quaelibet elementaris $Zv = \lambda dM$ elementum corporis dM: totiusque corporis motus manebit progressivus, dum singula ejus elementa pari motu proferentur.

SCHOLION.

284. Quoniam, si singulae vires elementares sunt directrici OC parallelae, media directio GV distat a plano AOC intervallo $GE = \frac{\int y dM}{M}$, et a plano BOC intervallo $GF = \frac{\int x dM}{M}$: ita si vires elementares massulis quoque elementorum proportionales sint parallelae directrici OB, media directio eidem erit parallela, et a plano BOC distabit intervallo $= \frac{\int x dM}{M}$, et a plano AOB intervallo $= \frac{\int z dM}{M}$. Simili modo si vires elementares essent parallelae directrici OA, media directio eidem foret parallela, et a plano AOB distaret intervallo $= \frac{\int z dM}{M}$, et a plano AOC intervallo $= \frac{\int y dM}{M}$. Quare cum hae mediae directiones omnes tam a plano AOB, quam AOC et BOC aequis intervallis distent,

ſtent, eae ſe in communi puncto ſecabunt: quod punctum ſi ſit I, erit ejus ſitus ita comparatus, ut ſit:

$$OE = \frac{\int x dM}{M};\ EG\ \frac{\int y dM}{M};\ GI = \frac{\int z dM}{M}.$$

Puncto ergo hoc I ſemel invento, ſi ſingula corporis elementa a viribus ipſorum maſſis proportionalibus ſecundum directionem communem quamcunque ſollicitentur, vis illis omnibus aequivalens per hoc punctum I tranſibit. Et quia vis aequivalens ſummae omnium virium elementarium eſt aequalis, et eandem directionem tenet, ejus poſitio per punctum I perfecte determinatur. Convenit autem hoc punctum cum eo, quod vulgo *centrum gravitatis* vocatur, cujus convenientiae ratio manifeſta eſt, quoniam ſingula elementa maſſis proportionaliter gravia, et directiones gravitatis inter ſe parallelae aſſumuntur. Quoniam vero haec hypotheſis veritati adverſatur, et punctum I minime a gravitate pendet, ſed in omnibus corporibus locum habet, id alio nomine appellari praeſtabit.

DEFINITIO 3.

285. *Centrum maſſae* ſeu *centrum inertiae* eſt punctum in quovis corpore, circa quod ejus maſſa ſeu inertia quaquaverſus aequaliter eſt diſtributa ſecundum aequalitatem momentorum.

EXPLICATIO.

286. Centrum maſſae ſeu inertiae idem eſt punctum, quod vulgo centrum gravitatis vocatur: cum autem hoc punctum ita omnibus corporibus ſit eſſentiale, ut iis ob inertiam ſolam conveniat, gravitas autem pro vi extrinſecus in corpora agente ſit habenda: malui ei nomen centri maſſae ſeu inertiae tribuere, ut intelligatur, id per ſolam inertiam determinari. Quod autem de aequali diſtributione maſſae circa hoc centrum commemoravi, minus facile explicatur. Optima explicatio ſine dubio ex regula, qua hoc centrum invenitur, eſt petenda. Scilicet referatur corpus ad ternas directrices OA, OB, OC inter ſe normales, quibus parallelae conſtituantur coordinatae, tam pro quovis corporis elemento, quam pro centro inertiae I, quod quaeritur. Sit maſſa totius corporis $= M$, cujus quodpiam elementum conſideretur in Z, ejus maſſula poſita $= dM$, ac vocatis coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ſitus centri inertiae I ita determinatur, ut ſit $OE = \frac{\int x dM}{M}$;

$EG = \frac{\int y dM}{M}$ et $GI = \frac{\int z dM}{M}$, his integralibus per totum corpus extensis.

Quod si ergo punctum O in ipso centro inertiae I capiatur, haec tria integralia $\int x dM$, $\int y dM$, et $\int z dM$ evanescent; unde hanc centri inertiae indolem discimus, ut si corpus secetur plano quocunque per centrum inertiae transeunte, singula elementa corporis per distantias ab hoc plano multiplicata utrinque eandem summam producant. Atque ita intelligenda sunt, quae de aequali materiae distributione circa centrum massae seu inertiae secundum aequalitatem momentorum sunt dicta.

COROLL. 1.

287. Si ergo singula corporis elementa secundum eandem directionem a viribus ipsorum massulis proportionalibus sollicitentur, iis una vis summae omnium aequalis et parallela, atque in centro inertiae applicata aequivalebit, si quidem corpus fuerit rigidum.

COROLL. 2.

288. Ac vicissim si corpori rigido in centro inertiae applicata fuerit vis quaecunque, ea quasi per omnia corporis elementa massis proportionaliter distributa considerari poterit. Atque ob aequivalentiam effectus in motu turbando erunt aequales.

SCHOLION.

289. Quodsi ergo corpus rigidum a vi sollicitetur, cujus directio transeat per ejus centrum inertiae, illi si quieverit motus progressivus imprimetur, sin autem jam motu progressivo feratur, ejus quidem vel celeritas vel directio vel utraque mutabitur, verum tamen ita ut motus maneat progressivus. Hoc est, si in corpore ductas concipiamus lineas rectas quascunque, eae durante motu perpetuo sibi manebunt parallelae, quod est criterium motus progressivi. Quomodo ergo hujusmodi motum corporis rigidi determinari conveniet, in sequente problemate videamus. Interim cavendum est, ne aequivalentia virium hic monstrata ad corpora non rigida extendatur, quandoquidem fundamentum ejus, quod in aequilibrio vectis est positum, corrueret, si vectis a viribus posset inflecti. Quocirca hic corpora tam rigida assumo, ut a viribus sollicitantibus nullam mutationem in figura sua patiantur; ac deinceps investigabo, quam firma eorum compages esse debeat, ut actionem virium sine ulla figurae mutatione sustinere valeant.

PRO-

PROBLEMA 2.

290. Si corpus rigidum, quod initio vel quieverit, vel motum progressivum acceperit, continuo sollicitetur a viribus, quarum media directio per ejus centrum inertiae transeat; ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Quia vis, qua corpus sollicitatur, vel si plures fuerint, earum media directio perpetuo per ejus centrum inertiae transit, motus quomodocunque tam ratione celeritatis quam directionis mutabitur, tamen usque manebit progressivus. Ad eum ergo cognoscendum sufficit, motum unici cujusdam ejus puncti definivisse: quam enim positionem corpus initio respectu hujus puncti tenuerit, eam deinceps perpetuo servabit, si quidem uti assumimus, initio vel quieverit, vel motum progressivum purum acceperit. Quaeri igitur potissimum conveniet motum ejus centri inertiae, quoniam vis sollicitans tanquam ei applicata concipi potest. Sit itaque massa corporis $= M$, et elapso tempore $= t$ sollicitetur a vi $= V$, seu si a pluribus simul sollicitetur, sit V vis iis omnibus aequivalens, directionem habens, per centrum inertiae transeuntem. Quodsi jam in hoc centro elementum corporis, cujus massula sit $= iM$, denotante i fractionem infinite parvam, concipiatur, ea a simili particula iV totius vis sollicitari est censenda. Verum ex doctrina sollicitationum ante tradita patet, massam iM a vi iV perinde affici, ac massam M a vi V, quoniam ratio tantum massae ad vim in calculum ingreditur. Rem ergo ita concipere licet, ac si tota corporis massa M in ejus centro inertiae collecta, eique vis tota V applicata esset; ex quo problematis hujus solutio a superioribus de motu puncti datis non discrepabit. Scilicet ut rem generalissime complectamur, referamus motum ad ternas directrices OA, OB et OC, inter se normales existentibus $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$. Deinde vis sollicitans V pariter secundum has tres directiones resolvatur, unde orientur vires secundum $SP = P$; secundum $SQ = Q$ et secundum $SR = R$. Hinc sumto elemento temporis dt constante totus motus his tribus formulis determinabitur: Fig. 21.

$$Mddx = 2gPdt^2;\ Mddy = 2gQdt^2;\ Mddz = 2gRdt^2$$

quae quomodo quovis casu sint tractandae, jam supra est expositum.

COROLL. 1.

291. Casu ergo, quo corpus rigidum motu progressivo profertur, ideoque media directio virium sollicitantium per ejus centrum inertiae

transfit; totam corporis massam tanquam in centro inertiae collectam eique vim aequivalentem applicatam concipere licet.

COROLL. 2.

292. Cum ad datum tempus locus centri inertiae fuerit inventus, etiam totius corporis situs innotescet, quippe qui respectu centri inertiae idem erit perpetuo, qui fuerat initio: eaedem enim corporis partes semper ad easdem mundi plagas spectabunt.

COROLL 3.

293. Inventa porro ad quodpiam tempus celeritate centri inertiae, simul omnia corporis puncta pari celeritate movebuntur, omniumque directiones inter se erunt parallelae: ita ut totius corporis motus ex motu centri inertiae perfecte cognoscatur.

SCHOLION. 1.

294. Omnia ergo, quae de motu libero punctorum seu corpusculorum infinite parvorum in superioribus libris sunt tradita, etiam pro motu corporum rigidorum progressivo valent, ideoque cum in se nimis sterilia videantur, nunc amplissimum usum habebunt, cum eo universum genus motuum progressivorum sit referendum. Quoties nimirum corpora rigida motu progressivo incedunt, quod fit, si virium sollicitantium media directio per eorum centrum inertiae transit, eaque initio vel quieverint, vel motu progressivo fuerint impulsa, eorum motus per Theoriam motus punctorum jam cumulate expositam determinari poterit; unde hanc tractationem fusius persequi superfluum foret. Hinc autem statim diximus, si virium corpora coelestia sollicitantium media directio per eorum centrum inertiae transeat, eaque semel motu progressivo puro ingredi coepissent, ea perpetuo talem motum esse conservatura, neque unquam motum vertiginis esse adeptura. Quare cum motu vertiginis gyrari observentur, necesse est, ut ipsis talis motus jam ob initio fuerit impressus, vel ut media directio non perpetuo per eorum centrum inertiae transeat, quod posterius in luna evenire merito suspicamur.

SCHOLION. 2.

295. Ne autem, dum corpora talibus viribus sollicitata moventur, in figura sua mutationem patiantur, eorum compagem satis firmam esse oportet, quare quantam vim ea sustineat, erit definiendum. Ac primo

mo quidem jam animadvertimus, si singulis corporis elementis vires ipsorum massulis proportionales secundum eandem directionem essent applicatae, compagem corporis nullam plane vim sustinere, sed figuram, etiamsi partes a se invicem penitus essent dissolutae, conservatum iri. Quas autem vires nunc ostendimus illis aequivalere, id tantum ratione motus est intelligendum, et quatenus ab illis sunt diversae, eatenus etiam figuram mutare tendent; quod ne eveniat, compagem satis firmam esse oportet. Ex quo jam perspicuum est, judicium, quanta compagis firmitate opus sit, eo reduci, ut vires, quibus corpus actu sollicitatur, cum viribus illis elementaribus, quibus aequivalent, comparentur, quoniam quo magis ab iis fuerint diversae, eo plus conferent ad compagem destruendam. Quare quo clarius hoc argumentum evolvere queamus, vires illas, etiamsi ratione motus aequipolleant, sollicite a se invicem distingui conveniet, quem in finem sequentem definitionem praemitto.

DEFINITIO. 4.

296. *Vires elementares* sunt vires, quae singulis corporis elementis seorsim applicatae in iis eandem status mutationem producerent, quam eadem in motu corporis revera subeunt.

EXPLICATIO.

297. Has vires elementares sollicite distingui convenit a viribus corpus actu sollicitantibus. Cum enim cognovimus motum corporis a viribus sollicitantibus productum, discipiendum est, quantum cujusvis elementi status turbetur: tum singula elementa quasi seorsim existerent considerentur, facileque ex praecedentibus vires definientur, quae iis applicatae eandem status mutationem producerent: atque istae vires junctim sumtae sunt eae, quas in posterum sub nomine virium elementarium sum complexurus. Ex quo quidem statim liquet, has vires elementares junctim sumtas esse aequivalentes viribus actu sollicitantibus, quoniam ambae in motu corporis eandem mutationem pariunt. Nempe si elementum corporis, cujus massula sit dM, motu vel vero vel resoluto secundum quandam directionem, in qua tempusculo dt spatiolum dx describat, ita acceleretur, ut sumto dt constante incrementum spatioli dx prodeat ddx: tum vis secundum eandem directionem urgens erit $= \frac{dMddx}{2gdt^2}$. Unde si motus elementi secundum binas vel ternas

directiones fuerit resolutus, vis elementaris ejus statum perturbans colligetur, sicque innotescent vires elementares pro quavis motus mutatione.

COROLL. 1.

298. Vires ergo elementares simul sumtae viribus actu sollicitantibus aequivalent, ac praeterea ita sunt comparatae, ut ab iis compages corporis nullam vim patiatur; propterea quod ab iis singula elementa, perinde quasi sola adessent, afficiuntur.

COROLL. 2.

299. In motu igitur progressivo vires elementares sunt eae vires, quae singulis elementis eandem motus mutationem inducunt, quam totum corpus a viribus sollicitantibus patitur.

PROBLEMA. 3.

300. Si corpus a viribus quibuscunque sollicitatum, quarum media directio per ejus centrum inertiae transit, motu progressivo libere moveatur, determinare vires, quas ejus compages sustinet, ne solvatur.

SOLUTIO.

Fig. 28. Ad datum tempus sollicitetur corpus a viribus EP et FQ, quibus aequivaleat vis $IV = V$ per centrum inertiae I transiens, quae, si massa corporis fuerit $= M$, in toto corpore eundem effectum producet, atque in elemento ejus quocunque M, cujus massa sit dM, producet vis $Mm = \frac{V\,dM}{M}$, cujus directio Mm illi IV esset parallela: sicque Mm exhibebit vim elementarem. Cum igitur quaeratur, quantam vim sustineat compages corporis, a viribus EP et FQ actu sollicitantibus, seu quam fortis ea esse debeat, ut figura nullam mutationem patiatur? quoniam corpus in motu versatur, ejusmodi status quietis seu aequilibrii assignari debet, in quo figura corporis pari virium actioni esset subjecta. Ad talem autem statum perveniemus, si corpori mente saltem ejusmodi motum et vires tribuamus, unde compages nullam vim sustineat, ipsum autem corpus ad perfectam quietem redigatur. Quemcunque autem corpus habuerit motum, ipsi primo aequalis et contrarius imprimatur, ut hoc saltem instanti corpus in quiete existat: hoc vero motu fictitio nulla vis compagi corporis infertur. Nunc autem praeterea motus a viribus sollicitantibus penitus tolli

tolli debet, per ejusmodi vires, quae compagem non afficiant, quod fit, si singulis elementis vires elementaribus aequales et contrariae applicatae concipiantur: elemento nempe dM in M existenti vis $Mv = \frac{VdM}{M}$, cujusmodi vires singulis elementis applicatae sunt intelligendae: hocque modo corpus in statum quietis reducitur. Quamobrem corpus a viribus EP et FQ, quibus aequivalet vis IV = V per centrum inertiae transiens, sollicitatum, quomodocunque motu progressivo feratur, ratione compagis perinde afficietur, ac si quiesceret, eique praeter vires actu sollicitantes EP et FQ applicatae essent in singulis elementis vires viribus elementaribus aequales et contrariae. In hoc statu aequilibrii haud difficile erit judicare, quam valide partes corporis inter se esse debeant connexae, ut earum compages ab istis viribus non turbetur.

COROLL. 1.

301. Vires igitur, quibus compages corporis resistere debet, sunt 1°, vires corpus actu sollicitantes, et 2°, vires elementares contrario modo applicatae: quae contraria applicatio si signo negationis exprimatur, vires sollicitantes demtis viribus elementaribus dabunt vires compagem afficientes.

COROLL. 2.

302. Cum hic de motu corporum rigidorum sit sermo, structura corporum tam firma sit necesse est, ut his viribus compagem afficientibus resistere valeat. Ac nisi ad hoc satis roboris haberet, motus huc non pertineret.

SCHOLION. 1.

303. Regula, quam hic invenimus pro viribus compagem corporis afficientibus determinandis latissime patet, atque ex principio Metaphysico, quod causa semper aequalis sit effectui pleno, deduci potuisset; si modo hoc principium recte intelligatur; plerumque enim nimis vage proponi solet, quam ut inde quicquam tuto concludi queat. Hic autem vires actu sollicitantes vicem causae gerunt, quam littera V designemus; deinde effectus est duplex, alter quo motus corporis afficitur, cujus loco assumi debent vires elementares mutationem motus immediate efficientes, quas vires simul littera T denotemus. Alter vero effectus in conatu structuram corporis turbandi consistit, cujus loco sumi debent vires compagem afficientes, quas littera S notemus. Cum igitur a causa V producatur effectus

fectus $= T + S$, censeri debet $V = T + S$, unde colligitur $S = V - T$, prorsus uti invenimus. Verum in tanta rerum metaphysicarum caligine malim demonstrationem allatam adhibere ad principium metaphysicum illustrandum.

SCHOLION 2.

304. Sufficiat autem hic nobis, eas vires assignasse, quas compages corporum rigidorum sustinere debet: quomodo enim his viribus resistat, id pendet a structura corporum, et modo quo partes inter se cohaerent, et quasi glutine quodam connectuntur. Quae cohaesionis ratio cum in diversis corporum generibus plurimum discrepet, ad Physicam potius quam Mechanicam referenda videtur. Interim fatendum est, hoc argumentum adhuc parum esse cultum, ac principia, quibus firmitas corporum innititur, plerumque penitus nobis esse incognita; quae doctrina utique mereretur, ut omni studio investigaretur. Verum hoc minime ad praesens institutum pertinet, in quo tantum assumimus corpora, quorum motum consideramus, sufficienti gradu rigoris esse praedita, ut a viribus, quibus afficiuntur, nullam mutationem in figura patiantur, minime curantes, quomodo structura et cohaesio partium sit comparata. Ceterum satis verisimile videtur, nullam partium connexionem tam esse robustam, quae actioni talium virium, etiamsi sint minimae, non aliquantillum cedant: quemadmodum nullum est dubium, quin corpora etiam durissima in mutua collisione sibi quasdam impressiones inducant, etsi eae plerumquae sensus nostros effugiant. Quae sententia si vera esset, nulla plane corpora pro rigidis haberi possent, nisi quae nullas omnino vires compagem turbare conantes sustinerent: cum etiam a minimis viribus mutatio quaedam in figura produceretur. Verum utrum corpora talia rigida, qualia hic assumo, in mundo existant, nec ne? haec quaestio praesentem tractationem non tangit, cum in omnibus disciplinis liceat objecta non existentia contemplari, quo facilius deinceps ad existentia transitus pateat. Neque enim in Mechanica in motum corporum non rigidorum inquirere licet, nisi ante doctrina de motu rigidorum fuerit constituta. Interim tamen negari nequit, quin ejusmodi dentur corpora, quae viribus tantopere resistant, ut mutatio in eorum figura orta plane sit imperceptibilis, atque hoc plerumque sufficit, ut talia corpora pro perfecte rigidis habere possimus.

PROBLEMA 4.

305. Si corpus rigidum quiescens a vi, cujus directio per ejus centrum

centrum inertiae transit, sollicitetur, determinare spatiolum, per quod tempusculo minimo protrudetur, simulque celeritatem, quam acquiret.

SOLUTIO.

Quia tempus ut minimum assumitur, vis interea ut constans et eandem directionem servans considerari potest. Sit igitur massa corporis rigidi $= M$, cui applicata sit vis $= V$, cujus directio IV per centrum inertiae I transeat. In hac ergo directione IV punctum I promovebitur, totumque corpus similem motum progressivum adipiscetur. Ponamus id elapso tempore t, quod ut minimum spectetur, translatum fuisse per spatium $Ii = x$, et in i jam celeritatem acquisivisse $= v$, erit sumto elemento dt constante $Mddx = 2gVdt^2$, seu $\frac{ddx}{dt} = \frac{2gVdt}{M}$, unde ob vim V constantem elicitur $\frac{dx}{dt} = \frac{2gVt}{M}$; ubi cum $\frac{dx}{dt}$ celeritatem v exprimat, quae per hypothesin evanescit posito $t = 0$, additione constantis non est opus. Hinc habetur elapso tempore t celeritas $v = \frac{2gVt}{M}$: deinde ob $dx = \frac{2gVtdt}{M}$, elicitur spatiolum tempore t confectum $Ii = x = \frac{gVtt}{M}$. Fig. 28.

COROLL. 1.

306. Est ergo spatiolum Ii, per quod corpus tempusculo t protruditur, ut quadratum temporis, celeritas vero acquisita v ipsam temporis rationem sequitur. Tum vero est $2x = vt$, seu celeritate acquisita v eodem tempore t duplum spatium $2x$ percurri potest.

COROLL. 2.

307. Haec eadem quoque valent pro tempore quantumvis magno t, dummodo interea vis V perpetuo eandem quantitatem et directionem retineat: corpusque initio quieverit.

SCHOLION.

308. Motus corporum rigidorum perinde ac corpusculorum infinite parvorum duplici modo est tractandus, prout fuerit vel liber, vel ob externa impedimenta restrictus. Atque hoc quidem caput ad motum libe-

rum pertinet, quandoquidem extrinsecus nihil obstare assumimus, quo minus corpus sollicitationi virium obsequatur: verumtamen minimam tantum ejus partem complectitur, dum corpus libere motum, praeter motum progressivum purum, quem hic sum contemplatus, infinitis modis motus gyratorios recipere potest: a cujusmodi motu complicato evolvendo, et quomodo is a viribus quibuscunque perturbetur, adhuc longissime absumus. Neque hanc investigationem suscipere licet, ante quam motus gyratorios circa axes fixos expediverimus; hinc enim demum ad motus gyratorios circa axes mobiles, ac porro ad motus liberos in genere, progredi licebit. Quare relicto quasi ordine naturae, nunc corpora rigida extrinsecus ita restricta contemplabor, ut certum tantum genus motus recipere possint, quod fit, dum ab aliqua causa externa duo corporis puncta fixa retinentur. Facile enim patet, si tria puncta corporis rigidi non in directum sita fixa seu immota manerent, totum corpus nullius motus capax esse futurum: quando autem duo tantum puncta fixa tenentur, circa ea tanquam circa axem motu gyratorio revolvi poterit, qui motus quomodo sit comparatus et a viribus sollicitantibus afficiatur, jam indagabimus: ubi quidem insuper definiri conveniet, cum quantam vim illa puncta fixa sustineant, tum vero etiam quantum compages corporis afficiatur.

CAPUT II.

DE MOTU GYRATORIO CIRCA AXEM FIXUM A NULLIS VIRIBUS TURBATO.

DEFINITIO. 5.

309. Motus *gyratorius* dicitur, quo corpus rigidum circa lineam rectam cum ipso firmiter connexam movetur, quae linea recta *axis gyrationis* vocatur.

COROLL. 1.

310. In motu ergo gyratorio axis gyrationis quiescit, seu singula puncta in eo sita manent immota; reliqua vero corporis puncta eo celerius moventur, quo longius ab axe gyrationis distent.

COROLL.

COROLL. 2.

311. Quia singula corporis puncta ab axe easdem perpetuo servant distantias, moveri nequeunt, nisi in arcubus circularibus, quorum centra in axe gyrationis sunt sita. Scilicet recta a quovis corporis puncto ad axem normaliter ducta erit radius circuli, in cujus peripheria hoc punctum movetur.

COROLL. 3.

312. Quoniam omnia corporis puncta tam inter se quam ab axe perpetuo easdem servant distantias, singula puncta eodem tempore per similes arcus progrediantur necesse est, ex quo eorum celeritates eodem tempore erunt inter se ut eorum distantiae ab axe.

COROLL. 4.

213. Cum axis gyrationis maneat in quiete, si unici praeterea corporis puncti situs fuerit cognitus, ex eo totius corporis situs innotescet: ac si unici puncti celeritatem noverimus, omnium punctorum celeritates assignare poterimus.

EXPLICATIO.

314. Gyratione motus corporis ita restringitur, ut duo ejus quaedam Fig. 29.
puncta maneant immota: concipiantur enim corpori ABCD in punctis E et F duo styli infigi, ac tam firmiter retineri, ut nequaquam dimoveri queant; atque his stylis non obstantibus corpus adhuc duplici modo moveri poterit, prout in figura puncta A, B, C vel sursum vel deorsum agunctur, quae diversitas ita commodissime innui solet, dum corpus vel in hunc *sensum* vel in oppositum gyrari dicitur. Praeterea vero motus in utrumque sensum factus infinitis modis pro ratione celeritatis variari potest; cognita autem celeritate motus nondum innotescit, nisi declaretur, in utrum sensum motus fiat. At statim ac puncta E et F in quiete retinentur, singula puncta inter ea in directum interjacentia quoque quiescent, eritque propterea recta EF axis gyrationis. Tum si *m* sit particula corporis quaecunque, indeque ad axem EF normalis ducatur *mn*, qua tanquam radio in plano ad EF normali circulus concipiatur descriptus, haec particula *m* aliter nisi in peripheria hujus circuli moveri nequit, eritque semper celeritas puncti *m* distantiae *mn* proportionalis.

SCHOLION.

315. Voce *sensus* hic utor gallicum idioma imitatus, quoniam vox Tab. IV.
plaga, qua alii uti solent, discrimen non satis indicare videtur. Conci- Fig. 30.

 piatur

piatur enim axis gyrationis plano tabulae in O normaliter insistere, ad quem ex corporis punctis A, B, C actae sint normales AO, BO, CO: jam duplex motus corpori imprimi potest, alter quo puncta A, B, C per arcus Aa, Bb, Cc, alter autem, quo eadem puncta per arcus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ procedunt. Priori casu congrue dici nequit, motum fieri in plagam Aa, quippe quod de punctis B et C, quorum motus in alias plagas dirigitur, non esset verum. Plaga scilicet directionem quandam fixam innuit, quae in motu circulari non habet locum: unde ob defectum aptioris vocabuli in tali motu quasi duos sensus statuamus, sibi oppositos, ita ut motus circularis per arcus Aa, Bb, Cc in hunc sensum, alter per arcus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in sensum oppositum fieri sit dicendus.

DEFINITIO. 6.

316. Celeritas *angularis* in motu gyratorio est celeritas ejus puncti, cujus distantia ab axe gyrationis unitate exprimitur.

COROLL. 1.

317. Ex celeritate ergo cujusque puncti cognoscetur celeritas angularis, si ea per distantiam puncti illius ab axe gyrationis dividatur; quoniam in motu gyratorio celeritates sunt distantiis ab axe proportionales.

COROLL. 2.

318. Si ergo puncti, quod ab axe gyrationis distat intervallo $= x$, celeritas sit $= v$, erit $\frac{v}{x}$ celeritas angularis. Pro alia enim distantia y foret celeritas $= \frac{yv}{x}$, et sumta hac distantia $y = 1$, erit ea $= \frac{v}{x}$, quae est celeritas angularis.

COROLL. 3.

319. Hinc vicissim cognita celeritate angulari, quae sit $= \varepsilon$, in distantia quacunque x erit celeritas, qua ibi fit gyratio, $= \varepsilon x$: celeritas scilicet angularis, per distantiam quamcunque ab axe gyrationis multiplicata, dat celeritatem veram pro ea distantia.

EXPLICATIO.

320. Cum in motu gyratorio puncta corporis pro diversa ab axe distantia diversa celeritate ferantur, quo omnes has celeritates diversas simul

simul in calculo complecti queamus, eorum loco celeritatem angularem, quae pro omnibus distantiis est eadem, in calculum introducamus; prodit enim ea, si angulus tempusculo quodam confectus per ipsum tempusculum dividatur, ita ut omnibus distantiis sit communis. Namque si in distantia $= x$ ab axe gyrationis celeritas fuerit $= v$, tempusculo dt absolvetur ea arculus $= vdt$, qui per radium x divisus dat angulum interea confectum $= \frac{vdt}{x}$: hic autem iterum per tempus dt divisus producit $\frac{v}{x}$, hoc est celeritatem angularem. Perinde igitur est, quonam modo celeritatem angularem definire velimus, sive sit celeritas distantiae $= 1$ conveniens, sive celeritas cuicunque distantiae respondens per hanc ipsam distantiam divisa, sive angulus elementaris divisus per tempusculum, quo absolvitur; siquidem hi tres modi inter se conveniunt. Primus quidem naturae rei est maxime conformis, cum eo vera celeritas indicetur, atque distantiam illam fixam, cui respondet, ob similem rationem unitate insignimus, qua in mensura angulorum radius circuli, ad quem referuntur, unitate exprimi solet: ut nimirum anguli et arcus ad communem mensuram revocentur.

THEOREMA 3.

321. Si corpus rigidum circa axem fixum moveri coeperit, motum suum gyratorium perpetuo eadem celeritate angulari continuabit, nisi a viribus externis turbetur.

DEMONSTRATIO.

Sit EF axis gyrationis, circa quem corpus rigidum moveri coeperit, Fig. 29. celeritate angulari $= c$, quae scilicet respondeat distantiae ab axe $= 1$. Quaevis ergo particula m ab axe distans intervallo $mn = x$, habuit celeritatem $= cx$ in eundem sensum. Quoniam corpus cum axe quasi unum constituit corpus rigidum, particula m cum axe EF ita colligata est intelligenda, ut ab eo constanter eandem servet distantiam $mn = x$. Consideremus hanc particulam solam, tanquam filo mn cum axe connexam, atque supra vidimus, eam motu accepto uniformiter in peripheria circuli esse gyraturam. Quod cum de omnibus elementis seorsim sumtis valeat, videndum est, num singula motum suum prosequi possint, ut sibi mutuo non sint impedimento. Verum perspicuum est, etiamsi singula a se invicem essent dissoluta, dum fuerint cum axe filorum ope connexa, tamen singula

gula in motu suo ita perseverare posse, ut perpetuo easdem inter se distantias servent, corpusque suam retineat figuram. Quare etiam eorum nexus mutuus non obstabit, quo minus singula elementa motum suum prosequantur: consequenter totum corpus motum gyratorium impressum ita continuabit, ut uniformiter circa axem eadem perpetuo celeritate angulari revolvatur.

COROLL. 1.

322. Posita ergo celeritate angulari c, ut in distantia $= x$ ab axe sit celeritas $= cx$, si haec celeritas ponatur $= v$, erit $c = \frac{v}{x}$. Quare cum x et v sint lineae, celeritas angularis c numero absoluto exprimitur.

COROLL. 2.

323. Ex celeritate angulari c colligitur tempus t, quo gyratio fit per datum angulum φ: cum enim motus sit uniformis, erit $c = \frac{\varphi}{t}$, ideoque $t = \frac{\varphi}{c}$: unde patet celeritatem angularem c dare angulum, qui uno minuto secundo absolvitur.

COROLL. 3.

324. Quare si $1 : \pi$ denotet rationem diametri ad peripheriam, ut sit 2π peripheria circuli, cujus radius est $= 1$, tempus unius revolutionis, quo corpus in pristinum situm revertitur est $= \frac{2\pi}{c}$ min. sec.

COROLL. 4.

325. Quoniam tempora perpetuo in minutis secundis exprimere instituimus, si celeritas angularis sit $= c$, tempore t corpus motu gyratorio absolvet angulum $= ct$.

SCHOLION.

326. En igitur pro mensuris absolutis distinctam notionem celeritatis angularis, quippe quae exprimitur angulo, qui eo motu gyratorio, si esset uniformis, intervallo unius minuti secundi conficeretur. Congruit ea cum supra stabilito modo omnia, quae ad motum pertinent, ad mensuras absolutas revocandi: cujus fundamentum in eo constat, ut tempora perpe-

perpetuo in minutis secundis exprimamus: tum vero celeritatem quamque per spatium, quod corpus ea celeritate latum uniformiter intervallo unius minuti secundi percurreret, indicamus, unde utique clarissima celeritatis idea obtinetur. Quemadmodum ergo celeritas in genere est spatium uno minuto secundo confectum, ita celeritas angularis est angulus uno minuto secundo confectus, si scilicet motus esset uniformis. Quodsi motus gyratorius non fuerit uniformis, ita ut quovis momento celeritas angularis sit diversa, simili modo pro quovis instanti ea exprimetur angulo, quem corpus, si eo motu gyratorio uniformiter revolveretur, uno minuto secundo esset descripturum. Ex hoc autem Theoremate motus gyratorius uniformis perfecte cognoscitur, quo omne corpus rigidum, nisi a viribus externis sollicitetur, feratur necesse est; unde patet, principium aequabilitatis motus inertia innixum etiam ad motum gyratorium corporum rigidorum extendi, dummodo axis gyrationis sit fixus. Quare investigari conveniet, quanta vi opus sit ad axem in situ suo fixo conservandum.

PROBLEMA. 5.

327. Si corpus rigidum circa axem fixum uniformiter gyretur, definire vires, quas axis sustinet, seu quae adhiberi debent, ut axis in suo situ conservetur.

SOLUTIO.

Consideretur corpus iterum in sua elementa divisum, quae singula cum axe gyrationis ope filorum sint connexa, et quoniam quodlibet elementum m in circulo circumfertur, cujus radius est ejus distantia mn ab axe EF, ob vim centrifugam supra definitam (213), filum tendet, tantaque vi axem in directione nm sollicitabit. Ad quam calculo exprimendam sit dM massula hujus elementi, ejusque ab axe gyrationis EF distantia $mn = x$, ac celeritas angularis $= \gamma$, ita ut γ sit angulus singulis minutis secundis confectus; eritque celeritas qua elementum m in circulo suo revolvitur $= \gamma x$. Tum si g denotet altitudinem, per quam corpus a gravitate sollicitatum uno minuto secundo delabitur, erit per (213) vis centrifuga hujus elementi $= \frac{\gamma\gamma xx dM}{2gx} = \frac{\gamma\gamma}{2g} \cdot x dM$, ubi dM est ponduseulum, quod elementum corporis in regione terrae ad mensuras absolutas electa esset habiturum. Quare ob motum hujus elementi, dum versatur in m, axis EF sustinet vim $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \cdot x dM$, qua secundum di- Fig. 29.

rectio-

rectionem nm sollicitatur: et cum ab omnibus elementis similes vires sustineat, ex iis colligi poterit vis totalis, quam totum corpus in axem exerit.

COROLL. 1.

328. Vires ergo a singulis elementis ortae pro eodem motu angulari rationem tenent compositam massarum et distantiarum ab axe: elementa igitur axi propiora minus, remotiora autem plus efficiunt.

COROLL. 2.

329. Deinde vero pro eodem elemento, vis quam axis ab eo sustinet, sequitur rationem duplicatam celeritatis angularis: quae si fuerit dupla, vis illa quadruplo evadet major.

COROLL. 3.

330. Quoniam elementum m per peripheriam circuli circumfertur motu aequabili, vis quidem perpetuo ejusdem manet quantitatis, et eidem axis puncto n applicata, sed directio continuo mutatur, cum semper ad elementum sit directa.

SCHOLION.

331. Supra scilicet (213) invenimus, ut corpusculum cujus massa $= A$, celeritate $= v$ in peripheria circuli, cujus radius $= r$, moveatur, vim requiri ad ejus centrum tendentem $= \frac{Avv}{2gr}$. Cum igitur nostro casu sit massa $A = dM$, celeritas $v = \gamma x$, et radius $r = x$, erit ista vis $= \frac{\gamma\gamma x dM}{2g}$, qua filum, quo elementum axi alligatur, tenditur, et qua propterea ipse axis secundum directionem nm sollicitatur. Ab hujusmodi ergo viribus singula axis puncta afficientur: ac si nosse velimus vires, quas punctum n sustinet, concipiatur sectio plana per punctum n ad axem EF normaliter facta, et omnia corporis elementa in hoc plano sita vires suas in punctum n exerent, quae cum omnes eidem puncto sint applicatae, per praecepta statica facile ad unam vim reduci poterunt. Hic scilicet erit casus, quando totum corpus quasi in planum ad axem normale fuerit compactum, quem igitur, antequam ad ternas dimensiones progrediamur, evolvamus.

PROBLEMA 4.

332. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana ad axem gyrationis normalis, eaque data celeritate gyretur, determinare vim, quam axis ab ea sustinet.

SOLU-

SOLUTIO.

Sit AE a F lamina ista tenuissima figurae cujuscunque, cujus massa sit $= M$, cui axis gyrationis normaliter insistere intelligatur in puncto O; et cum rectae a singulis laminae elementis ad O ductae simul eorum distantias ab axe gyrationis referant, omnia vires suas in ipsum punctum O exerent. Consideretur ergo elementum laminae quodvis in M, cujus massa sit $= dM$, ejusque ab axe distantia $OM = r$; et posita celeritate angulari $= \gamma$, erit vis, qua punctum O in directione OM sollicitatur $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$. Fig. 31.

Quae vires ab omnibus elementis oriundae, quo facilius ad unam reducantur, concipiantur per O duae directrices OA, OB in plano laminae inter se normales, ad quas referantur pro puncto M coordinatae $OP = x$ et $PM = y$, et completo rectangulo OPMQ, vis illa OM resolvitur in duas secundum ipsas directrices, quarum quae agit secundum OA est $= \frac{\gamma\gamma x dM}{2g}$, et quae secundum OB agit, $= \frac{\gamma\gamma y dM}{2g}$. Ex tota ergo lamina oritur vis sollicitans in directione OA $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int x dM$, et vis sollicitans in directione OB $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y dM$. Haec autem integralia ex situ centri inertiae laminae innotescunt, quod si statuatur in I, indeque ad directrices demittantur perpendicula IK et IL; erit $\int x dM = M . OK$ et $\int y dM = M . OL$. Quare cum sit vis secundum OA $= \frac{\gamma\gamma}{2g} M . OK$, et vis secundum OB $= \frac{\gamma\gamma}{2g} M . OL$, his duabus viribus aequivalet una secundum directionem OI sollicitans, quae est $= \frac{\gamma\gamma}{2g} . M . OI$, atque haec est vis, quam axis ob motum laminae in punctu O sistinet.

COROLL. 1.

333. Directio ergo vis, quam axis ob motum laminae sustinet, a puncto O ad centrum inertiae laminae I tendit, atque distantiae hujus centri I ab axe est proportionalis.

COROLL. 2.

334. Si tota laminae massa M in ejus centro inertiae esset collecta, eaque circa axem pari celeritate angulari revolveretur,

tur, ab ea axis vim sustineret $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$, M. OI in eadem directione OI.

COROLL. 3.

335. Axis ergo a lamina eandem vim sustinet, ac si tota laminae massa in centro inertiae esset collecta, eaque pari celeritate angulari circa eundem axem revolveretur, quae centri inertiae nova proprietas notatu maxime est digna.

COROLL. 4.

336. Si igitur axis per ipsum centrum inertiae I laminae transiret, ad eamque esset perpendicularis, ob $OI = 0$, axis a motu laminae nullam plane vim sentiret, neque ergo ulla vi opus esset ad axem immotum retinendum.

SCHOLION.

337. Quodsi axis non per centrum inertiae transit, tam firmiter intra suos cardines retineri debet, ut vi assignatae resistere valeat, neque unquam ab ea de situ suo dimoveri possit. Cum autem ipsa hujus vis directio in gyrum agatur, quaquaversus axis in suo situ vi sufficienti retineri debet: ac perspicuum quidem est, eo majore vi opus esse ad axem retinendum, quo magis centrum inertiae ab eo distet. Praeterea vero haec vis proportionalis est massae laminae et quadrato celeritatis angularis. Ceterum hic casus, quo corpus ut laminam infinite tenuem sumus contemplati, nos manuducit ad corpora quaecunque, quoniam diviso corpore per sectiones ad axem normales in infinitas laminas, vires hinc, quibus axis in singulis punctis sollicitatur, facile colliguntur. Totum scilicet negotium ad inventionem centri inertiae cujusque laminae reducitur: verum alio modo hanc investigationem tentemus.

PROBLEMA 7.

Fig. 32. 338. Si corpus rigidum circa axem OA uniformiter gyretur, vires, quas axis sustinet, in summam colligere, vel ad duas vires reducere, quibus axis sollicitetur.

SOLUTIO.

Cum axe gyrationis OA conjungantur in O binae directrices normales OB et OC, quibus pro elemento corporis in Z, cujus massa sit dM, denotante M massam totius corporis, parallelae constituantur coord-

coordinatae ternae, $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quodsi jam celeritas angularis, qua corpus circa axem OA gyratur, ponatur $= \gamma$, et elementi Z ab axe distantia $XZ = r$, ob motum hujus elementi axis in puncto X sollicitatur in directione XZ vi $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, quae, ducta XV ipsi YZ seu OC parallela, resolvatur in directiones XY et XV, eritque vis urgens secundum $XY = \frac{\gamma\gamma y dM}{2g}$ et secundum $XV = \frac{\gamma\gamma z dM}{2g}$: sicque a singulis elementis axis binas sustinet vires, quarum directiones sunt ipsis OB et OC parallelae: unde omnes, quae in utraque directione agunt, seorsim in unam summam colligi poterunt. Repraesentet ergo Ee vim omnibus viribus XY et Ff vim omnibus XV aequivalentem; ac primo quidem utraque aequalis est summae omnium, quibus aequivalet. Quare erit

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y dM, \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z dM.$$

Deinde momenta harum virium respectu puncti O aequari debent cunctis momentis elementaribus simul sumtis, unde fit:

$$\frac{\gamma\gamma}{2g} . OE . \int y dM = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int xy dM, \text{ seu } OE = \frac{\int xy dM}{\int y dM} \text{ et}$$

$$\frac{\gamma\gamma}{2g} . OF . \int z dM = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int xz dM, \text{ seu } OF = \frac{\int xz dM}{\int z dM}.$$

sicque omnes vires, quas axis sustentat, ad duas sunt reductae Ee et Ff, quarum tam magnitudines quam directiones et loca applicationis innotescunt.

COROLL. 1.

339. Si centrum inertiae corporis fuerit in I, eique respondeant coordinatae OG, GK et KI, erit ut supra vidimus $OG = \frac{\int x dM}{M}$, $GK = \frac{\int y dM}{M}$, $KI = \frac{\int z dM}{M}$, unde pro superioribus formulis est $\int y dM = M . GK$ et $\int z dM = M . KI$.

COROLL. 2.

340. Si universa corporis massa M in centro inertiae I collecta esset, parique celeritate gyraretur, axis ab ea in puncto G vim sustineret $= \frac{\gamma\gamma}{2g} . M . GI$ in directione GI, unde oriuntur vires duae

secun-

secundum GK $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int yd\text{M}$ et secundum GL $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int zd\text{M}$, quibus ergo viribus illae secundum Ee et Ff sunt aequales.

COROLL 3.

341. Si planum AOB, quod arbitrio nostro relinquitur, per centrum inertiae I corporis ductum assumatur, ut sit KI $= 0$ et $\int zd\text{M} = 0$, erit quidem vis Ff $= 0$, at vero distantia OF infinita; ita tamen ut ejus momentum sit finitum, scilicet vis Ff . OF $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int xzd\text{M}$.

SCHOLION.

342. Binas autem has vires Ee et Ff non ulterius ad unam revocare licet, nisi intervallum EF evanescat: nam duae vires lineae rectae in duobus diversis punctis applicatae ad unam reduci nequeunt, nisi directiones virium fuerint in eodem plano. Verum duae istae vires Ee et Ff infinitis modis ad duas alias reduci possunt, sicuti fit, si positio directricium OB et OC mutetur, uti vidimus casu, quo planum AOB per centrum inertiae ducitur, vim Ff evanescere, et distantiam OF fieri infinitam. Inventis autem hujusmodi binis viribus Ee et Ff, quas axis gyrationis sustinet, ne is de situ suo dimoveatur, necesse est, ut a viribus aequalibus et contrariis retineatur. Scilicet si axis in E et F ex annulis fixis suspendatur, intra quos libere gyrari queat, annulus in E sustinebit vim Ee et annulus in F vim Ff, unde firmitatem annulorum colligere licet. Verum si axis in datis duobus quibuscunque punctis sustineri debeat, vires assignari poterunt, in illis punctis adhibendae, ut axis immotus servetur, quam investigationem in sequenti problemate suscipiamus.

PROBLEMA 8.

Fig. 32. 343. Si axis, circa quem corpus rigidum motu uniformi gyratur, in datis duobus punctis O et A teneatur, definire vires, quas axis in his duobus punctis sustinet.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, quae in problemate praecedente sunt posita, vires axem sollicitantes ad duas Ee et Ff sunt revocatae, quarum illa directrici OB, haec vero directrici OC est parallela, ita ut sit

vis

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int y\,dM \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int z\,dM$$

$$\text{tum } OE = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM}, \text{ et } OF = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

His ergo viribus aequivalentes in punctis O et A applicandae quaeri debent. Sit ergo distantia $OA = a$, atque in O et A vires Ob et $A\zeta$ applicentur, quae vi Ee aequivaleant, id quod fit si $Ob + A\zeta = Ee$ et $Ob \cdot OE = A\zeta \cdot AE$, unde oritur:

$$Ob = \frac{AE \cdot Ee}{a} = Ee - \frac{OE \cdot Ee}{a} \text{ et } A\zeta = \frac{OE \cdot Ee}{a}.$$

Simili modo in O et A applicentur vires Oc et $A\gamma$, quae vi Ff aequivaleant, eritque

$$Oc = \frac{AF \cdot Ff}{a} = Ff - \frac{OF \cdot Ff}{a} \text{ et } A\gamma = \frac{OF \cdot Ff}{a}.$$

Quare in utroque puncto O et A binas habemus vires, quas axis ibi sustinet, scilicet in puncto O

$$\text{vim } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\int y\,dM - \frac{1}{a}\int xy\,dM\right) \text{ et vim } Oc = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\int z\,dM - \frac{1}{a}\int xz\,dM\right)$$

deinde in puncto A

$$\text{vim } A\zeta = \frac{\gamma\gamma}{2g} \cdot \frac{1}{a}\int xy\,dM \text{ et vim } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2g} \cdot \frac{1}{a}\int xz\,dM.$$

Vel si ipsas lineas ad elementum dM in Z situm pertinentes introducamus, erit

$$\text{vis } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int AX.XY.dM, \text{ et vis } Oc = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int AX.YZ.dM$$

$$\text{vis } A\zeta = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int OX.XY.dM, \text{ et vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int OX.YZ.dM,$$

Ponamus $OG = b$, $AG = c$, ut sit $a = b + c$, tum vero $GX = u$ ut sit $AX = c - u$ et $OX = b + u$, erit

$$\text{vis } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(c\int y\,dM - \int uy\,dM\right): \text{ vis } Oc = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(c\int z\,dM - \int uz\,dM\right)$$

$$\text{vis } A\zeta = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(b\int y\,dM + \int uy\,dM\right); \text{ vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(b\int z\,dM + \int uz\,dM\right)$$

Accipiamus planum AOB ita, ut per centrum inertiae I transeat, erit $\int z\,dM = o$, ac statuamus integralia

$$\int y\,dM = D; \int uy\,dM = E \text{ et } \int uz\,dM = F.$$

 fiet-

fietque: vis $Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}(Dc - E)$; vis $Oc = \frac{-\gamma\gamma}{2ag} F$

vis $A\beta = \frac{\gamma\gamma}{2ag}(Db + E)$; vis $A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag} F$

Atque jam facile tam in O binae vires Ob et Oc, quam in A binae vires $A\beta$ et $A\gamma$ ad unam redigi poterunt, ita ut in utroque termino O et A vis innotescat, quam ibi axis sustinet.

COROLL. 1.

344. Si ergo planum AOB per centrum inertiae corporis I transiens statuatur, vires Oc et $A\gamma$ sunt aequales sed contrariae, ita ut altera alterius sit negativa: seu erit vis Oc + vi $A\gamma = 0$, quoniam $KI = 0$, ac propterea vis $GL = 0$.

COROLL. 2.

345. Si axis gyrationis OA per ipsum centrum inertiae I transeat, erit etiam $\int y dM = D = 0$, ideoque vires, quas axis in punctis O et A sustinet, ita se habebunt.

vis $Ob = \frac{-\gamma\gamma}{2ag} . E$; vis $Oc = \frac{-\gamma\gamma}{2ag} . F$

vis $A\beta = \frac{\gamma\gamma}{2ag} . E$; vis $A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag} . F$.

COROLL. 3.

346. Ut axis nullas omnino vires sustineat, corpusque circa eum libere gyrari possit, necesse est, ut quatuor haec integralia singula evanescant.

$$\int y dM = 0, \int z dM = 0; \int xy dM = 0 \text{ et } \int xz dM = 0.$$

ac binis prioribus quidem satisfit, si axis gyrationis per centrum inertiae corporis transeat.

SCHOLION.

347. Hic duo puncta O et A, unde quasi axis suspendatur, pro lubitu assumsimus: atque in genere patet vires, quae ad axem in istis punctis retinendum requiruntur, eo fore minores, quo longius capiatur intervallum OA, quod mirum non est, cum effectus hic a momentis virium pendeat. At si puncta O et A conveniant, ut sit $OA = a = 0$, vires illae adeo fiunt infinitae, ex quo intelligitur, axem in unico puncto neutiquam

tam

tam firmiter contineri posse, ut immotus maneat; ad minimum ergo ad hoc duae vires requiruntur, axi in diversis punctis applicandae: nisi forte binae vires primitivae Ee et Ff jam eidem puncto applicentur. Hoc autem ex praecedente problemate fieri nequit, nisi sit

$$\int xydM : \int xzdM = \int ydM : \int zdM.$$

Sumto ergo plano AOB ita ut per centrum inertiae corporis I transeat, ut sit $\int zdM = 0$, hoc eveniet, si fuerit $\int xzdM = 0$. Quod etiam ex hoc problemate evidens est, quoniam tum vires Oc et $A\gamma$ evanescunt, solaeque vires Ob et $A\mathfrak{C}$ relinquuntur, quibus unica vis Ee aequivalet, ita ut axis tum in unico puncto E sustentari queat, a vi nempe quae aequalis sit et contraria vi Ee. Sufficiet ergo axem in unico puncto E sustentari, si ducto plano AOB per centrum inertiae corporis, fuerit $\int xzdM = 0$, quo quo casu fit vis $Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int ydM$ et distantia $OE = \frac{\int xydM}{\int ydM}$. Reliquis casibus omnibus necesse est, ut axis in duobus punctis contineatur, quae utcumque accipiantur, vires ad axem retinendum requisitae aequales et contrariae esse debent viribus hic determinatis. Quas cum assignaverimus, superest ut vires, quas ipsa corporis campages ob motum gyratorium sustinet, definiamus.

PROBLEMA. 9.

348. Si corpus rigidum circa axem fixum uniformiter gyretur, definire vires, quas corporis compages seu mutuus partium nexus sustinet.

SOLUTIO.

Gyretur corpus circa axem OA celeritate angulari $= \gamma$, ita ut singulis minutis secundis angulum $= \gamma$ absolvat, atque vidimus si particula corporis, cujus massula $= dM$, fuerit in puncto Z, quod ab axe OA distet intervallo $XZ = r$, ejus vim centrifugam fore $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, qua haec particula conetur in directione Zz ab axe recedere: ac simili vi singula corporis elementa conantur ab axe recedere, quod ne fiat compages corporis satis roboris habere debet. Quod quo facilius perspiciamus, consideremus corpus in quiete, et vires ei applicandas investigemus, quae ejus compagem perinde afficiant, atque ea nunc dum corpus est in motu afficitur. Singulis igitur elementis dM in Z sitis intelligendae sunt applicatae vires $Zz = \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, ea ab axe OA retrahentes. Praeterea vero Fig. 32.

ne

ne totum corpus ab his viribus ad motum cieatur, axi in punctis E et F concipiantur vires ipsis Ee et Ff aequales et contrariae applicatae, sicque habebuntur omnes vires, quas corpus in quiete consideratum sustinet, cujus proinde compages tam robusta esse debet, ut ab istis viribus nulla mutatio ejus figurae inferatur: tum vero corpus ab omnibus istis viribus sollicitatum in aequilibrio conservabitur.

COROLL. 1.

349. Si Z fuerit aliquod extremum corporis punctum, particula dM ibi tam firmiter cum reliquo corpore connexa esse debet, ut inde a vi $Zz = \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$ avelli nequeat: cujus directio cum ab axe sit aversa, non opus est, ut ad latera sit affixa.

COROLL. 2.

350. Propius autem ad axem connexio fortior esse debet, quoniam omnes particulae ulterius remotae vires suas recedendi ab axe conjungunt: unde in ipso axe robustissima compages vigeat necesse est.

SCHOLION.

351. Quod ad axem attinet, assumsi hic eum in punctis E et F teneri; sin autem in aliis quibusque binis punctis O et A teneatur, in iis vires supra assignatis aequales et contrariae applicatae sunt intelligendae, quae cum elementaribus Zz corpus etiam in aequilibrio tenebunt. Compagem ergo tam fortem esse oportet, ut si corpori quiescenti memoratae vires essent applicatae ejus figura ab earum actione nullam mutationem esset passura. Hinc autem simul patet, omnes istas vires esse in ratione duplicata celeritatis angularis, ita ut motus duplo celerior compagem quadruplo firmiorem postulet. Verum hoc judicium, quod ab interna corporum structura et partium indole pendet, hic ulterius prosequi non licet: sed hinc potius peculiaris disciplina constitui mereretur. Quare cum in hoc capite omnia, quae ad motum gyratorium circa axem fixum nullis viribus externis turbatum pertinent, satis sint exposita, quid vires praeterea efficiant investigemus: ac primo quidem corpus rigidum, quod circa axem fixum est mobile, in quiete sum contemplaturus, motumque elementarem, qui ei a datis viribus tempore tantum infinite parvo imprimetur, scrutabor. Haec tractatio in se parum utilis patefaciet, quantum axis a viribus sollicitantibus patiatur, tum vero in sequentibus, ubi de motu libero corporum rigidorum agetur, maximam afferet utilitatem.

CAPUT

CAPUT III.

DE MOTUS GYRATORII GENERATIONE.

PROBLEMA 10.

352. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile quiescat, definire vires elementares, quibus id tempusculo minimo per datum angulum promovetur.

SOLUTIO.

Sit ABCD sectio corporis quaecunque ad axem gyrationis normalis, Fig. 33. cui ergo axis in O perpendiculariter insistere concipiatur; circa quem tempusculo dt per angulum $= \alpha dt^2$ promoveri debeat, siquidem novimus spatiola tempusculo infinite parvo dt genita quadrato tempusculi esse proportionalia. Si ergo elementum quodpiam in M consideremus, cujus massa sit $= dM$ et distantia ab axe $OM = r$, id transferendum est per arculum $Mm = \alpha r dt^2$. Ad quem effectum producendum necesse est, ut elementum hoc sollicitetur in directione Mm a vi quadam, quae ponatur $= p$: at massula dM a vi p sollicitata tempusculo dt protrahitur per spatiolum $= \frac{gpdt^2}{dM}$, (305.) quod illi $\alpha r dt^2$ aequale positum praebet vim $p = \frac{\alpha r dM}{g}$. Tum vero hoc elementum adipiscetur celeritatem $= \frac{2gpdt}{dM}$, quae abit in $2\alpha r dt$, unde celeritas angularis acquisita erit $= 2\alpha dt$.

COROLL. 1.

353. Si angulus tempusculo dt genitus vocetur $= d\omega$, ob $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$, erit celeritas angularis genita $= \frac{2d\omega}{dt}$, ubi notandum est, angulum $d\omega$ esse differentiale secundi gradus, seu homogeneum esse cum quadrato tempusculi dt.

COROLL. 2.

354. Ut tempusculo dt angulus $d\omega$ generetur, elementum corporis dM in M situm secundum directionem motus Mm sollicitari debet a vi $= \frac{r d\omega}{g dt^2} \cdot dM$, vires ergo singula elementa sollicitantes sunt in ratione composita massarum et distantiarum ab axe gyrationis.

COROLL. 3.

355. Si aliud elementum consideretur in N, cujus massa sit dN, id sollicitari debet in directione Nn ad distantiam ON normaliter ducta in plano ad axem gyrationis perpendiculari. Vires autem sollicitantes haec elementa in M et N erunt ut OM . dM ad ON . dN.

COROLL. 4.

356. Vicissim ergo si singula corporis elementa dM secundum directionem motus imprimendi sollicitentur viribus $= \frac{r d\omega}{g dt^2} \cdot dM$, totum corpus circa axem gyrationis promovebitur angulo $= d\omega$ tempusculo dt, et acquiret celeritatem angularem $= \frac{2 d\omega}{dt}$.

COROLL. 5.

356. Quoniam hoc modo singula elementa seorsim ad motum concitantur, neque se invicem impediunt, ab istis viribus elementaribus neque corporis compages, neque axis gyrationis afficietur: sed motus perinde producetur, ac si cuncta elementa tam a se invicem quam ab axe essent soluta.

PROBLEMA. 11.

Fig. 34. 357. Vires elementares, quibus corpus rigidum circa axem OA dato tempusculo dt per datum angulum $d\omega$ promovetur, ad duas vires finitas reducere, quae illis omnibus aequivaleant.

SOLUTIO.

Cum axe gyrationis OA normaliter conjungantur binae aliae directrices OB et OC; sumtoque corporis quocunque elemento in Z, cujus massa sit $= dM$, inde ad planum AOB demittatur perpendiculum ZY et ex Y ad axem OA normalis YX, ponanturque ternae coordinatae

OX $= x$,

$OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, tum vero ejus ab axe distantia $XZ = \surd(yy + zz) = r$. Imprimatur jam elemento Z ut toti corpori motus in sensum $Z\zeta$, quae linea ad XZ est normalis in plano XYZ, et secundum hanc directionem $Z\zeta$ elementum dM sollicitetur necesse est vi $= \frac{rd\omega}{gdt^2} \cdot dM = \frac{\alpha r dM}{g}$, posito $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$. Producta YZ in z agatur ZV parallela ipsi YX, et vis $Z\zeta = \frac{\alpha r dM}{g}$ resolvatur secundum directiones ZV et Zz, eritque vis secundum $ZV = \frac{\alpha z dM}{g}$ et vis secundum $Zz = \frac{\alpha y dM}{g}$. Quia perinde est, in quibusnam harum directionum punctis istae vires applicatae concipiantur, concipiatur illa $\frac{\alpha z dM}{M}$ applicata plano AOC in puncto V secundum Vv, ita ut sit ista vis secundum $Vv = \frac{\alpha z dM}{g}$; vis autem $\frac{\alpha y dM}{g}$ applicata concipiatur plano AOB in puncto Y, ita ut habeatur vis secundum $Yz = \frac{\alpha y dM}{g}$. Nunc omnibus viribus secundum Vv aequivaleat vis una Rr plano AOC normaliter applicata in R, eritque ducta RP ipsi OC parallela

$$\text{vis } Rr = \frac{\alpha}{g}\int z dM;\quad OP = \frac{\int xz dM}{\int z dM} \text{ et } PR = \frac{\int zz dM}{\int z dM}.$$

Deinde omnibus viribus secundum Yz aequivaleat vis una Ss plano AOB normaliter applicata in puncto S, unde ad OA ducta normali SQ erit

$$\text{vis } Ss = \frac{\alpha}{g}\int y dM;\quad OQ = \frac{\int xy dM}{\int y dM} \text{ et } QS = \frac{\int yy dM}{\int y dM}.$$

Hae ergo duae vires Rr et Ss in corpus eundem effectum exerent, atque omnes vires elementares simul sumtae, si modo corpus fuerit rigidum.

COROLL. 1.

358. Si ergo corpus rigidum ab hujusmodi duabus viribus Rr et Ss sollicitetur, ab iis circa axem OA ita volvi incipit, ut tempusculo dt conficiat angulum $d\omega = \alpha dt^2$: neque ab his viribus ipsis axis ullam vim sustinebit, seu nulla opus erit vi, ad axem interea in quiete conservandum.

COROLL. 2.

359. Quoniam infinitis modis aliae binae vires exhiberi possunt his aequivalentes, etiam ab his omnibus corpori idem motus imprimetur, ita ut axis OA ab illis non afficiatur. Secus autem ratio compagis est comparata, quae tantum a viribus elementaribus nullam vim patitur.

SCHOLION.

360. In hac virium reductione non respeximus ad axis firmitatem sed quasi corpus perfecte esset liberum, ita omnibus viribus elementaribus binas invenimus vires aequivalentes, quae propterea etiam in axem nullum effectum exerunt. Sed si fixitatis axis rationem teneamus, infinitas alias vires exhibere possumus, quae quidem corpori eundem motum circa axem OA inducant, sed insuper etiam axem afficiant. Omnes scilicet vires, quae respectu axis OA idem praebent momentum, ac vires elementares omnes junctim sumtae, seu binae vires aequivalentes inventae, quoniam earum contrariae cum his in aequilibrio consisterent, corpori quoque eundem motum imprimunt. Cum vero vis $Z\zeta = \frac{\alpha r dM}{g}$ momentum respectu axis OA sit $= \frac{\alpha rr dM}{g}$, ex omnibus viribus elementaribus nascitur momentum $= \frac{\alpha}{g} \cdot \int rr dM = \frac{d\omega}{g dt^2} \int rr dM$: omnes ergo vires, quae respectu axis OA aequale habent momentum, corpus circa hunc axem tempusculo dt convertent per angulum $= d\omega$: unde sequens problema facile solvetur.

PROBLEMA 12.

361. Si corpus rigidum quiescens et circa axem fixum mobile a viribus quibuscunque sollicitetur, invenire motum primo temporis instante genitum.

SOLUTIO.

Colligantur omnium virium momenta respectu axis gyrationis, attendendo in utrum sensum quaelibet vergat, sitque summa omnium momentorum $= Vf$, ex cujus sensu motus primo impressi directio innotescit. Tum sit $d\omega$ angulus, per quem corpus circa axem tempusculo dt protruditur; et singula corporis elementa dM multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe rr, et calculo colligatur integrale $\int rr dM$. Quo facto oportet esse $\frac{d\omega}{g dt^2} \int rr dM = Vf$, unde

jam

jam viciſſim angulus $d\omega$ elicitur, per quem corpus tempuſculo dt a virium momento Vf promovetur, ſcilicet $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Celeritas autem angularis, quam corpus hoc tempuſculo dt acquirit, erit $= \frac{2Vfgdt}{\int rrdM}$; ſicque cognoſcitur effectus a viribus quibuscunque primo temporis inſtanti dt genitus.

COROLL. 1.

362. Angulus ergo $d\omega$ dato tempuſculo dt confectus eſt directe ut momentum virium Vf, et reciproce ut integrale $\int rrdM$, quod eſt aggregatum omnium corporis elementorum dM per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe gyrationis multiplicatorum.

COROLL. 2.

363. Haec formula ſimilis eſt ei, qua generatio motus progreſſivi exprimitur, dum hic loco virium momentum virium, et loco maſſae corporis M valor integralis $\int rrdM$ capiatur, quem valorem deinceps *momentum inertiae* appellabimus.

SCHOLION.

364. In hoc ergo problemate effectus virium quarumcunque in motu circa axem fixum generando perfecte eſt definitus, ut nihil amplius deſiderari queat. Quemadmodum enim virium ſollicitantium momenta reſpectu axis cujusvis capi debeant, in Statica docetur, et mox a nobis accuratius explicabitur. Verum praeter ipſum motum genitum plurimum intereſt hic vires, quas axis ſuſtinet, determinare: hocque non ſolum ut intelligatur, quantis viribus opus ſit ad axem continendum, ne dimoveatur; ſed ut deinceps, quando ad motum corporum rigidorum liberum revertemur, judicare valeamus, quibusnam caſibus axis nullas plane vires ſuſtineat. Haec autem quaeſtio de viribus, quas axis a viribus ſollicitantibus ſuſtinet, etſi maximi eſt momenti, tamen adhuc minus ſtudioſe eſt tractata, quamobrem operam dabo, ut eam luculenter et diſtincte evolvam.

PROBLEMA 13.

365. Si corpus rigidum quieſcens et circa axem fixum mobile a viribus quibuscunque ſollicitetur, determinare vires, quas axis inde ſuſtinet.

SOLUTIO.

Haec quaestio iterum ita ad statum quietis est reducenda, ut corpori certae vires se in aequilibrio continentes applicatae concipiantur, a quibus axis perinde afficiatur, atque a viribus sollicitantibus, dum in corpore motum generant. Hunc in finem perpendantur omnes vires corpus sollicitantes, ex iisque momenta respectu axis gyrationis colligantur, quorum sit $= Vf$, unde quaeratur angulus tempusculo dt genitus, qui inventus est

Fig. 34. $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Deinde quaerantur vires elementares eundem motum generantes, quas pro singulis corporis elementis ita definivimus, ut elementum dM in Z positum secundum directionem $Z\zeta$ ad distantiam $XZ = r$ ab axe OA perpendicularem et in plano ad axem normali sitam, seu secundum directionem motus geniti sollicitetur vi $= \frac{rd\omega dM}{gdt^2} = \frac{VfrdM}{\int rrdM}$, simulque notavimus, ab his viribus axem nihil pati. Quare si his viribus aequales et contrarias corpori insuper applicemus, corpus in quiete seu aequilibrio servabitur, simulque axis gyrationis easdem adhuc vires sustinebit, quas in motus generatione sustinuerat. Hinc ad vires axem afficientes inveniendas corpori praeter vires, quibus actu sollicitatur, applicatae concipiantur vires elementares motum genitum iterum tollentes; seu harum loco ex §. 357. corpori applicentur vires oppositae viribus Rr et Ss ibi assignatis, statuendo $\alpha = \frac{Vfg}{\int rrdM}$: hoc modo corpus in aequilibrio continebitur, axisque easdem vires sustinebit, quas in generatione motus sustinet.

COROLL. 1.

366. Praeter vires ergo corpus actu sollicitantes primo ipsi vis Rr contrarie est applicanda; vis autem haec Rr est $= \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM}$ sumtis $OP = \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ et $PR = \frac{\int zzdM}{\int zdM}$. Deinde etiam contrarie applicari debet vis $Ss = \frac{Vf\int ydM}{\int rrdM}$, existente $OQ = \frac{\int xydM}{\int ydM}$ et $QS = \frac{\int yydM}{\int ydM}$.

COROLL. 2.

367. Vel si vires sollicitantes corpori motum in sensum oppositum ipsi $Z\zeta$ imprimant, tum praeter eas hae ipsae vires Rr et Ss corpori

pori applicatae sunt intelligendae: ubi meminisse oportet, esse $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; et $rr = yy + zz$.

COROLL. 3.

368. Ex his ergo viribus, quibus corpus in aequilibrio tenetur, judicari debet, quantum axis ab iis patiatur, seu quanta vi retineri debeat, ne de loco suo dimoveatur.

SCHOLION.

369. Axis scilicet hic ut omnino fixus consideratur, ita ut corpus in aequilibrio versetur, si virium momenta respectu istius se mutuo destruant. Quo autem clarius pateat, quantas vires axis sustineat, res ita commodissime concipitur, quasi axis in duobus punctis teneretur, ut definiendum sit, quantis viribus in his punctis applicandis opus sit, ut in situ suo retineatur. Quod quidem judicium esset facile, si singulae vires ipsi axi essent applicatae; quoniam proposita quacunque vi axi applicata, duae semper vires in datis duobus punctis applicandae exhiberi possunt illi aequivalentes. Cum igitur directiones virium, quae corpori motum inducunt, eo ipso non per axem transeant, atque etiam vires insuper applicandae Rr et Ss axem non afficiant, totum negotium jam eo reducitur, ut omnes vires, quibus corpus sollicitari consideramus, ad alias ipsis aequivalentes revocemus, quae omnes axi immediate sint applicatae. Primum quidem dubitare liceret, an hoc fieri posset? sed ostendemus, quoties vires corpori applicatae fuerint in aequilibrio, iis semper ejusmodi aequivalentes assignari posse, quae ipsi axi gyrationis sint applicatae. Virium autem sollicitantium duo genera sunt constituenda, alterum earum quae nullum momentum respectu axis praebent, quod fit si earum directiones cum axe gyrationis in eodem fuerint plano; alterum earum quarum directio reperitur in plano ad axem normali, quae quasi totae ad motum gyratorium generandum impenduntur. Verum omnes vires ad haec duo genera reducere licet, unde primum investigabo, quantum axis a primo genere, quod nullum motum gignit, afficiatur.

PROBLEMA. 14.

370. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile sollicitetur a vi, cujus directio cum axe in eodem plano est sita, invenire vires, quas axis inde in datis duobus punctis sustinet.

SOLU-

SOLUTIO.

Fig. 35. Sit MN axis gyrationis, et PQ directio vis sollicitantis V, quae nisi fuerit axi parallela, eum in quodam puncto T secabit, quoniam cum axe in eodem plano est sita. Cum igitur ab hac vi nullum oriatur momentum respectu axis MN, ab ea etiam motus, si quis adesset, non afficietur, axisque perinde urgebitur, ac si quiesceret. Possumus ergo rem ita concipere, ac si vis V ipsi axi in puncto T secundum directionem TQ esset applicata, quae itaque secundum directiones TN et Tt, quae ad MN in plano MNPQ sit normalis, resoluta dabit

$$\text{vim } TN = V \cos NTQ \text{ et vim } Tt = V \sin NTQ.$$

Quodsi jam quaeratur, quantas vires axis in punctis M et N sustineat, inde ad directionem vis PQ demittantur perpendicula MP et NQ, et ob $\cos NTQ = \frac{TQ}{TN} = \frac{TP}{TM} = \frac{PQ}{MN}$ et $\sin NTQ = \frac{NQ}{TN} = \frac{MP}{TM}$, erit

$$\text{vis } TN = V \cdot \frac{PQ}{MN} \text{ et vis } Tt = V \cdot \frac{NQ}{TN} = V \cdot \frac{MP}{TM}.$$

Primum ergo axis secundum suam directionem MN sollicitatur a vi $= V \cdot \frac{PQ}{MN}$, nihilque refert, in quonam ejus puncto ea applicata concipiatur. Alteri autem vi Tt applicari poterunt in M et N vires aequivalentes Mm et Nn normales ad axem in plano MNPQ, quae erunt:

$$\text{vis } Mm = \text{Vis } Tt \cdot \frac{TN}{MN} = V \cdot \frac{NQ}{MN} \text{ et}$$

$$\text{vis } Nn = \text{Vis } Tt \cdot \frac{TM}{MN} = V \cdot \frac{MP}{MN}.$$

Has ergo vires axis in punctis datis M et N praeter illam $V \cdot \frac{PQ}{MN}$, qua secundum suam longitudinem urgetur, sustinet a vi proposita V, qua corpus secundum directionem PQ sollicitatur.

COROLL. 1.

Fig. 36. 371. Si intersectio T non cadat inter puncta M et N, perpendiculum NQ ut negativum spectari debet, ideoque vis Mm in M applicanda versus PQ dirigetur, ut sit

vis Mm

$$\text{vis } Mm = V \cdot \frac{NQ}{MN} \text{ et vis } Nn = V \cdot \frac{MP}{MN},$$

praeter quas axis secundum MN sollicitatur vi $= V \cdot \frac{PQ}{MN}$.

COROLL. 2.

372. Si vis sollicitantis V directio PQ fuerit axi MN parallela ad distantiam MP, ab ea axis primo secundum suam directionem MN trahetur vi $= V$, praeterea vero sustinebit vires Mm et Nn aequales inter se, quarum utraque est $= \frac{MP}{MN} \cdot V$. Fig. 37.

SCHOLION.

373. Ad nostrum propositum sufficit, hunc casum postremum probl. notasse, quo directio vis sollicitantis est ipsi axi parallela. A quacunque enim vi corpus urgeatur, ea semper resolvi potest in duas, quarum alterius directio sit ipsi axi parallela, altera vero in plano ad axem normali sita. Quod quo clarius appareat, sit OA axis gyrationis, corporique applicata sit vis quaecunque $PV = V$, ex cujus puncto quocunque P ducatur recta PQ axi OA parallela, et ex V in planum OAPQ demisso perpendiculo VR, ductaque RQ ad PQ normali, erit quoque VQ ad PQ normalis, et in plano ad PQ normali sita: cui si parallela et aequalis statuatur Pv, erit haec ad PQ perpendicularis et in plano ad axem QA normali existens. Quare cum $PQVv$ sit parallelogrammum rectangulum, vis $PV = V$ resolvetur in vires PQ et Pv, ut sit vis $PQ = \frac{PQ}{PV} \cdot V$ et vis $Pv = \frac{Pv}{PV} \cdot V$. Quoniam igitur illius vis PQ effectum in axem jam definivimus; superest ut quantum axis a vi Pv, dum motum gyratorium gignit, afficiatur determinemus: quem in finem sequentia problemata evolvamus. Fig. 38.

PROBLEMA 15.

374. Si lamina plana rigida EFBG mobilis sit circa axem fixum ad eam in O normalem, eaque in eodem plano sollicitetur; a data vi V secundum directionem BD invenire vires, quas axis sustinet in ipsa motus generatione. Fig. 39.

SOLUTIO.

Ab axe O in directionem vis sollicitantis demittatur perpendiculum $OD = f$, erit ejus momentum $= Vf$: tum sumto elemento corporis dM in Z, cujus distantia ab axe sit $OZ = r$, lamina tempusculo dt in sensum

$Z\zeta$ convertetur per angulum $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$: ad quem effectum producendum opus est vi elementari secundum $Z\zeta$ sollicitante $= \frac{rd\omega dM}{gdt^2} = \frac{VfrdM}{\int rrdM}$. Quae vires elementares ut colligantur, sumantur in plano laminae duae directrices OB et OC inter se normales, positisque coordinatis $OY = y$ et $YZ = z$, ut sit $rr = yy + zz$, vis $Z\zeta$ resolvatur secundum directiones ZV et Zz, erit vis $ZV = \frac{VfzdM}{\int rrdM}$ et vis $Zz = \frac{VfydM}{\int rrdM}$.

Jam illis omnibus ZV aequivaleat vis Rr, his vero Zz vis Ss, eritque

$$\text{vis } Rr = \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM} \text{ et } OR = \frac{\int zzdM}{\int zdM} \text{ atque}$$

$$\text{vis } Ss = \frac{Vf\int ydM}{\int rrdM} \text{ et } OS = \frac{\int yydM}{\int ydM},$$

quae vires contrario modo in $R\rho$ et $S\sigma$ applicatae intelligantur, quibuscum si vis sollicitans $BD = V$ conjungatur, habebuntur vires, quarum actionem axis sustinet. Nunc autem vis $Dd = V$ aequivalet vi ipsi aequali $O\mathfrak{D} = V$ in O secundum eandem directionem applicatae, et insuper vi evanescenti in distantia OD in infinitum producta applicanda, cujus autem momentum sit $= Vf$. Simili modo loco virium $R\rho$ et $S\sigma$ in O substitui possunt vires ipsis aequales $O\mathfrak{R}$ et $O\mathfrak{S}$, una cum viribus evanescentibus ita in distantiis infinitis applicandis, ut earum momenta sint $\frac{Vf\int zzdM}{\int rrdM}$ et $\frac{Vf\int yydM}{\int rrdM}$. Cum igitur haec momenta a viribus evanescentibus orta se destruant, ipsae vires evanescentes non amplius in computum ingrediuntur: ex quo axis in puncto O has ternas vires sustinet, 1° vim $O\mathfrak{D} = V$ aequalem et parallelem vi sollicitanti, 2° vim $O\mathfrak{R} = \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM}$ et 3°, vim $O\mathfrak{S} = \frac{Vf\int ydM}{\int rrdM}$.

COROLL. 1.

375. Si directrix OB per centrum inertiae laminae I ducatur, erit $\int zdM = 0$, et $\int ydM = M.OI$ denotante M massam totam. Hinc axis in O sustinet duas vires $O\mathfrak{D} = V$ et $O\mathfrak{S} = \frac{Vf.M.OI}{\int rrdM}$, quae facile ad unicam reducuntur.

COROLL.

COROLL. 2.

376. Ut axis nullam plane vim sustineat, necesse est, ut directio vis sollicitantis BD sit ad rectam OIB normalis, tum vero ut sit $V = \frac{Vf.M.OI}{\int rrdM}$, seu $f = \frac{\int rrdM}{M.OI}$, ubi $f = OD$ designat distantiam vis applicatae ab axe O.

COROLL. 3.

377. Sin autem vis sollicitans V ita fuerit applicata, ut axis O ab ea non afficiatur, ob $f = \frac{\int rrdM}{M.OI}$, lamina tempusculo dt per angulum $d\omega$ vertetur, ut sit $d\omega = \frac{Vgdt^2}{M.OI}$; punctum ergo I perinde moveri incipiet, ac si tota massa ibi esset collecta, eaque ab eadem vi V sollicitaretur.

EXPLICATIO.

378. Fundamentum hujus solutionis isti nititur principio, quod vires, quarum momenta respectu axis gyrationis se destruunt, in axem eundem effectum exerant, ac si hae vires ipsi axi immediate in suis directionibus essent applicatae. Quod etiamsi in ipsa solutione satis sit confirmatum, propterea quod vires evanescentes, quarum momenta se destruunt, recte negligi possunt; tamen si quem evanescentia et distantia infinita, ad quam hae vires applicatae considerantur, offendant, idem alio modo ostendisse juvabit. Sint ergo in eodem plano duae vires Bb et Cc, quarum momenta respectu puncti O se destruant, ita ut ductis in earum directiones ex O perpendiculis OB et OC sit $Bb . OB = Cc . OC$ seu $Bb : Cc = OC : OB$. Fig. 40. Concurrant earum directiones in E, eaedemque vires quasi puncto E applicatae concipi possunt, tum autem dabitur una Ee illis aequivalens, cujus directio per ipsum punctum O necessario transit, alioquin enim inde momentum respectu O oriretur contra hypothesin. Quod etiam sic demonstratur. Sit Ee media directio virium Bb et Cc in E applicatarum, erit per resolutionem virium $Bb : Cc = \sin\nu : \sin\mu$; at eadem ratio valet, si Ee per O transeat, quoniam est $\sin\nu : \sin\mu = OC : OB = Bb : Cc$. Hinc vis aequivalens Ee quasi in O applicata considerari potest, quae sit $O\omega$: cui ergo etiam vires $O\mathfrak{C}$ et $O\gamma$ ipsis Bb et Cc aequales aequivalebunt: sicque loco virium Bb et Cc recte substituere licet vires $O\mathfrak{C}$ et $O\gamma$ ipsis aequales et in ipso puncto O applicatas. Hac igitur demonstratione vicissim principium in solutione usurpatum extra dubium collocatur.

SCHOLION.

379. Notatu omnino dignus est casus, quo vis corpus sollicitans nullam vim in axem gyrationis exerit, qui ergo sponte, dum vis effectum exerere incipit, in quiete manebit. Quo hunc casum accuratius cognoscamus, in recta OI ab axe O per centrum inertiae I producta quaeri debet punctum H, ut sit distantia $OH = \frac{\int rrdM}{M \cdot OI}$; tum enim quaecunque vis Hh ad OH normalis in plano proposito nullo modo axem O afficiet. Infra autem patebit, punctum H idem esse, quod vulgo centrum oscillationis vocari solet, quemadmodum I est centrum gravitatis. Ceterum hoc problemate soluto planior reddetur solutio sequentis, ubi corpori etiam extensio secundum longitudinem axis tribuitur.

Fig. 39.

PROBLEMA 16.

380. Si corpus rigidum circa axem fixum OA mobile a quotcunque viribus sollicitetur, quarum directiones sint in planis ad axem normalibus, invenire vires, quibus in ipso motus initio axis immediate urgetur.

Fig. 41.

SOLUTIO.

Cum omnes vires agant in planis ad axem normalibus, quaerantur singularum momenta respectu axis OA, quorum prout in eundem sensum tendunt vel contra, aggregatum sit Vf, a quo corpus circa axem tempusculo dt vertatur per angulum $d\omega$, ita ut particula in Z feratur in sensum Zζ. Assumtis in subsidium calculi binis directricibus OB et OC ad OA normalibus constituantur pro elemento corporis dM in Z sito ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, sitque ejus ab axe distantia $XZ = \surd(yy + zz) = r$. Quibus positis supra invenimus fore $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$.

Praeter has autem vires, quibus corpus actu sollicitatur, axis insuper sollicitatur a viribus aequalibus et contrariis iis, ad quas supra vires elementares reduximus, (vide §. 366.): ubi notandum est, omnium harum virium momenta junctim sumta se mutuo tollere. Quare si loco cujusque vis substituatur una ei aequalis ipsi axi in eadem directione applicata, et alia evanescens ad distantiam infinitam applicata, cujus autem momentum sit illius momento aequale, omnium harum virium momenta se destruent, et cum eae evanescant, prorsus non in censum venient. Hinc igitur vires axem immediate sollicitantes ita se habebunt: Primo singulae vires corpus sollicitantes in planis ad axem normalibus ad ipsum axem in eadem directione applicentur; deinde ob vires elementares sumto intervallo

vallo $OP = \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ in P secundum directionem ipsi OB parallelam axi applicetur vis $P\varrho = \frac{V\int f z dM}{\int rrdM}$; tum vero sumto intervallo $OQ = \frac{\int xydM}{\int ydM}$ in Q secundum directionem ipsi OC parallelam et oppositam applicetur vis $Q\sigma = \frac{V\int f y dM}{\int rrdM}$, sicque omnes habebuntur vires, quas axis immediate sustinebit, qui ergo satis fixus esse debet, ne ab iis de situ suo deturbetur.

COROLL. 1.

381. Si planum AOB ita capiatur, ut per corporis centrum inertiae transeat, erit $\int zdM = 0$, unde vis $P\varrho$ evanescet, simul vero distantia OP fiet infinita: ubi tamen notandum est, fore $P\varrho \cdot OP = \frac{V\int f x z dM}{\int rrdM}$: ita ut hanc vim negligere non liceat.

COROLL. 2.

382. Quoniam hoc modo omnes vires, quas axis sustinet, ipsi axi sunt applicatae, si eae se mutuo in aequilibrio teneant, axis nullam vim patietur, corpusque circa eum, etiamsi sit liber, sponte converti incipiet.

COROLL. 3.

383. A singulis autem viribus corpus sollicitantibus oriuntur totidem vires ipsi axi applicatae; quibus deinde adjungi debent binae vires $P\varrho$ et $Q\sigma$ axi iisdem applicatae; sicque omnes habentur vires axem afficientes.

EXPLICATIO.

384. Iam ante ostendimus, si duae vires in eodem plano ad axem normali fuerint applicatae, quarum momenta se destruant, iis aequivalere duas aequales vires ipsi axi in iisdem directionibus applicatas; nunc igitur, ne ullum dubium circa hanc solutionem supersit, ex principiis staticis demonstrari oportet, idem valere, etiamsi illae vires in diversis planis ad axem normalibus fuerint applicatae. Sit igitur axi OA in plano ad E normali applicata vis quaecunque in figura non expressa, tum vero in plano ad axem in F normali applicata sit vis $N\pi$, cujus momentum illius momento sit aequale et contrarium, sitque recta FN ad directionem istius vis $N\pi$ perpendicularis. Ducatur ex E recta EM ipsi FN aequalis et parallela, cui in M vis $M\mu$ ipsi $N\pi$ aequalis et parallela applicata concipiatur; tum vero in E et F aequales vires illis $F\nu$ et $E\mu$ iisdem parallelae applicatae intelligantur. Fig. 42.

 Atque

Atque evidens est, tres vires Mm, $E\mu$ et $F\nu$ aequivalere vi uni Nn, quoniam haec contrario modo applicata cum illis tribus aequilibrium constitueret. Quare loco vis Nn substituere licet tres vires Mm, $E\mu$ et $F\nu$, quarum binae posteriores ipsi axi, prior autem in eodem plano ad axem normali, in quo vis non expressa agit, est applicata. Cum igitur hujus vis Mm momentum aequale sit et contrarium momento vis in figura non exhibitae, eae vires ad ipsum axem transferri possunt, sicque loco vis Mm substituetur vis $E\mathfrak{M}$ ipsi aequalis et parallela: quae cum a vi $E\mu$ destruatur, unica relinquitur vis $F\nu$, quae jam locum vis Nn sustinebit, dum etiam vis in figura non expressa axi in puncto E applicatur. Ex quo in genere intelligitur, loco virium, quarum momenta se destruunt, easdem vires ipsi axi applicatas substitui licere, si quidem directiones fuerint in planis ad axem normalibus.

PROBLEMA 17.

Fig. 41. 385. Si corpus rigidum circa axem fixum OA mobile a viribus quibuscunque sollicitetur, definire vires, quibus axis in datis duobus punctis O et A sustentari debet, ne de situ suo deturbetur.

SOLUTIO.

Per alterum datorum punctorum O statuantur binae directrices OB et OC tam inter se quam ad axem OA normales, et positis pro corporis elemento quovis dM in Z sito ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, vocetur ejus ab axe distantia $XZ = \surd\ (yy + zz) = r$. Tum considerentur singulae vires corpus sollicitantes, et quae fuerint obliquae, resolvantur in binas, quarum alterae sint axi OA parallelae, alterae vero in planis ad axem normalibus sint sitae. Priores, quae ad motum nihil conferunt, quantum effectum in axem exerant, supra (§. 372.) definivimus, unde simul patet, quantae vires inde in datis punctis O et A oriantur. Posteriores vero simul praebeant momentum $= Vf$ ad corpus in sensum $Z\zeta$ convertendum: earum autem quaelibet puncto axis cui respondet, in sua directione applicetur, cujusmodi una vis sit $Ll = L$. Hujus ergo loco in O et A applicentur vires parallelae $O\lambda$ et Al, ut sit $O\lambda = L \cdot \frac{AL}{OA}$ et

$AL = L \cdot \frac{OL}{AO}$, quippe quae duae illi aequivalent: atque hoc modo ex singulis viribus tales binae vires ad puncta O et A transferantur. Deinde vero posito intervallo $OA = a$, ob vires $P\varrho$ et $Q\sigma$ puncta O et A sustinebunt vires Oo, Aa et $O\omega$, $A\alpha$ illis parallelas, ita ut sit

vis

$$\text{vis } Oo = \frac{Vff(a-x)zdM}{afrrdM}, \quad \text{vis } Aa = \frac{VffxzdM}{afrrdM}$$

$$\text{vis } O\omega = \frac{Vff(a-x)ydM}{afrrdM}; \quad \text{vis } A\alpha = \frac{VffxydM}{afrrdM}.$$

Cum igitur hoc pacto omnes vires, quas axis sustinet, ad puncta O et A fuerint perductae, ab his junctim sumtis ista axis puncta revera sollicitabuntur; quare ea a viribus contrariis coerceantur, necesse est.

COROLL. 1.

386. Omnes istae vires axi in punctis O et A applicatae simul ad axem sunt normales, nisi affuerint vires axi parallelae, unde praeter normales axis etiam secundum suam longitudinem urgetur.

COROLL. 2.

387. Quotcunque autem vires utrique termino O et A applicatae reperiuntur, pro utroque cunctas ad unam revocare licet, quam propterea axis in eo puncto sustinebit: quae vires in O et A, nisi evanescant, axis non sponte in situ suo permanebit.

COROLL. 3.

388. Si nullae adsint vires axi parallelae, axis etiam nequaquam secundum suam longitudinem urgetur, sed in punctis O et A viribus tantum ad axem normalibus erit resistendum, unde sufficiet axem intra duos annulos fixos suspendisse.

SCHOLION.

389. Hic autem nondum modos, quibus axis in quiete conservari solet, explicare licet, quoniam in praxi axes corporum notabilem crassitiem habent, ita ut suspensio non ad axem linearem, qualem hic postulamus, referatur: quare cavendum est, ne ea, quae hic de axe lineari sunt demonstrata, temere ad quosvis axes crassos extendantur. Teneatur ergo hic perpetuo, axem nobis esse lineam rectam, quae moto corpore ipsa non moveatur, cujusmodi motus existeret, si corpus intra duas cuspides contineretur, circa quas tamen liberrime sine frictione revolvi posset. Sin autem adsit axis materialis, qualis rotis affigi solet, isque vel plano vel cavitati incumbat, ejus motus utique in computum veniat necesse est, neque tum facile erit lineam illam, quae durante motu corporis ipsa maneat immota, assignare. Verumtamen quia hic nobis tantum de primo motus initio

initio sermo est, haud difficile est lineam, quae pro quovis suspensionis modo in quiete persistat, agnoscere.

PROBLEMA 18.

Fig. 43. 390. Si corpus rigidum circa axem OA fuerit mobile, invenire vires, a quibus si corpus sollicitetur, axis inde nullas plane vires sustineat.

SOLUTIO.

Hujusmodi vires applicari debent in planis ad axem normalibus, et quoniam quotquot earum fuerint, eas ad duo plana reducere licet, quaeramus vires in planis ad axem in punctis O et A normalibus applicandas, a quibus axis nullatenus afficiatur. Constitutis ut ante in O binis directricibus OB et OC tam inter se quam ad axem OA normalibus, iisdem in A parallelae statuantur AF et AH. Quod si jam solutio praecedentis problematis et formulae ibi inventae in subsidium vocentur, huic problemati satisfiet, si rectis OB, OC, AF et AH alicubi vires applicentur illis Oo, $O\omega$, $A\alpha$ et $A\alpha$, quas ibi invenimus, aequales et contrariae, quoniam hae ad axem translatae a viribus elementaribus destruuntur. Sint ergo Ee et Ff vires directrici OC, at Gg et Hh vires directrici OB parallelae, quae agant, uti figura ostendit. Quare posita distantia $OA = a$, vires istae ita esse debent comparatae:

$$\text{vis } Ee = \frac{Vff(a-x)\,ydM}{afrrdM}; \quad \text{vis } Ff = \frac{VffxydM}{afrrdM}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{Vff(a-x)\,zdM}{afrrdM}; \quad \text{vis } Hh = \frac{VffxzdM}{afrrdM}.$$

Praeterea vero summam momentorum harum quatuor virium ipsi Vf aequalem esse oportet: ex quo erit

$$OE\,.\int(a-x)\,ydM + AF\,.\int xydM + OG\,.\int(a-x)\,zdM + AH\,.\int xzdM = a\int rrdM.$$

Cui aequationi ita infinitis modis satisfieri potest, ut ternis distantiis pro lubitu assumtis quarta determinetur. Facilior autem reddetur solutio, si tam distantiae OE, AF, quam OG, AH aequales capiantur: statuamus ergo

$$OE = AF = m, \text{ et } OG = AH = n,$$

atque fieri oportet

$$m\int ydM + n\int zdM = \int rrdM,$$

unde vel m vel n pro lubitu assumi potest. Deinde sufficit, ut quatuor illae vires rationem superiorum formularum teneant; ita ut sint:

vis

$$\text{vis } Ee = \frac{\int(a-x)\,y\,dM}{ab}; \quad \text{vis } Ff = \frac{\int xy\,dM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{\int(a-x)\,z\,dM}{ab}; \quad \text{vis } Hh = \frac{\int xz\,dM}{ab},$$

Hae ergo quatuor vires praescripto modo corpori applicatae axem plane non afficient.

COROLL. 1.

391. Si planum AOB per centrum inertiae I capiatur, erit $\int z\,dM = 0$, et $KI = \frac{\int y\,dM}{M}$, denotante M massam totius corporis. Erunt ergo vires:

$$\text{vis } Ee = \frac{Ma \cdot KI - \int xy\,dM}{ab}; \quad \text{vis } Ff = \frac{\int xy\,dM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xz\,dM}{ab}; \quad \text{vis } Hh = \frac{\int xz\,dM}{ab}.$$

earumque distantiae ab axe in genere ita debent esse comparatae, ut sit

$$Ma \cdot KI \cdot OE + (AF - OE)\int xy\,dM + (AH - OG)\int xz\,dM = a\int rr\,dM.$$

COROLL. 2.

392. Si etiam ipse axis OA per centrum inertiae I transeat, ut fit $KI = 0$, vires ita se habebunt:

$$\text{vis } Ee = \frac{-\int xy\,dM}{ab}; \quad \text{vis } Ff = \frac{\int xy\,dM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xz\,dM}{ab}; \quad \text{vis } Hh = \frac{\int xz\,dM}{ab}$$

earumque distantiae ab axe hoc modo, ut sit

$$(AF - OE)\int xy\,dM + (AH - OG)\int xz\,dM = a\int rr\,dM.$$

COROLL. 3.

393. Quodsi ergo valores integralium $\int xy\,dM$ et $\int xz\,dM$ evanescant, tam vires evanescunt, quam distantiarum quaedam debent esse infinitae. At loco vis evanescentis in distantia infinita applicatae substituere licet duas in distantiis finitis applicandas.

SCHOLION. 1.

394. Vires hic investigavimus in duobus planis ad axem normalibus applicandas, a quibus axis nullam vim sustineat. His autem viribus infinitis modis aliae tam in iisdem planis quam in aliis aequivalentes exhiberi posse

 sunt.

sunt. Veluti loco vis $E\epsilon$ sumi possunt vires Pp et $O\pi$ in directionibus parallelis, ut sit $Pp = E\epsilon + O\pi$, et $E\epsilon . EP = O\pi . OP$ seu $E\epsilon = Pp - O\pi$ et $OE = \frac{OP . Pp}{Pp - O\pi}$. Quare ducto plano AOB per centrum inertiae I corporis, locoque vis $E\epsilon$ introductis viribus Pp et $O\pi$, quarum altera $O\pi$ maneat indefinita, reliquae ita se habebunt.

$$\text{Vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma . KI - \int xydM}{ab}; \text{ vis } Ff = \frac{\int xydM}{ab},$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xzdM}{ab} \text{ et vis } Hh = \frac{\int xzdM}{ab};$$

$$ab . OP . \text{Vis } O\pi + Ma . KI . OP - OP . \int xydM + AF . \int xydM + (AH - OG)\int xzdM = a\int rrdM.$$

Si praeterea simili modo loco vis Ff binae vires Rr et $A\varrho$ introducantur, cum sit $Ff = Rr - A\varrho$ et $AF = \frac{AR . Rr}{Rr - A\varrho}$, atque vis $A\varrho$ arbitrio nostro relinquatur; erunt vires:

$$\text{vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma . KI - \int xydM}{ab}; \text{ vis } Rr = \text{vis } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xzdM}{ab} \text{ et vis } Hh = \frac{\int xzdM}{ab}.$$

Tum vero distantiae ita debent esse comparatae:

$$\left.\begin{array}{l} + ab . OP . \text{Vis } O\pi + Ma . KI . OP + (AR - OP)\int xydM \\ + ab . AR . \text{Vis } A\varrho \qquad\qquad + (AH - OG)\int xzdM \end{array}\right\} = a\int rrdM.$$

Si denique loco vis Gg binae Qq et $O\varphi$; nec non loco vis Hh binae Ss et $A\sigma$ introducantur, ob

$$Gg = Qq - O\varphi; \quad OG = \frac{OQ . Qq}{Qq - O\varphi};$$

$$Hh = Ss - A\sigma; \quad AH = \frac{AS . Ss}{Ss - A\sigma};$$

jam in genere vires ita capiantur:

$$\text{vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma . KI - \int xydM}{ab}; \text{ vis } Rr = \text{vis } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Qq = \text{vis } O\varphi - \frac{\int xzdM}{ab}; \quad \text{vis } Ss = \text{vis } A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab}$$

earumque distantiae ab axe ita se habeant, ut sit

+ ab

$$\left.\begin{array}{l} + ab.\text{OP}.\text{Vis O}\pi + \text{M}a.\text{KI}.\text{OP} + (\text{AR} - \text{OP})\int xyd\text{M} \\ + ab.\text{AR}.\text{Vis A}\varrho \qquad\qquad + (\text{AS} - \text{OQ})\int xzd\text{M} \\ + ab.\text{OQ}.\text{Vis O}\phi \\ + ab.\text{AS}.\text{Vis A}\sigma \end{array}\right\} = a\int rrd\text{M}$$

Nunc igitur etiamsi intervallum KI cum integralibus $\int xyd$M et $\int xzd$M evanescat, tamen infinitae habentur vires finitae et in distantiis finitis applicatae, quae quaesito satisfaciant.

SCHOLION. 2.

395. In hac generali solutione quatuor relinquuntur vires $O\pi$, $O\phi$, $A\varrho$ et $A\sigma$ arbitrio nostro, axi in punctis O et A secundum binas directiones OB et OC applicandae; deinde etiam quaternarum reliquarum virium Pp, Qq, Rr, et Ss distantiae ab axe OP, OQ, AR et AS pro lubitu assumi possunt, dummodo quantitas ab ita definiatur, ut sit

$$ab = \frac{a\int rrd\text{M} - \text{M}a.\text{KI}.\text{OP} + (\text{OP} - \text{AR})\int xyd\text{M} + (\text{OQ} - \text{AS})\int xzd\text{M}}{\text{OP}.\,vis\,\text{O}\pi + \text{OQ}.\,vis\,\text{O}\phi + \text{AR}.\,vis\,\text{A}\varrho + \text{AS}.\,vis\,\text{A}\sigma}$$

Quo valore invento vires hae posteriores ita determinantur, ut sit

$$\text{vis P}p = \text{vi O}\pi + \frac{\text{M}a.\text{KI} - \int xyd\text{M}}{ab};\quad \text{vis R}r = \text{vi A}\varrho + \frac{\int xyd\text{M}}{ab}$$

$$\text{vis Q}q = \text{vi O}\phi - \frac{\int xzd\text{M}}{ab};\quad \text{vis S}s = \text{vi A}\sigma + \frac{\int xzd\text{M}}{ab},$$

quae vires respectu priorum habent directiones oppositas: omnes autem momenta in eundem sensum tendentia praebere assumuntur: eritque momentum totale ex omnibus ortum $= \frac{a\int rrd\text{M}}{ab}$, quod supra vocavimus Vf, ex quo motus initium ita definitur, ut tempusculo dt corpus vertatur per angulum $d\omega = \frac{gdt^2}{b}$. Recordandum est autem, hic a designare intervallum OA, tum vero pro quolibet corporis elemento dM coordinatas directricibus OA, OB, OC parallelas esse x, y, z, quarum prima xa puncto O capiatur: praeterea vero hic planum AOB per centrum inertiae I corporis duximus, ut esset OC ad illud planum normalis.

PROBLEMA. 19.

396. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile sollicitetur a viribus quibuscunque, atque ad motum cieatur, definire vires, quas ipsa corporis compages sustinet.

SOLUTIO.

Hic ejusmodi vires inveniri oportet, quae corpori applicatae id quidem in aequilibrio teneant, simul vero compagem ejus aeque afficiant, atque ea in productione motus afficitur. Primo ergo corpus sustinet vires, quibus actu sollicitatur, ubi eae partes, quibus singulae immediate sunt applicatae probe notentur: quandoquidem quaelibet vis unicam tantum corporis particulam urget. Deinde ex momento omnium istarum virium colligantur vires elementares, quae in singulis elementis parem motum gignerent; ac singulis elementis his aequales et contrariae applicatae concipiantur, quarum loco hic alias ipsis aequivalentes ut supra substituere non licet, quoniam hunc ipsa rigiditatis ratio exquiritur. Tertio adjiciantur vires, quibus axis actu in quiete servatur; atque hi tres virium ordines corpus in perfecto aequilibrio continebunt: simulque in compage partium idem plane efficiunt, quod corpus in motus generatione patitur. Hincque intelligitur, quam firmo nexu singulae corporis particulae inter se colligatae esse debeant, ut nulla earum divulsio sit metuenda: et nisi compages his viribus satis resistere valeat, corpus non pro rigido esset habendum.

SCHOLION.

397. Hic plus definire non suscipimus, quam quantis viribus singulae corporis particulae sollicitentur, quae eas a nexu cum reliquis avellere conentur; quomodo enim structura corporis huic effectui resistat, hujus loci non est inquirere, propterea quod haec ratio rigiditatis cuique corporum generi est peculiaris. Ceterum in hoc capite tantum motus initium, qui corpori rigido circa axem fixum mobili a viribus quibuscunque imprimitur, sumus contemplati, quo facilius solus virium effectus a motu jam insito separatus perspiceretur. Imprimis autem hinc ad sequentes investigationes subsidia petentur, quando, dum corpus circa quempiam axem gyratur, vires adsunt id circa alium axem convertere conantes; tum enim ex effectu momentaneo circa hunc axem producto judicare licebit, quomodo motus praecedens turbetur. Nunc igitur corpus rigidum in motu circa axem fixum considerabimus, et scrutabimur, quomodo is a viribus quibuscunque immutari debeat, postquam jam demonstravimus, ejus motum, si nullae adessent vires sollicitantes, uniformem esse futurum. Praeterea vero vires, quas axis gyrationis interea sustinet, sollicite erunt perpendendae.



CAPUT IV.

DE PERTURBATIONE MOTUS GYRATORII A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE ORTA.

PROBLEMA. 20.

398. Si corpus rigidum circa axem fixum gyretur celeritate quaecunque angulari, invenire vires elementares, a quibus dato tempusculo motus angularis datam accelerationem adipiscatur.

SOLUTIO.

Sit ε celeritas angularis, qua scilicet, si motus gyratorius esset uniformis, singulis minutis secundis conficeret angulum $= \varepsilon$, tantam autem motus accipere debeat accelerationem, ut elapso tempusculo dt celeritas angularis fiat $= \varepsilon + d\varepsilon$. Consideretur jam corporis elementum quodcunque dM, cujus distantia ab axe gyrationis sit $= r$, ideoque ejus celeritas $= r\varepsilon$, quae, cum distantia r pro eodem elemento maneat constans, tempusculo dt augmentum accipere debet $= rd\varepsilon$. Ad hoc ergo necesse est, ut massula dM secundum directionem motus sollicitetur a vi quapiam, quae si tantisper ponatur $= p$, erit per motus principia supra stabilita $rd\varepsilon = \frac{2gpdt}{dM}$ (202.); unde vis huic elemento applicanda fit $p = \frac{rdM}{2g} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$. Singula ergo corporis elementa secundum ipsam motus sui directionem sollicitari debent a viribus $= \frac{d\varepsilon}{2gdt} \cdot rd$M, ubi dM exprimit massam cujusque elementi, et r ejus distantiam ab axe. Atque hae sunt vires elementares, quae singula corporis elementa sollicitantes motum gyratorium ita accelerant, ut celeritas angularis ε tempusculo dt accipiat augmentum $d\varepsilon$.

COROLL. 1.

399. Cum $\frac{d\varepsilon}{2gdt}$ pro omnibus elementis corporis eundem valorem retineat, vires elementares sunt in ratione composita massarum earumque

que distantiarum ab axe gyrationis. Singulae autem hae vires singulis elementis secundum ipsam motus directionem applicatae sunt intelligendae.

COROLL. 2.

400. Quia harum virium nulla obstat, quominus reliquae effectum suum plenum producant, perinde ac si singulae particulae a se invicem essent dissolutae, ab his viribus elementaribus neque compages corporis neque axis gyrationis afficitur.

COROLL. 3.

401. Compages igitur partium atque axis gyrationis nullas alias vires sustinent, nisi quae ex motu gyratorio ipso nascuntur, quaeque hoc tempusculo perinde se habebunt, ac si motus gyratorius esset uniformis.

SCHOLION.

402. Etsi autem vires elementares per se axem gyrationis non afficiunt, sed quasi totae in motu singulorum elementorum accelerando consumuntur, tamen quatenus ab iis motus gyratorius rapidior redditur, eatenus ob auctam vim centrifugam vires, quas axis sustinet, fiunt majores. Verum hic effectus primo instanti est infinite parvus, atque axis aliter non afficitur, ac si motus gyratorius esset uniformis. Scilicet cum celeritas angularis sit $= \varepsilon$, quaelibet particula, cujus massa $= dM$ et distantia ab axe $= r$, ab axe recedere conatur vi $= \frac{\varepsilon\varepsilon r dM}{2g}$. Ab omnibus autem

Fig. 32. istis viribus per §. 388. axis OA conjunctim ita afficitur, ut in subsidium vocatis binis directricibus OB et OC invicem et ad axem OA normalibus, quibus pro elemento dM in Z sito parallelae capiantur coordinatae OX $= x$, XY $= y$, YZ $= z$, axis in punctis E et F sustineat duas vires Ee et Ff, quarum illa directrici OB haec vero ipsi OC sit parallela; ita ut sit

$$OE = \frac{\int xy dM}{\int y dM} \text{ et vis } Ee = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g} \int y dM$$

$$OF = \frac{\int xz dM}{\int z dM} \text{ et vis } Ff = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g} \int z dM$$

Vel harum loco in datis duobus punctis O et A binae aequivalentes Ob, Oc et $A\beta$, $A\gamma$ applicatae concipi possunt, quae ex §. 343. erunt, posito intervallo OA $= a$.

vis

$$\text{vis } Ob = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}(a\int ydM - \int xydM); \; \text{vis } A\mathfrak{b} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}\int xydM$$

$$\text{vis } Oc = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}(a\int zdM - \int xzdM); \; \text{vis } A\gamma = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2ag}\int xzdM.$$

Ex quibus formulis colligitur, quantas vires axis ob solum motum gyratorium sustineat.

PROBLEMA. 21.

403. Si dum corpus rigidum circa axem fixum gyratur, singulae ejus particulae secundum ipsam motus sui directionem sollicitentur viribus, quae sint in ratione composita massarum et distantiarum ab axe, definire incrementum celeritatis angularis dato tempusculo productum.

SOLUTIO.

Posita celeritate angulari $= \varepsilon$, qua corpus nunc gyratur, consideremus particulam corporis quamcunque, cujus massa sit $= dM$ et distantia ab axe $= r$. Haec ergo particula secundum motus sui directionem sollicitatur vi, quae est ut rdM: ponatur ergo ea $= \frac{rdM}{h}$, ubi h sit linea pro omnibus corporis elementis hocque instanti eadem. Iam cum hujus elementi celeritas sit $= r\varepsilon$, pro eaque sit r quantitas constans, si hoc elementum extra nexum cum reliquis versaretur, foret $rd\varepsilon = 2g \cdot \frac{rdM}{h} \cdot dt : dM$ $= \frac{2grdt}{h}$, incrementum scilicet celeritatis tempusculo dt productum. Hinc ergo pro celeritate angulari ε fiet $d\varepsilon = \frac{2gdt}{h}$: quare cum ex omnibus elementis eadem celeritatis angularis acceleratio oriatur, ea sibi mutuo nulli sunt impedimento, sed singula elementa suas accelerationes aeque recipient, ac si a reliquis essent soluta. Hinc ab istis viribus, quae cum elementaribus in praec. probl. definitis conveniunt, motus gyratorius totius corporis rigidi ita acceleratur, ut tempusculo dt celeritas angularis ε incrementum capiat $d\varepsilon = \frac{2gdt}{h}$.

COROLL. 1.

404. Incrementum ergo celeritatis angularis $d\varepsilon$ non pendet ab ipsa celeritate angulari ε, quae sive major fuerit sive minor, ab iisdem viribus eodem tempusculo idem incrementum adipiscitur.

COROLL.

COROLL. 2.

405. Quia quaelibet vis elementaris $\frac{rdM}{h}$ est ad distantiam ab axe r normalis in plano ad axem normali, ejus momentum respectu axis est $= \frac{rrdM}{h}$, ideoque summa omnium momentorum $= \frac{1}{h} \int rrdM$.

COROLL. 3.

406. Si corpus praeter has vires elementares ab aliis urgeretur in sensum contrarium, quarum momentum respectu axis itidem esset $= \frac{1}{h} \int rrdM$, ab his illarum effectus destrueretur, motusque nullam reciperet accelerationem.

SCHOLION.

407. De his viribus, quas *elementares* voco, quoniam in singulis elementis mutationem status, quam subeunt, producunt, id praesertim observandum est, quod ab iis axis nullam vim patiatur; propterea quod ab iis singula elementa perinde, ac si a se invicem essent dissoluta, afficiuntur. Quanquam autem hujusmodi vires vix in mundo existunt, tamen ab iis exordiendum erat, ut aliarum quarumcunque virium effectus in motu gyratorio perturbando definire possemus. Si enim aliae vires, quaecunque fuerint, respectu axis gyrationis aequale momentum habeant, eae etiam eandem motus accelerationem producere debent; quoniam si contrario modo essent applicatae, cum elementaribus in aequilibrio forent. Haec autem convenientia tantum de motus mutatione est intelligenda: nam longe aliter res se habebit, cum vires, quas axis gyrationis sustinet, determinari debebunt. Verum etiam haec determinatio ope virium elementarium facile expedietur, quemadmodum jam in capite praecedente est ostensum.

PROBLEMA 22.

408. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, sollicitetur a viribus quibuscunque, definire mutationem momentaneam in motu gyratorio ab iis productam.

SOLUTIO.

Sit ut hactenus ε celeritas angularis, qua corpus jam gyratur; tum quaerantur singularum virium sollicitantium momenta, quae col-

lecta

lecta praebeant summam $= Vf$, quae tendet motum gyratorium vel accelerare vel retardare, prout in eundem sensum vergat, vel in contrarium. Sumamus autem hoc momentum ad accelerationem tendere, quia si contrarium eveniret, ipsum momentum tanquam negativum spectari posset. Quaeritur ergo, quantum incrementum celeritas angularis g tempusculo dt sit accepturum? Dabuntur autem utique vires elementares, quae par incrementum essent producturae. Sit igitur pro elemento dM ad distantiam r ab axe sito vis elementaris $= \frac{rdM}{h}$, cujus momentum cum sit $= \frac{rrdM}{h}$, effectus harum virium in motu gyratorio turbando illi, qui a momento Vf producitur, erit aequalis, si summa omnium illorum momentorum $\frac{1}{h} \int rrdM$ fuerit momento Vf aequalis, unde fit $h = \frac{\int rrdM}{Vf}$. At ex viribus elementaribus $\frac{rdM}{h}$ oritur motus gyratorii acceleratio $dg = \frac{2gdt}{h}$ tempusculo dt. Quare pro h substituto valore modo invento, incrementum celeritatis angularis g a virium momento Vf tempusculo dt productum erit $dg = \frac{2Vfgdt}{\int rrdM}$, ubi $\int rrdM$ est quantitas constans a figura et indole corporis pendens.

COROLL. 1.

409. Incrementum ergo celeritatis angularis dg proportionale est directe momento virium sollicitantium Vf et tempusculo dt, reciproce autem illi quantitati, quae oritur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe gyrationis multiplicentur, et in unam summam colligantur.

COROLL. 2.

410. Si corpus adhuc motu gyratorio confecerit angulum $= \varphi$, erit nunc $\frac{d\varphi}{dt}$ celeritas angularis g, ideoque sumto elemento temporis dt constante, erit $dd\varphi = \frac{2Vfgdt^2}{\int rrdM}$.

COROLL. 3.

411. Sin autem loco tempusculi dt angulum elementarem $d\phi$ interea confectum in calculum introducere velimus, ob $dt = \frac{d\phi}{g}$, habebimus hanc formulam $gdg = \frac{2Vfgd\phi}{\int rrdM}$, qua incrementum quadrati celeritatis angularis definitur.

SCHOLION.

412. Quod si ergo ad quodvis tempus noverimus vires quibus corpus sollicitatur, quarum momentum elapso tempore t sit $= Vf$, ope formulae inventae si integretur, totus motus gyratorius determinari poterit. Ubi quidem observandum est, si vel nullae affuerint vires, vel eae nullum praebeant momentum respectu axis gyrationis, motum futurum esse aequabilem, dum axis has vires totas sustineat. Mutatio scilicet motus tantum a momento virium pendet, eique adeo est proportionalis: Verum videamus etiam, quantas vires ipse axis sustineat, dum motus corporis a viribus quibuscunque perturbatur: quae investigatio ex iis, quae in capite praecedente sunt exposita, facile instituetur. Exempla autem talis motus gyratorii a viribus perturbati inferius afferemus, ubi corpora a gravitate animari assumemus.

PROBLEMA 23.

413. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A sustineat, et quibus resistere debet, ne vacillet.

SOLUTIO.

Ex praecedentibus perspicitur, axem triplicis generis vires sustinere, primo scilicet vires, quibus corpus actu sollicitatur, secundo vires aequales et contrarias viribus elementaribus idem momentum producentibus, ac tertio vires centrifugas ex motu gyratorio natas. Has ergo triplices vires ad data duo axis puncta O et A revocari oportet.

Fig. 44. Quod ergo ad vires corpus actu sollicitantes attinet, quaelibet earum, nisi ejus directio sit in plano ad axem normali, resolvatur in duas VQ et Vv, quarum illa VQ sit axi OA parallela, altera vero Vv in plano ad axem normali, axem in T secante. Iam ob vim VQ axis primo sustinet vim aequalem secundum suam longitudinem OA: praeterea vero in O et A vires Op et Aq ad axem normales in ipso plano OAQP, quarum illa Op versus PQ est

est directa, haec vero Aq inde aversa: ambae autem hae vires sunt aequales et $Op = Aq = \frac{VT}{OA} \cdot$ vis VQ. Deinde vis Vv pro punctis O et A praebet vires Or et As ipsi parallelas, quae sunt

$$\text{vis } Or = \frac{AT}{OA} \cdot \text{vis } Vv, \quad \text{et vis } As = \frac{OT}{OA} \cdot \text{vis } Vv.$$

Hocque modo singulae vires corpus sollicitantes ad axem ejusque terminos O et A reducantur.

Pro viribus secundi generis, quae elementaribus sunt contrariae, Fig. 45. §. 385. secuti, sumamus in O duas directrices OB et OC inter se et ad axem OA normales, quibus etiam in A parallelae constituantur AE et AF, et pro corporis elemento dM in Z sito ponamus coordinatas $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, ut sit ejus distantia ab axe $XZ = r = \sqrt{(yy + zz)}$. Porro sit omnium virium sollicitantium momentum $= Vf$ in sensum BC tendens.

Hinc igitur vidimus, pro utroque termino O et A geminas oriri vires, scilicet posito intervallo $OA = a$ pro termino O

$$\text{vim secundum } OB = \frac{Vf\int(a-x)zdM}{a\int rrdM}$$

$$\text{vim secundum } Oc = \frac{Vf\int(a-x)ydM}{a\int rrdM},$$

at pro altero termino A

$$\text{vim secundum } AE = \frac{Vf\int xzdM}{a\int rrdM}$$

$$\text{vim secundum } Af = \frac{Vf\int xydM}{a\int rrdM},$$

ubi Oc et Af sunt rectae OC et AF in contrariam plagam productae.

Pro viribus tertii generis, ex ipso motu gyratorio natis, ante §. 402. vidimus, cujusmodi vires inde ad utrumque terminum O et A redundent. Scilicet si celeritas angularis sit $= \varepsilon$, manentibus denominationibus modo adhibitis pro termino O habentur hae duae vires:

$$\text{vis secundum } OB = \frac{\varepsilon\varepsilon\int(a-x)ydM}{2ag}$$

$$\text{vis secundum } OC = \frac{\varepsilon\varepsilon\int(a-x)zdM}{2ag}$$

similique modo pro termino altero A

 vis

$$\text{vis secundum AE} = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{u}\int xy\,dM}{2ag}$$

$$\text{vis secundum AF} = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{u}\int xz\,dM}{2ag}$$

Colligendis ergo omnibus his viribus pro utroque termino O et A habebuntur vires, quas axis in his punctis sustinet.

COROLL. 1.

414. Quia vires tertii generis quadratum celeritatis angularis involvunt, eaedem manent, sive $\mathfrak{u}$ sit positiva sive negativa, hoc est sive a viribus sollicitantibus acceleretur, sive retardetur.

COROLL. 2.

415. Omnes vires utrumque axis terminum sollicitantes, quotcunque fuerint, facile ad unam reduci possunt, ita ut uterque terminus ab unica tantum vi urgeatur; atque ad axem retinendum necesse est, ut in his terminis a viribus aequalibus et contrariis sustentetur.

COROLL. 3.

416. Si planum AOB ita capiatur, ut per centrum inertiae corporis I transeat, erit $\int z\,dM = 0$, et $\int y\,dM = M$. GI denotante M massam totius corporis; ex quo superiores formulae aliquanto simpliciores evadent.

SCHOLION.

417. Fundamentum hujus solutionis in superioribus jam abunde est explicatum, unde in singulis rationibus afferendis minus fui sollicitus. Cum enim, si corpus a solis viribus elementaribus sollicitetur, ab iis axis neutiquam afficiatur, sed solas vires centrifugas patiatur; quando ab aliis viribus quibuscunque sollicitatur, primo axis ab iis perinde afficietur, ac si corpus quieverit, ideoque eas ipsas vires sustinebit, quas jam capite praecedente determinavimus. Praeterea vero ob vires centrifugas eas patietur vires, quas tertio genere hic sumus complexi, ita ut hoc problema non discrepet a problemate 17, nisi quod hic vires tertii generis sint super addendae.

PROBLEMA. 24.

418. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire vires, quas totius corporis compages sustinet.

SOLUTIO.

Quaeritur ergo, a quibusnam viribus corpus, si esset in quiete, sollicitari deberet, ut ejus compages perinde afficeretur, atque in statu motus, quem

quem hic consideramus. Primum ergo corpori eaedem vires sunt applicandae, quibus actu sollicitatur, atque adeo in iisdem punctis, quia hic cardo rei in locis, quibus quaeque vires sunt applicatae, versatur. Secundo singulis elementis corporis vires aequales et contrariae viribus elementaribus applicari debent. Scilicet si momentum omnium virium ad motum accelerandum fuerit $= Vf$, tum elemento dM ad distantiam $= r$ ab axe remoto secundum directionem motui ejus contrariam applicata concipiatur vis $= \frac{VfrdM}{\int rrdM}$. Tertio si celeritas angularis sit $= \gamma$, ob motum gyratorium elemento illi quoque applicata concipiatur vis $= \frac{\gamma\gamma rdM}{2g}$, quae directe ab axe avellatur. Quarto axi applicentur ipsae illae vires, quae ad ejus sustentationem requiruntur, et quae in problemate praecedente sunt assignatae. Cunctae jam istae vires corpori applicatae se mutuo in aequilibrio servabunt, et singulas ejus partes aeque sollicitabunt, ac fit in motu proposito. Hincque ergo concludi poterit, quam firmiter omnia corporis elementa inter se cohaerere debeant, ne ab illis viribus ulla dissolutio aut laxatio producatur, sed corpus figuram suam intemeratam conservet.

COROLL. 1.

419. Si nexus partium debilior fuerit, quam ut actioni harum virium, quas modo definivimus, resistere valeat, quoniam figura corporis revera mutationem patietur, id ratione motus non pro rigido erit habendum.

COROLL. 2.

420. Assumimus ergo constanter omnes corporis particulas tam arcte inter se esse connexas, ut vires memoratas sine ulla relaxatione aut figurae mutatione sustinere valeant.

SCHOLION.

421. Haec igitur sunt capita praecipua, ad quae omnes quaestiones de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum a viribus quibuscunque perturbato reduci possunt: praeter ipsam enim motus accelerationem vel retardationem definivimus, quantas vires cum axis gyrationis tum ipsa corporis compages sustineat. Formulae autem, quas pro his determinationibus invenimus, quasdam involvunt formulas integrales, scilicet $\int ydM$, $\int zdM$, $\int xydM$, $\int xzdM$ et $\int rrdM$, quae autem non tanquam

quantitates variabiles seu indefinitae sunt spectandae; sed haec integralia per totam corporis molem extensa sunt intelligenda, ita ut obtineant valores constantes ac determinatos ab indole ac forma cujusque corporis pendentes. Ac binarum quidem priorum valores ex situ centri inertiae definiri vidimus: reliquarum vero valores ex natura corporis per notas integrationis regulas erui debent. Postrema autem imprimis est notatu digna, cum sola in accelerationem vel retardationem ingrediatur, dum reliquae tantum in expressionibus, quae vires ab axe sustentatas indicant, insunt. Cum igitur hic quaestio de ipsa motus perturbatione sit praecipua, operae pretium erit, valores formulae $\int rrdM$ pro variis corporum generibus evolvere, ac praecepta tradere, unde illi quovis casu facilius colligi queant: meretur autem haec formula utique, ut ei nomen singulare *momenti inertiae* imponamus, cujus investigationi caput sequens destinamus.

CAPUT V.

DE MOMENTO INERTIAE

DEFINITIO. 7.

422. *Momentum inertiae* corporis respectu cujuspiam axis est summa omnium productorum, quae oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur.

COROLL. 1.

423. Quoniam tam elementa corporis, quam quadrata distantiarum semper sunt positiva, omnia haec producta positiva sint necesse est: hinc aucta corporis massa certe ejus momentum inertiae augetur.

COROLL. 2.

424. Momentum ergo inertiae spectari potest tanquam productum ex massa corporis in quadratum cujuspiam lineae: ita si massa corporis fuerit $= M$, ejus momentum respectu cujusvis axis habebit hujusmodi formam Mkk.

COROLL. 3.

425. Invento ergo momento inertiae corporis respectu axis, circa quem id ante gyrari assumsimus, idque fuerit $= Mkk$, in formulis supra inven-

inventis loco expressionis $\int rrdM$ scribi conveniet Mkk. Ita si momentum virium sollicitantium sit Vf, et celeritas angularis $= \varepsilon$, erit

$$d\varepsilon = \frac{2Vfgdt}{Mkk}.$$

EXPLICATIO.

426. Ratio hujus denominationis ex similitudine motus progressivi est desumta: quemadmodum enim in motu progressivo, si a vi secundum suam directionem sollicitante acceleretur, est incrementum celeritatis ut vis sollicitans divisa per massam seu inertiam; ita in motu gyratorio, quoniam loco ipsius vis sollicitantis ejus momentum considerari oportet, eam expressionem $\int rrdM$, quae loco inertiae in calculum ingreditur, *momentum inertiae* appellemus, ut incrementum celeritatis angularis simili modo proportionale fiat momento vis sollicitantis diviso per momentum inertiae. Quae similitudo eo est perfectior, quod utrinque per elementum temporis dt et duplam lineam $2g$ multiplicari oporteat, ut ipsum celeritatis incrementum exprimatur.

SCHOLION.

427. Cum idem corpus ad infinitos axes referri possit, respectu cujuslibet peculiare habebit momentum inertiae, ex quo momentum inertiae absolute definiri nequit, nisi ad determinatum axem referatur. Interim tamen non semper opus est, si ejusdem corporis momentum inertiae successive respectu plurium axium investigari debeat, ut calculus de novo ex formula $\int rrdM$ evolvatur: sed saepe evenit, ut cum momentum inertiae respectu unius axis invenerimus, ex eo facile momenta inertiae ejusdem corporis respectu infinitorum aliorum axium colligere queamus. Haec autem commoditas imprimis locum habet, quando axes fuerint paralleli, ita ut cognito momento inertiae pro uno axe, ex eo facile momentum inertiae pro quovis alio axe illi parallelo assignari possit, id quod sequente problemate ostendamus.

PROBLEMA 25.

428. Dato corporis cujusdam momento inertiae respectu axis OA, invenire ejusdem corporis momentum inertiae respectu alius axis *oa* illi paralleli. Fig. 46.

SOLUTIO.

Sit $Oo = e$ distantia horum axium, in quorum plano accipiatur directrix OB ad OA normalis, et tertia OC ad utramque perpendicularis.

Conside-

Consideretur corporis, cujus tota massa $= M$, elementum quodvis dM in Z, unde ad planum AOB demisso perpendiculo ZY et ex Y ducta ad OA normaliter YX, quae producta alteri axi oa occurrat in x: ponanturque pro axe dato OA coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quoniam igitur respectu hujus axis OA momentum inertiae datur, sit id $= Mkk$, eritque $\int(yy + zz)\,dM = Mkk$. Iam pro novo axe oa, ob $ox = x$, $xY = c + y$ et $YZ = z$, erit momentum inertiae $= \int((c + y)^2 + zz)\,dM = \int ccdM + 2\int cydM + \int(yy + zz)dM$. Cum igitur sit $\int(yy + zz)\,dM = Mkk$, et $\int ccdM = Mcc$, pro membro $2\int cydM = 2c\int ydM$ consideretur centrum inertiae corporis, quod sit in I, unde ad planum axium demittatur perdendiculum IK, et ex K ad axes normalis KGg, eritque $\int ydM = M \cdot GK$. Hinc erit momentum inertiae respectu axis $oa = Mkk + Mcc + 2Mc \cdot GK$, quod ob $Gg = c$, et $cc + 2c \cdot GK = gK^2 - GK^2$, ita exprimetur, ut sit

$$Mkk + M \cdot gK^2 - M \cdot GK^2,$$

sicque cognito momento inertiae respectu axis OA, quod est $= Mkk$, facile invenitur momentum inertiae respectu alius cujusque axis oa illi paralleli.

COROLL. 1.

429. Si axis oa longius distat a centro inertiae I, quam axis OA, momentum inertiae respectu axis oa majus est, quam respectu axis OA. Est enim momentum inertiae respectu axis $oa = Mkk + M \cdot gI^2 - M \cdot GI^2$.

COROLL. 2.

430. Si igitur infiniti axes inter se paralleli concipiantur, momentum inertiae erit minimum respectu ejus axis, qui per ipsum centrum inertiae ducitur. Scilicet si centrum inertiae esset in G, axisque OA per id transiret, cujus respectu momentum inertiae fuerit $= Mkk$, erit respectu axis oa momentum inertiae $= Mkk + M \cdot Gg^2$.

COROLL. 3.

431. Si igitur detur momentum inertiae Mkk respectu cujuspiam axis per centrum inertiae corporis transeuntis, momentum inertiae respectu alius cujusvis axis illi paralleli superat illud producto ex massa in quadratum distantiae hujus axis a centro inertiae.

SCHOLION.

432. Hinc investigatio momentorum inertiae pro quovis corpore restringitur tantum ad axes per ejus centrum inertiae ductos, quorum respe-

respectu si explorata fuerint momenta inertiae, inde pro aliis quibuscunque axibus momenta inertiae facile colliguntur. Atque haec proprietas centri inertiae, quod momenta inertiae respectu axium per id transeuntium sint minima, inter omnia respectu aliorum axium parallelorum sumta, omnino est memorabilis, cum etiam pro motu gyratorio insignem hujus centri praestantiam declaret. Verum per centrum inertiae innumerabiles axes ducere licet, quorum respectu momenta inertiae vehementer inter se discrepare possunt, neque patet, quomodo ex datis aliquibus reliqua definiri queant. Interim tamen, quoniam eorum nullum vel evanescere vel in infinitum excrescere potest, inter ea tam maximum detur quam minimum necesse est, quae investigatio omnino digna videtur, ut diligentius suscipiatur. Sed quo ea facilius succedat, conveniet in genere momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti calculo exprimi.

PROBLEMA. 26.

433. Si natura corporis exprimatur aequatione inter ternas coordinatas, invenire ejus momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti.

SOLUTIO.

Sit I centrum intertiae corporis, in quo simul concursus ternarum directricium IA, IB, IC inter se normalium constituatur, quibus pro elemento corporis quocunque dM in Z sito coordinatae parallelae sint $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, unde si qua directricium pro axe sumeretur, ejus respectu momentum inertiae facile assignaretur. Verum id definiendum sit respectu axis cujuscunque IG, per quem planum ad AIB normale ductum hoc secet in recta IF, ac ponatur angulus AIF $= \eta$ et angulus FIG $= \vartheta$; quaestio ergo huc redit, ut punctum Z per alias ternas coordinatas exprimatur, quarum una sit in ipso axe IG sumta. Mutemus ternas directrices primo ita, ut una sit IF, manente IC, dum tertia ad has sit normalis, et ducta YX ad IF nomali erunt ternae coordinatae, quae sint x', y', z', Fig. 47.

$IX' = x' = x \cos\eta + y \sin\eta$; $X'Y = y' = y \cos\eta - x \sin\eta$; et $YZ = z' = z$.

simili modo hinc transitus fiat ad novas ternas coordinatas x'', y'', z'', quarum x'' in axe IG capiatur eritque

$$x'' = x' \cos\vartheta + z' \sin\vartheta;\ z'' = z' \cos\vartheta - x' \sin\vartheta;\ y'' = y'$$

unde valoribus substitutis habebitur

$$x'' = x \cos\eta \cos\vartheta + y \sin\eta \cos\vartheta + z \sin\vartheta$$
$$y'' = y \cos\eta - x \sin\eta; \text{ et } z'' = z \cos\vartheta - x \cos\eta \sin\vartheta - y \sin\eta \sin\vartheta$$

Atque hinc puncti Z ab axe IG distantiae quadratum prodibit $y''y'' + z''x'' =$

$$x^2 \sin\eta^2 + y^2 \cos\eta^2 + z^2 \cos\vartheta^2 - 2xy \sin\eta \cos\eta - 2xz \cos\eta \sin\vartheta \cos\vartheta$$
$$- 2yz \sin\eta \sin\vartheta \cos\vartheta$$
$$+ x^2 \cos\eta^2 \sin\vartheta^2 + y^2 \sin\eta^2 \sin\vartheta^2 \quad + 2xy \sin\eta \cos\eta \sin\vartheta^2$$

Ponamus jam sequentia integralia per totum corpus extensa:

$$\int xx\,dM = A; \; \int yy\,dM = B; \; \int zz\,dM = C$$
$$\int xy\,dM = D; \; \int xz\,dM = E; \; \int yz\,dM = F,$$

eritque momentum inertiae respectu axis IG quaesitum

$$A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\vartheta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\vartheta^2) + C \cos\vartheta^2$$
$$- 2D \sin\eta \cos\eta \cos\vartheta^2 - 2E \cos\eta \sin\vartheta \cos\vartheta - 2F \sin\eta \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

COROLL. 1.

434. Hic quantitates A, B, C necessario sunt quantitates positivae, reliquae vero D, E, F pro ratione corporis vel positivae vel negativae esse possunt.

COROLL. 2.

435. Momentum inertiae respectu axis IA est $= B + C$; respectu axis IB $= A + C$, et respectu axis IC $= A + B$: Cognitis ergo his tribus momentis innotescunt valores A, B, et C.

COROLL. 3.

436. Quomodocunque autem accipiantur anguli η et ϑ, momentum inertiae inventum nunquam evanescere potest, sed semper valorem positivum obtinet.

SCHOLION.

437. Si non solum motum corporis circa axem IG, sed etiam vires ab axe sustentatas determinare velimus, praeter momentum inertiae respectu hujus axis quoque valores formularum integralium $\int x''y''dM$ et $\int x''z''dM$ nosse debemus. Fiunt autem istae formulae per coordinatas x, y, z;

$$\int x''y''dM = \int dM(x \cos\eta \cos\vartheta + y \sin\eta \cos\vartheta + z \sin\vartheta)(y \cos\eta - x \sin\eta) \text{ et}$$
$$\int x''z''dM = \int dM(x \cos\eta \cos\vartheta + y \sin\eta \cos\vartheta + z \sin\vartheta)(- x \cos\eta \sin\vartheta$$
$$- y \sin\eta \sin\vartheta + z \cos\vartheta)$$

Quare si hic valores supra assumti substituantur, habebimus

$\int x''y''dM$

$$\int x''y''dM = -A\sin\eta\cos\eta\cos\vartheta + B\sin\eta\cos\eta\cos\vartheta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\vartheta - E\sin\eta\sin\vartheta + F\cos\eta\sin\vartheta$$

$$\int x''z''dM = -A\cos\eta^2\sin\vartheta\cos\vartheta - B\sin\eta^2\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin\vartheta\cos\vartheta - 2D\sin\eta\cos\eta\sin\vartheta\cos\vartheta + E\cos\eta(\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2) + F\sin\eta(\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2)$$

qui valores sunt eo magis notandi, quod casibus, quibus momentum inertiae fit maximum vel minimum, evanescunt, uti mox videbimus.

PROBLEMA. 27.

438. Inter omnes axes per centrum inertiae dati corporis ductos definire eum, cujus respectu momentum inertiae est vel mrximum vel minimum.

SOLUTIO.

Maneant omnia, uti in problemate praecedente, sitque IG axis talis quaesitus, ita ut determinari oporteat angulos AIF $= \eta$ et FIG $= \vartheta$. Momentum ergo inertiae respectu hujus axis cum sit $\int(y''y'' + z''z'')dM =$

$$A\sin\eta^2 + A\cos\eta^2\sin\vartheta^2 + B\cos\eta^2 + B\sin\eta^2\sin\vartheta^2 + C\cos\vartheta^2 - 2D\sin\eta\cos\eta\cos\vartheta^2 - 2E\cos\eta\sin\vartheta\cos\vartheta - 2F\sin\eta\sin\vartheta\cos\vartheta$$

differentietur duplici modo, sumendo primum η deinde ϑ variabile, et utrumque differentiale nihilo aequale ponatur. Ex priore igitur prodibit haec aequatio

$$2A\sin\eta\cos\eta\cos\vartheta^2 - 2B\sin\eta\cos\eta\cos\vartheta^2 - 2D\cos\eta^2\cos\vartheta^2 + 2D\sin\eta^2\cos\vartheta^2 + 2E\sin\eta\sin\vartheta\cos\vartheta - 2F\cos\eta\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

quae per $-2\cos\vartheta$ divisa praebet

$$-(A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\vartheta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\vartheta - E\sin\eta\sin\vartheta + F\cos\eta\sin\vartheta = 0$$

sive $\int x''y''dM = 0$: *unde colligitur*

$$\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = tang\,\vartheta = \frac{-(A-B)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{E\sin\eta - F\cos\eta}.$$

Sumendo autem ϑ variabile pervenimus ad hanc aequationem;

$$2A\cos\eta^2\sin\vartheta\cos\vartheta + 2B\sin\eta^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 2C\sin\vartheta\cos\vartheta + 4D\sin\eta\cos\eta\sin\vartheta\cos\vartheta - 2E\cos\eta(\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2) - 2F\sin\eta(\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2) = 0$$

quae formula est $= -2\int x''z''dM$. Cum nunc sit

$2\sin\vartheta\cos\vartheta = \sin 2\vartheta$ et $\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2 = \cos 2\vartheta$ erit

$$A\cos\eta^2\sin 2\vartheta + B\sin\eta^2\sin 2\vartheta - C\sin 2\vartheta + 2D\sin\eta\cos\eta\sin 2\vartheta - 2E\cos\eta\cos 2\vartheta - F\sin\eta\cos 2\vartheta = 0$$

 unde

unde sequitur

$$\frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} = \operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2E\cos\eta + 2F\sin\eta}{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2D\sin\eta\cos\eta}.$$

Verum ex superiori ob $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2\operatorname{tang}\vartheta}{1-\operatorname{tang}\vartheta^2}$ habetur:

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2(E\sin\eta - F\cos\eta)((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))}{(E\sin\eta - F\cos\eta)^2 - ((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))^2}$$

quibus valoribus coaequatis erit

$$\begin{aligned}(E\cos\eta + F\sin\eta)(E\sin\eta - F\cos\eta)^2 &= (E\cos\eta + F\sin\eta)((B-A)\sin\eta\cos\eta \\ &\quad + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))^2 \\ &\quad + (E\sin\eta - F\cos\eta)((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 \\ &\quad - C + 2D\sin\eta\cos\eta) \\ &= ((B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2))(E(B\sin\eta - C\sin\eta + D\cos\eta) \\ &\quad - F(A\cos\eta - C\cos\eta + D\sin\eta))\end{aligned}$$

Cum jam $\sin\eta$ et $\cos\eta$ ubique totidem compleant dimensiones, si ponamus $\frac{\sin\eta}{\cos\eta} = \operatorname{tang}\eta = t$, obtinebimus hanc aequationem

$$\begin{aligned}(E + Ft)(F - Et)^2 = (D + (B-A)t - Dtt)(DE - AF + CF + \\ (BE - CE - DF)t)\end{aligned}$$

quae in ordinem redacta dat

$$\begin{aligned}0 &= EFF - DDE + (A-C)DF \\ &+ t(F^3 - 2EEF + DDF + (A - 2B + C)DE - (A-B)(A-C)F) \\ &+ t^2(E^3 - 2EEF + DDE + (B - 2A + C)DF + (A-B)(B-C)E) \\ &+ t^3(EEF - DDF + (B-C)DE)\end{aligned}$$

ita ut ex hac aequatione cubica valor ipsius t erui debeat.

COROLL. 1.

439. Cum aequatio, ex qua valor ipsius t inveniri debet, sit cubica, semper unam certe habet radicem realem, quae praebet tangentem anguli AIF $= \eta$, quo angulo invento alter FIG $= \vartheta$ ita definitur ut sit

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{(B-A)\sin\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{E\sin\eta - F\cos\eta} = \frac{\frac{1}{2}(B-A)\sin 2\eta + D\cos 2\eta}{E\sin\eta - F\cos\eta}.$$

COROLL. 2.

440. Fieri autem potest, ut omnes tres radices sint reales, quo casu tres in corpore dabuntur axes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

SCHO-

SCHOLION.

441. Ex rei autem natura intelligitur, in quovis corpore plus uno tali axe inesse, cujus respectu momentum inertiae sit vel maximum vel minimum; si enim unicus daretur, ejus respectu momentum esset omnium vel maximum vel minimum, utrovis ergo casu alius daretur axis necesse est, cujus respectu momentum inertiae foret vel minimum vel maximum. Atque hinc concludere licet, aequationem cubicam inventam non solum unam, sed duas habere radices reales, ex quo adeo omnes tres radices semper erunt reales, quod quidem difficulter ex ejus forma perspici potest. Verum cognito jam uno tali axe haud difficulter reliqui ejusdem indolis reperiuntur, id quod sequente problemate ostendisse operae erit pretium.

PROBLEMA 28.

442. **Dato uno corporis axe per centrum inertiae transeunte, cujus respectu momentum inertiae est maximum vel minimum, invenire reliquos ejus axes per centrum inertiae ductos, quibus eadem proprietas conveniat.**

SOLUTIO.

Existente I centro inertiae corporis, sit IA axis ille datus, cujus respectu momentum inertiae est maximum vel minimum, atque ex praecedente problemate constat, hanc proprietatem locum habere non posse, nisi sit $\int xydM = 0$ et $\int xzdM = 0$; quare pro formulis superioribus erit $D = 0$ et $E = 0$. Quodsi jam IG alius fuerit ejusmodi axis, pro quo ponatur ut ante angulus AIF $= \eta$ et FIG $= \vartheta$, ut sit ejus respectu momentum inertiae $A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\vartheta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\vartheta^2) + C\cos\vartheta^2 - 2F\sin\eta \sin\vartheta \cos\vartheta$, methodus maximorum et minimorum has duas suppeditat aequationes:

I. $(A-B)\sin\eta \cos\eta \cos\vartheta^2 - F\cos\eta \sin\vartheta \cos\vartheta = 0$

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\vartheta\cos\vartheta - C\sin\vartheta\cos\vartheta - F\sin\eta(\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2) = 0.$

Quarum prior cum sit divisibilis per $\cos\eta \cos\vartheta$, erit vel $\cos\eta = 0$ vel $\cos\vartheta = 0$; tertia enim ejus radix $\tang\vartheta = \frac{(A-B)\sin\eta}{F}$ in altera aequatione substituta nihil definit, quoniam angulus η prorsus ex calculo egreditur. Sit ergo $\cos\eta = 0$, ideoque $\eta =$ AIF rectus, et $\sin\eta = 1$; atque altera aequatio praebet:

$$B\sin\vartheta\cos\vartheta - C\sin\vartheta\cos\vartheta - F(\cos\vartheta^2 - \sin\vartheta^2) = 0$$

 seu

seu $\frac{1}{2}(B-C) \int 2\vartheta = F \cos 2\vartheta$ et $tang\ 2\vartheta = \frac{2F}{B-C}$: unde pro angulo FIG duplex prodit valor, alter FIG $= \vartheta$, alter FIG $= \vartheta + 90°$. Sicque ex uno axe IA dato, duo semper novi colliguntur, eadem maximi minimive proprietate gaudentes, qui ergo tres axes respondent tribus radicibus aequationis cubicae ante inventae. Prioris autem aequationis radix $\cos\vartheta = 0$ nihil plane huc facit, cum enim angulus FIG esset rectus, utcunque angulus AIF $= \eta$ variatur, recta IG eundem situm IC perpetuo servat, neque differentiatio hic locum habet, erit vero ob $\eta = 90°$ momentum inertiae respectu axis IG $= A + B \int \vartheta^2 + C \cos\vartheta^2 - 2F \int \vartheta \cos\vartheta$, at respectu axis dati IA $= B + C$.

COROLL. 1.

443. Cum igitur sit angulus AIF $= \eta$ rectus, ambo reliqui axes sunt ad IA normales, et quia illi etiam invicem angulum rectum constituunt, in omni corpore tres dantur axes per centrum inertiae I ducti et inter se normales, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

COROLL. 2.

444. Quodsi ergo ipsae rectae IA, IB et IC fuerint hi tres axes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima, erit $\int xydM = D = 0$; $\int xzdM = E = 0$ et $\int yzdM = F = 0$.

SCHOLION.

445. In his quidem problematibus sumsimus, punctum I esse corporis centrum inertiae, quoniam calculum momenti inertiae tantum ad ejusmodi axes, qui per corporis centrum inertiae transeunt, adstrinximus: verum in toto calculo utriusque problematis nihil inest, quod naturam centri inertiae cum puncto I conjungat. Quare haec problemata multo latius patent, ita ut sumto quocunque puncto I inter omnes axes per id transeuntes semper tres definiri queant, quorum respectu momenta inertiae sint vel maxima vel minima, atque ut hi tres axes sint inter se normales. Verum hic tantum istam proprietatem tanquam centro inertiae convenientem considero, ac pro quolibet corpore plurimum intererit, hos ternos axes nosse, quoniam ex iis momenta inertiae respectu omnium axium facillime inveniri poterunt.

DEFI-

DEFINITIO. 8.

446. *Axes principales* cujusque corporis sunt tres illi axes per ejus centrum inertiae transeuntes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

COROLL. 1.

447. Ex praecedentibus intelligitur, pro quolibet corpore non solum dari tales ternos axes principales, sed eos etiam inter se esse normales: unde ii commodissime pro ternis directricibus, ad quas corpus referatur, accipientur.

COROLL. 2.

448. Quodsi ergo IA IB, IC fuerint cujuspiam corporis axes principales, iisque pro elemento corporis dM in Z sito parallelae constituantur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$: non solum erit $\int x dM = 0$, $\int y dM = 0$, $\int z dM = 0$; sed etiam $\int xy dM = 0$, $\int xz dM = 0$, et $\int yz dM = 0$. Fig. 47.

COROLL. 3.

449. Tum vero si ponatur $\int xx dM = A$; $\int yy dM = B$; $\int zz dM = C$, erit corporis momentum inertiae respectu axis $IA = B + C$; respecta axis $IB = A + C$, et respectu axis $IC = A + B$, quae sunt maxima vel minima.

SCHOLION.

450. Veritas utique est maximi momenti, quod in omni corpore tales tres axes principales dentur, cujus demonstratio ex praecedentibus utique est manifesta. Sumtis enim ternis directricibus IA, IB, IC utcunque, quae in centro inertiae I se invicem normaliter intersecent, unum ejusmodi axem principalem IG definire docuimus ope resolutionis aequationis cubicae: tum vero cognito uno facili calculo duo reliqui assignantur. Iam vero vix occurret corpus tam irregulare, cujus non saltem unus axis principalis innotescat, ita ut deinceps bini reliqui facillime se prodant. Quare in postremum assumam, in quovis corpore hos ternos axes principales nobis esse cognitos; quorum respectu dummodo momenta inertiae novimus, pro omnibus aliis axibus promptissime exhiberi possunt, uti ex sequente problemate patebit.

EX-

EXPLICATIO.

451. Quomodo ratio maximi ac minimi his tribus axibus principalibus conveniat, haud ita facile perspicitur. Cum enim inter eos certe sit unus, cujus respectu momentum inertiae sit omnium maximum, itemque unus, cujus respectu momentum inertiae sit omnium minimum; necesse est, ut respectu tertii momentum inertiae sit neque omnium maximum neque omnium minimum, nisi forte cum alterutro illorum conveniat, quod aliquando fieri potest. Verum calculus maximorum et minimorum saepenumero ejusmodi quantitates indicit, quae absolute neque sint maxima neque minima; quoniam eo calculo plus non declaratur, quam si infinite parum ab loco invento recesseris, neque augmentum

Fig. 47. neque decrementum prodire. Ita si IA sit axis maximi absolute sumti, et IC axis minimi absolute sumti, respectu axis IB momentum inertiae neque omnium erit maximum nequr minimum, verumtamen ejusmodi medium tenebit, ut si alius axis ab eo infinite parum distans in quamcunque plagam assumatur, ejus momentum inertiae neque crescat, neque decrescat. Atque hanc ob rem inter hos tres axes principales ingens discrimen intercedit, quod imprimis observari meretur, ut eorum unus habeat maximum momentum, unus minimum, tertius vero medium, quod tamen in calculo tanquam maximum vel minimum spectari possit, cujus rei ratio in sequenti problemate magis illustrabitur.

PROBLEMA 29.

452. Datis cujusdam corporis momentis inertiae respectu trium axium principalium, invenire ejus momentum inertiae respectu cujusvis axis per ejus centrum inertiae ducti.

SOLUTIO.

Fig. 47. Sint IA, IB, IC tres corporis axes principales, sibi mutuo in centro inertiae I normaliter occurrentes, et posita corporis massa $= M$, sit ejus momentum inertiae respectu axis $IA = Maa$, respectu axis $IB = Mbb$ et respectu axis $IC = Mcc$: unde quaeri debeat momentum inertiae respectu axis cujuscunque IG, qui ad planum AIB inclinetur angulo $GIF = \vartheta$, sitque angulus $AIF = \eta$. Consideretur nunc elementum corporis dM in Z, cujus puncti coordinatae sint $IX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$; ac positis integralibus $\int xxdM = A$, $\int yydM = B$, $\int zzdM = C$, erit $\int xydM = D = o$, $\int xzdM = E = o$, $\int yzdM = F = o$. Unde ex §. 433. erit momentum inertiae respectu axis IG $=$

$$A(\int\eta^2 + cos\int\eta^2\int\vartheta^2) + B(cos\int\eta^2 + \int\eta^2\int\vartheta^2) + C\,cos\int\vartheta^2.$$

Cum

Cum autem ex datis ternis momentis sit

$$Maa = B + C;\ Mbb = A + C;\ Mcc = A + B$$

hinc vicissim colligitur

$$A = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa);\ B = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb);\ C = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

quibus valoribus substitutis erit quaesitum momentum inertiae respectu axis $IG = M(aa\cos\eta^2\cos\vartheta^2 + bb\sin\eta^2\cos\vartheta^2 + cc\sin\vartheta^2)$. Ubi notetur, esse $\cos\eta\cos\vartheta = \cos AIG$, $\sin\eta\cos\vartheta = \cos BIG$ et $\sin\vartheta = \cos CIG$. Quare si distantiae axis IG a ternis axibus principalibus ponantur:

$$AIG = \alpha;\ BIG = \beta,\ CIG = \gamma$$

erit momentum inertiae respectu axis IG =

$$Maa\cos\alpha^2 + Mbb\cos\beta^2 + Mcc\cos\gamma^2$$

illi autem anguli α, β, γ ita sunt comparati, ut sit semper $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

COROLL. 1.

453. Posito momento inertiae respectu axis $IG = Mkk$, id sequentibus modis exprimi potest:

$$Mkk = Maa - M(aa - bb)\cos\beta^2 - M(aa - cc)\cos\gamma^2$$

$$Mkk = Mbb + M(aa - bb)\cos\alpha^2 - M(bb - cc)\cos\gamma^2$$

$$Mkk - Mcc + M(aa - cc)\cos\alpha^2 + M(bb - cc)\cos\beta^2$$

et in qualibet harum expressionum binos angulos pro lubitu assumere licet.

COROLL. 2.

454. Si fuerit $aa > bb$ et $bb > cc$, momentum inertiae respectu axis IA omnium erit maximum, at respectu axis IC omnium erit minimum: medium autem tenebit momentum inertiae respectu axis IB.

COROLL. 3.

455. Si fuerit $(aa - bb)\cos\alpha^2 > (bb - cc)\cos\gamma^2$, momentum inertiae respectu axis IG majus est quam medium Mbb, contra vero est minus. Sin autem sit $(aa - bb)\cos\alpha^2 = (bb - cc)\cos\gamma^2$, quod infinitis locis fieri potest, ibi omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia.

COROLL. 4.

456. Si fuerit $aa = bb = cc$, hoc est si momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, respectu omnium axium per centrum inertiae ductorum momenta inertiae sunt inter se aequalia: ideoque quilibet axis pro principali haberi potest.

SCHOLION.

457. Eleganter haec more in trigonometria sphaerica recepto repraesentari possunt. Sint enim constituto centro inertiae I in centro sphaerae, puncta A, B, C extremitates axium principalium in superficie sphaerica Fig. 48.

 termi-

terminatae, ita ut arcus AB, AC et BC sint quadrantes; axibusque in A, B, C terminatis respondeant momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, quorum primum sit maximum, secundum medium, et tertium minimum. Quodsi jam alius axis quicunque per centrum inertiae transiens, qui superficiem sphaericam in puncto S, trajiciat, consideretur, ejus respectu momentum inertiae erit:

$$Maa\, cos\, AS^2 + Mbb\, cos\, BS^2 + Mcc\, cos\, CS^2$$

quod ob $cos\, AS^2 + cos\, BS^2 + cos.\, CS^2 = 1$, his modis exprimi potest:

$$Maa - M(aa - bb)\, cos\, BS^2 - M(aa - cc)\, cos\, CS^2 \text{ vel}$$
$$Mbb + M(aa - bb)\, cos\, AS^2 - M(bb - cc)\, cos\, CS^2 \text{ vel}$$
$$Mcc + M(aa - cc)\, cos\, AS^2 + M(bb - cc)\, cos\, BS^2.$$

Hinc si S sit in quadrante BC puta in D, erit momentum inertiae respectu axis $ID = M(bb\, cos\, BD^2 + cc.\, cos\, CD^2) = Mbb - M(bb - cc)\, cos\, CD^2 = Mcc + M(bb - cc)\, cos\, BD^2$,

seu momentum inertiae respectu axis ID erit:

$$Mbb - M(bb - cc)\, fi\, BD^2 = Mcc + M(bb - cc)\, fi\, CD^2.$$

Simili modo momentum inertiae respectu axis IE est

$$Maa - M(aa - cc)\, fi\, AE^2 = Mcc + M(aa - cc)\, fi\, CE^2;$$

momentum autem inertiae respectu axis IF fit

$$Maa - M(aa - bb)\, fi\, AF^2 = Mbb + M(aa - bb)\, fi\, BF^2.$$

PROBLEMA. 30.

458. Invenire omnes axes per centrum inertiae ductos, quorum respectu momenta inertiae sint inter se aequalia.

SOLUTIO.

Fig. 48. Sint momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC respective Maa, Mbb, Mcc et $aa > bb > cc$: et quaerantur omnes axes per centrum inertiae I ducendi, quorum respectu momenta inertiae sint inter se aequalia, et quidem aequalia ei, quod respondet axi IE, sumto E in quadrante AC, quoniam ab A ad C omnia momenta hujus corporis a maximo ad minimum occurrunt. Sit IS talis axis, et habebimus hanc aequationem:

$$Maa - M\,(aa - cc)\, fi\, AE^2 = Maa - M\,(aa - bb)\, cos\, BS^2 - M\,(aa - cc)\, cos\, CS^2$$

seu $(aa - cc)\, fi\, AE^2 = (aa - bb)\, cos\, BS^2 + (aa - cc)\, cos\, CS^2$

ergo ob $cos\, BS^2 = fi\, AS^2 - cos\, CS^2$ erit

$$(aa - cc)\, fi\, AE^2 = (aa - bb)\, f\, AS^2 + (bb - cc)\, cos\, CS^2$$

Introducatur angulus CAS, et cum sit $cos\, CS = fi\, AS\, cos\, CAS$ erit

$$(aa - cc)\, fi\, AE^2 = (aa - bb)\, fi\, AS^2 + (bb - cc)\, fi\, AS^2\, cos\, CAS^2$$

ergo

ergo $\text{ſ}\,AS^2 = \dfrac{(aa-cc)\,\text{ſ}\,AE^2}{aa-bb+(bb-cc)\cos\!\text{ſ}\,CAS^2}$

Sin autem augulum ACS introducamus, reperiemus

$$\text{ſ}\,CS^2 = \frac{(aa-cc)\,\text{ſ}\,CE^2}{bb-cc+(aa-bb)\cos\!\text{ſ}\,ACS^2};$$

angulus CAS usque ad rectum augeri potest, dum $(aa-cc)\,\text{ſ}\,AE^2$ non excedat $aa-bb$, hoc est si fuerit $\text{ſ}\,AE < \sqrt{\dfrac{aa-bb}{aa-cc}}$; at angulus ACS usque ad rectum crescere potest, si sit $\text{ſ}\,CE < \sqrt{\dfrac{bb-cc}{aa-cc}}$ seu $\text{ſ}\,AE > \sqrt{\dfrac{aa-bb}{aa-cc}}$. Quare punctum S erit in curva, quae ex E assurgens per quadrantem AB transibit, si fuerit $\text{ſ}\,AE < \sqrt{\dfrac{aa-bb}{aa-cc}}$; curva autem illa per quadrantem BC transibit, si fuerit $\text{ſ}\,AE > \sqrt{\dfrac{aa-bb}{aa-cc}}$. Casu autem quo $\text{ſ}\,AE = \sqrt{\dfrac{aa-bb}{aa-cc}}$ curva per ipsum punctum B transibit, omniaque momenta inertiae erunt $= Mbb$. Hoc igitur casu erit $\text{ſ}\,AS^2 = \dfrac{aa-bb}{aa-bb+(bb-cc)\cos\!\text{ſ}\,CAS^2}$.

Hinc ob $\cos\!\text{ſ}\,AE = \sqrt{\dfrac{bb-cc}{aa-cc}}$, et $\dfrac{aa-bb}{bb-cc} = \dfrac{\text{ſ}\,AE^2}{\cos\!\text{ſ}\,AE^2}$, fiet $\text{ſ}\,AS^2 = \dfrac{\text{ſ}\,AE^2}{\text{ſ}\,AE^2+\cos\!\text{ſ}\,AE^2\cos\!\text{ſ}\,CAS^2}$ ideoque $tang\,AS = \dfrac{tang\,AE}{\cos\!\text{ſ}\,CAS}$: unde intelligitur loca punctorum S sita esse in circulo maximo per puncta B et E traducto. Fig. 49.

Casu quo $\sin AE < \sqrt{\dfrac{aa-bb}{aa-cc}}$, seu punctum E propius ad A sumitur, sit id in e, et in quadrante AB dabitur punctum f, in quo momentum sit aeque magnum. Erit ergo $\text{ſ}\,Af^2 = \dfrac{(aa-cc)\,\text{ſ}\,Ae^2}{aa-bb}$: unde si ponatur $Ae = e$; $Af = f$; $AS = s$ et angulus $eAs = \phi$, ob $\dfrac{aa-cc}{aa-bb} = \dfrac{\sin f^2}{\text{ſ}\,e^2}$ et $\dfrac{bb-cc}{aa-bb} = \dfrac{\text{ſ}\,f^2-\sin e^2}{\text{ſ}\,e^2}$, habebimus inter s et ϕ hanc aequationem:

tionem: $\text{ſi}\, s^2 = \frac{\text{ſi}\, e^2\, \text{ſi}\, f^2}{\text{ſi}\, e^2 + (\text{ſ}f^2 - \text{ſ}e^2)\, \text{coſ}\, \varphi^2} = \frac{\text{ſi}\, e^2\, \text{ſi}\, f^2}{\text{ſ}e^2\, \text{ſi}\, \varphi^2 + \text{ſi}\, f^2\, \text{coſ}\, \varphi^2}$, qua aequatione natura lineae $e\,s\,f$ exprimitur, eſtque $\frac{\text{ſi}\, e}{\text{ſi}\, f} = \text{ſi}\ AE$. Caſu denique quo $\text{ſi}\ AE > \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$, cadat punctum E in e', dabiturque in quadrante BC punctum d, ubi momentum eſt idem atque in e', ut ſit ſi $Cd^2 = \frac{(aa-cc)\, \text{ſi}\, Ce'^2}{bb-cc}$. Ponatur jam $Ce' = e$; $Cd = f$; $Cs' = s$ et angulus $e'Cs' = \varphi$; ob $\frac{aa-cc}{bb-cc} = \frac{\text{ſ}f^2}{\text{ſ}e^2}$ et $\frac{aa-bb}{bb-cc} = \frac{\text{ſ}f^2 - \text{ſi}\, e^2}{\text{ſ}e^2}$ inter s et φ haec prodit aequatio: $\text{ſi}\, s^2 = \frac{\text{ſ}e^2\, \text{ſ}f^2}{\text{ſ}e^2 + (\text{ſ}f^2 - \text{ſ}e^2)\, \text{coſ}\, \varphi^2} = \frac{\text{ſ}e^2\, \text{ſ}f^2}{\text{ſ}e^2\, \text{ſi}\, \varphi^2 + \text{ſi}\, f^2\, \text{coſ}\, \varphi^2}$, qua natura lineae $e'\,s'\,d$ exprimitur, eſtque $\frac{\text{ſi}\, e}{\text{ſi}\, f} = \text{ſi}\ CE$.

COROLL. 1.

459. Per totum ergo circulum maximum ex B per E ductum ut ſit $\text{ſi}\ AE = \sqrt{\frac{aa-bb}{aa-cc}}$, momentum inertiae eſt $= Mbb$. Et quia arcus AE tam negative quam poſitive accipi poteſt, duo in ſphaera dantur circuli maximi eadem proprietate gaudentes.

COROLL. 2.

460. Simili modo tam circa polum A, quam ipſi oppoſitum, erunt in ſuperficie ſphaerae orbes elliptici, quorum ſemiaxis major eſt arcus Af et ſemiaxis minor arcus Ae, in quibus ubique idem regnabit, momentum inertiae majus quam Mbb. In figura linea $f\,s\,e$ refert quadrantem horum orbium ellipticorum.

COROLL. 3.

461. Lineae autem, in quibus momentum inertiae minus eſt quam Mbb, erunt bini orbes elliptici, quorum centra ſunt in polo C eique oppoſito, et ſemiaxis major arcus Cd, minor vero arcus Ce'. In figura linea $d\,s'\,e'$ refert quadrantem horum orbium ellipticorum.

SCHOLION. 1.

462. Et ſi hae lineae $f\,s\,e$, et $d\,s'\,e'$ in ſuperficie ſphaerae ductae, non ſunt in eodem plano, tamen eas orbium ellipticorum nomine inſignire

signire lubet, quoniam earum projectiones in plana sphaeram in punctis A et C tangentia per rectas eo normales factae sunt ellipses, quarum centra sunt in punctis A et C. In projectione enim lineae fse in planum ad A tangens facta si ponatur $\mathit{fi}\ Af = m$, $\mathit{fi}\ Ae = n$, ut sit $\frac{mm}{nn} = \frac{aa - cc}{aa - bb}$, et pro puncti s projectione abscissa in m sumta $= x = \mathit{fi}\ s \sin \varphi$, et applicata eo normalis $= y = \mathit{fi}\ s \cos \varphi$, habebitur inter x et y haec aequatio $nnxx + mmyy = mmnn$, quae est pro ellipsi centrum in A habente, cujus semiaxes sunt m et n. Parique modo projectio lineae $ds'e'$ in planum ad C tangens facta reperietur esse ellipsis. Si fuerit $Mbb = Mcc$, quo casu punctum E in C cadit, fitque $Ae = Af$ et $m = n$, ellipsis illa abit in circulum, eritque linea fse circulus minor circa polum A descriptus.

SCHOLION. 2.

463. Investigationem ergo momenti inertiae eo reduximus, ut pro quolibet corpore proposito sufficiat terna momenta inertiae definivisse, quae scilicet sumta sint respectu ternorum ejus axium principalium. His enim cognitis facile momentum inertiae ejusdem corporis respectu aliuscujuscunque axis per ejus centrum inertiae transeuntis, atque hinc porro respectu aliorum omnium illi parallelorum assignari potest. Hocque modo inventio momentorum inertiae, quae initio pro quovis corpore quasi infinita videbatur, mirifice in compendium est redacta. Praeterea vero notari meretur, in hoc negotio aliud insigne subsidium, cujus ope momentum inertiae alicujus corporis facile colligi potest ex momentis ejus partium, id quod sequente problemate explicemus.

PROBLEMA 31.

464. Datis momentis inertiae duarum partium respectu axium inter se parallelorum, et per cujusque centrum inertiae transeuntium, invenire momentum inertiae totius corporis respectu axis illis paralleli et per hujus centrum inertiae transeuntis.

SOLUTIO.

Sit ergo corpus compositum ex duabus partibus, quarum alterius massa sit $= M$ habens suum centrum inertiae in M; alterius vero massa sit $= N$ ejusque centrum inertiae in N, ponaturque intervallum $MN = c$. Data jam sint momenta inertiae prioris partis M respectu axis mm, quod sit $= Mmm$, et posterioris partis N respectu axis nn, quod sit $= Nnn$; sintque hi axes mm et nn, qui per utriusque partis centrum inertiae trans- Fig. 50.

 eant,

tionem: $\sin s^2 = \frac{\sin e^2 \sin f^2}{\sin e^2 + (\ldots - \sin e^2)}$

qua aequatione natura lineae

Si denique quo si AE > √

quadrante BC punctum d,

$= \frac{(aa-cc)\sin C d^2}{bb-cc}$, p

$= \varphi$; ob $\frac{aa-cc}{bb-cc} =$

aequatio: $\sin$

qua nat

mentum inertiae respectu

I transeuntis determinari

.N, ejusque centrum in-

$M = \frac{Nc}{M+N}$ et IN:

sint siti, ponatur

que distantia a

tiae respectu

iam axi

ctu

$$\ldots + \frac{\ldots cc \sin\delta^2}{M+N}.$$

COROLL. 1.

465. Momentum ergo totius corporis majus est quam momenta partium simul sumta, respectu axium inter se parallelorum et per cujusque centrum inertiae traductorum: atque excessus $\frac{MNcc\sin\delta^2}{M+N}$ proportionalis est quadrato distantiae axium.

COROLL. 2.

466. Si massa totius corporis ponatur $= I = M + N$, ejusque momentum inertiae respectu axis $ii = Iii$ erit

$$Iii = Mmm + Nnn + \frac{MNcc\sin\delta^2}{I}.$$

Tum vero positis distantiis $IM = a$, et $IN = b$, erit $a = \frac{Nc}{I}$ et $b = \frac{Mc}{I}$: unde fit $Iii = Mmm + Nnn + I\,ab \sin\delta^2$.

CO-

467. Hinc dato [illegible] rius partis Mmm, facile $= Iii - Mmm - I\,ab$ [illegible] usque centrum inert[illegible]

[illegible]8. Si corpus [illegible]rtiae respec[illegible] [illegible]e transeu[illegible] inertiae [illegible] [illegible]ae trar[illegible]

[illegible]perioribus evidens est, si binorum reliquo- [illegible]ano AIS capiatur: tum enim axis Ss ad [illegible], alterum vero angulo recto.

[illegible]M A. 33.

[illegible]imum in peripheriam circuli [illegible]ales eorumque respectu mo- Fig. 52.

[illegible]etri ad peripheriam [illegible]ssam refert, quae [illegible]primo recta ad [illegible]ujus respectu [illegible]li sunt siti, [illegible]ere licet [illegible]$-xx$), [illegible]

seu

[illegible]mm, Nnn, Ppq,

[illegible]e parallelorum et per cujusque [illegible] toto autem corpore concipiatur axis illis parallel[illegible] [illegible]ertiae transiens, a quo axes partium M, N, P, Q dist[illegible] a, b, c, d: quibus cognitis erit momentum inertiae totius corp[illegible] $= M\,(mm + aa) + N\,(nn + bb) + P\,(pp + cc) + Q\,(qq + dd)$. Hoc igitur modo saepe corporum admodum irregularium momenta inertiae facile colligi poterunt, dummodo ex ejusmodi partibus fuerint composita, quarum momenta inertiae assignare liceat, que pacto calculus momentorum inertiae non mediocriter adjuvatur.

SCHOLION. 2.

470. Verum non sufficit methodum tradidisse omnium corporum momenta inertiae inveniendi; necesse est etiam ea pro praecipuis corporum generibus evolvere, ut quoties usus postulat, inde desumi queant. Ne autem opus sit infinitum, hanc investigationem ad corpora homogenea, quae per totam extensionem similari constent materia, restringamus, ita ut calculus quasi ad corpora geometrica tantum sit accommodandus, ubi quidem figuras solum principales sum consideraturus. Ac primo, quoniam fila tenuissima et laminas tenuissimas tanquam lineas et superficies considerare licet, ab iis initium ducamus, inde ad varias

varias ſpecies ſolidorum, cujusmodi prae ceteris occurrere ſolent, progreſſuri. In ſingulis autem his corporibus ternos axes principales eorumque reſpectu momenta inertiae definiamus, quandoquidem ex his momenta reſpectu omnium axium facili negotio colligi poſſunt. Hinc etiam ſimul patebit, quomodo calculum ad omnia alia corporum genera quam commodiſſime accommodari conveniat.

CAPUT VI.

INVESTIGATIO MOMENTI INERTIAE IN CORPORIBUS HOMOGENEIS.

PROBLEMA 32.

Fig. 51. 471. Si corpus fuerit filum tenuiſſimum rectum AIB, invenire ejus axes principales, eorumque reſpectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit tota fili longitudo AB $= 2a$, in cujus medio puncto I erit ejus centrum inertiae, ut ſit IA $=$ IB $= a$: maſſa autem fili, quae geometrice per $2a$ exprimitur ſit $=$ M. Iam unus axium principalium certo eſt ipſa linea AB, cujus reſpectu momentum inertiae eſt nullum, ideoque minimum; bini reliqui ſunt ad AB in I normales, eorumque reſpectu momenta inertiae aequalia, ita ut eorum ſitus non determinetur. Ad momentum ergo inertiae reſpectu talis axis ad AB in I normalis inveniendum, ſumto IP $=$ IQ $= x$, elementorum $Pp = Qq = dx$ momenta ſunt $xxdx$, ſicque amborum conjunctim $= 2xxdx$, cujus integrale $\frac{2}{3}x^3$ poſito $x = a$, dat momentum inertiae fili reſpectu axium ad filum in I normalium $= \frac{2}{3}a^3$ $= \frac{1}{3}Maa$ ob M $= 2a$.

COROLL. 1.

472. Bini ergo reliqui axes principales praeter AIB non determinantur, perindeque eſt, quaenam duae rectae tam inter ſe quam ad filum in I normales pro iis accipiantur. Eorumque reſpectu momentum inertiae $\frac{1}{3}$ Maa eſt maximum, ita ut medium cum maximo congruat.

COROLL. 2.

473. Cum momentum inertia reſpectu axis AB ſit nihilo aequale, reſpectu alius cujuscunque axis S I s ad AB angulo AIS $= \vartheta$ inclinato erit

erit $= \frac{1}{2} Maa \sin\vartheta^2$, quod ex superioribus evidens est, si binorum reliquorum axium principalium alter in plano AIS capiatur: tum enim axis Ss ad eum inclinatur angulo $90° - \vartheta$, ad alterum vero angulo recto.

PROBLEMA. 33.

474. Si corpus fuerit filum tenuissimum in peripheriam circuli AEBF incurvatum, invenire ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 52.

SOLUTIO.

Sit radius circuli IA $= a$, et posita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit longitudo fili $= 2\pi a$, quae simul ejus massam refert, quae sit $=$ M. Cum centrum inertiae sit in circuli centro I, primo recta ad planum circuli in I perpendicularis erit unus axis principalis, cujus respectu erit momentum inertiae $= Maa$, duo reliqui axes in plano circuli sunt siti, pro quibus binos diametros quoscunque inter se normales assumere licet AB et EF. Sumta jam abscissa IP $= x$, et applicata PM $= y = \sqrt{(aa - xx)}$, ob elementum fili $Mm = \frac{adx}{y}$, erit ejus momentum respectu axis AB $= aydx$, ideoque momentum totum $= a\int ydx = a \times$ Aream circuli $= \pi a^3$, quod ob $M = 2\pi a$ erit $= \frac{1}{2} Maa$. Quare momentum respectu diametri cujusvis est $= \frac{1}{2} Maa$.

COROLL. 1.

475. Momentum ergo inertiae respectu axis principalis ad planum circuli normalis, Maa est maximum, et momentum medium cum minimo congruit, estque utrumque semissis maximi.

COROLL. 2.

476. Si alius axis quicunque concipiatur ad planum circuli in I inclinatus angulo $= \eta$, quia is ad axem primum inclinatur angulo $90° - \eta$, ad reliquorum alterum angulo η et ad tertium angulo recto, erit ejus respectu momentum inertiae $= Maa \sin\eta^2 + \frac{1}{2} Maa \cos\eta^2 = \frac{1}{2} Maa (1 + \sin\eta^2)$.

PROBLEMA. 34.

477. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana triangularis ABD, invenire ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 53.

SOLUTIO.

Ut centrum inertiae I obtineatur, ex angulo A ducatur recta AC latus oppositum BD bisecans, sumtaque CI parte tertia totius AC erit cen-

 trum

trum inertiae in I. Ponamus CI $= a$, CB $=$ CD $= c$, et angulum ACB $= \zeta$, ut sit AI $= 2a$, AC $= 3a$ et BD $= 2c$. Iam perspicuum est, unum axem principalem fore ad planum trianguli normalem in I, quoniam si in hac recta coordinatam x sumeremus, foret $\int xyd\mathrm{M} = 0$ et $\int xzd\mathrm{M} = 0$, ob $x = 0$. Quare secundum probl. 28. praeter istum axem sumantur in plano trianguli binae reliquae directrices, quarum altera sit IA: et sumto elemento quocumque $d\mathrm{M}$ in Z, indeque ad IA demisso perpendiculo ZY, sit IY $= y$ et YZ $= z$, vocenturque integralia $\int xxd\mathrm{M} = \mathrm{A} = 0$; $\int yyd\mathrm{M} = \mathrm{B}$, $\int zzd\mathrm{M} = \mathrm{C}$; tum $\int yzd\mathrm{M} = \mathrm{F}$: unde si IF et IG sint bini reliqui axes principales, ponaturque angulus AIF $= \vartheta$, demonstravimus fore $tang\, 2\vartheta = \frac{2\mathrm{E}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}$, et respectu axis IF momentum inertiae $= \mathrm{A} + \mathrm{B} f\vartheta^2 + \mathrm{C} \, cof\vartheta^2 - 2\mathrm{F} f\vartheta \, cof\vartheta$, ubi ϑ denotat tam angulum AIF quam AIG. Tum vero respectu primi axis ad planum trianguli normalis est momentum inertiae $= \mathrm{B} + \mathrm{C}$. Ad hos valores inveniendos per Z ducatur lateri BD parallela MN, positisque AP $= t$ et PZ $= u$, erit PM $=$ PN $= \frac{ct}{3a}$, YZ $= u \, f\zeta$ et PY $= u \, cof\zeta$, atque elementum in Z $= dt\, du\, f\zeta = d\mathrm{M}$. Hinc igitur erit $y = 2a - t + u\, cof\zeta$ et $z = u f\zeta$; concipiatur aliud aequale elementum $dt\, du\, f\zeta$ ad alteram partem pro quo sit u negativum, hisque junctim consideratis fiet

$$\mathrm{B} = 2\int dt\, f\zeta \int du\, ((2a-t)^2 + uu\, cof\zeta^2);\ \mathrm{C} = 2\int dt\, f\zeta \int uudu\, f\zeta^2$$

$$\text{et } \mathrm{F} = \int dt\, f\zeta \int (udu\, f\zeta\, (2a - t + u\, cof\zeta) - udu\, f\zeta\, (2a - t - u\, cof\zeta))$$

$$\text{seu } \mathrm{F} = 2\int dt\, f\zeta \,.\, \int uudu\, f\zeta\, cof\zeta.$$

Prima integratione peracta poni debet $u = \frac{ct}{3a}$, unde fit

$$\mathrm{B} = 2f\zeta\int dt\left(\frac{ct}{3a}(2a-t)^2 + \frac{c^3t^3}{81a^3}cof\zeta^2\right);\ \mathrm{C} = 2f\zeta\int dt \,.\, \frac{c^3t^3f\zeta^2}{81a^3}$$

et $\mathrm{F} = 2f\zeta^2\, cof\zeta \int dt \,.\, \frac{c^3 t^3}{81a^3}$, ideoque

$$\mathrm{B} = 2f\zeta\left(\frac{2actt}{3} - \frac{4ct^3}{9} + \frac{ct^4}{12a} + \frac{c^3t^4}{324a^3}cof\zeta^2\right)$$

$$\mathrm{C} = 2f\zeta \,.\, \frac{c^3 t^4 f\zeta^2}{324a^3} \text{ et } \mathrm{F} = \frac{c^3 t^4 f\zeta^2\, cof\zeta}{162a^3}$$

quibus valoribus per totum triangulum, ponendo $t = 3a$, extensis habebimus:

B $=$

$B = \frac{1}{2} ac\, \sin\zeta\, (3aa + cc\, \cos\zeta^2)$; $C = \frac{1}{2} ac^3 \sin\zeta^3$; $F = \frac{1}{2} ac^3 \sin\zeta^2 \cos\zeta$
Ex his pro situ axium IF et IG fiet

$$tang\, 2\vartheta = \frac{2ac^3 \sin\zeta^2 \cos\zeta}{ac\sin\zeta(3aa + cc\cos 2\zeta)} = \frac{cc\sin 2\zeta}{3aa + cc\cos 2\zeta},$$

hinc enim duo valores pro ϑ eliciuntur. Denique momentum inertiae respectu axis principalis ad planum trianguli normalis est $= \frac{1}{2} ac\, \sin\zeta\, (3aa + cc) = \frac{1}{6} M (3aa + cc)$ ob $M = 3ac \sin\zeta$; et respectu axis IF vel IG, prout ϑ angulum AIF vel AIG denotat, est momentum inertiae

$$\frac{1}{6} M (3aa + cc\cos\zeta^2) \sin\vartheta^2 + \frac{1}{6} Mcc \sin\zeta^2 \cos\vartheta^2 - \frac{1}{3} Mcc \sin\zeta\cos\zeta\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$= \frac{1}{2} Maa \sin\vartheta^2 + \frac{1}{6} Mcc (\cos\zeta\sin\vartheta - \sin\zeta\cos\vartheta)^2 = \frac{1}{2} Maa \sin\vartheta^2 + \frac{1}{6} Mcc \sin(\zeta - \vartheta)^2.$$

COROLL. 1.

478. Cum sit $AB^2 + AD^2 = 18aa + 2cc$, erit $3aa = \frac{AB^2 + AD^2 - 2cc}{6}$ hincque momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli in I normalis fiet $= \frac{1}{36} M(AB^2 + AD^2 + BD^2)$, ita ut sit pars tricesima sexta massae per summam quadratorum laterum multiplicatae.

COROLL. 2.

479. Pro binis reliquis axibus principalibus in plano trianguli sitis IF et IG, notetur ζ esse angulum recto non maiorem, unde $\sin 2\zeta$ erit positivus. Posito ergo angulo AIF $= \vartheta$ erit $tang\,\vartheta =$

$$\frac{-3aa - cc\cos 2\zeta + \sqrt{(9a^4 + 6aacc\cos 2\zeta + c^4)}}{cc\sin 2\zeta} = tang\, AIF;$$ at

$$tang\, AIG = \frac{-3aa - cc\cos 2\zeta - \sqrt{(9a^4 + 6aacc\cos 2\zeta + c^4)}}{cc\sin 2\zeta}$$

COROLL. 3.

480. Momentum inertiae respectu horum axium est $= \frac{1}{6} M (\frac{3}{2} aa - \frac{3}{2} aa\cos 2\vartheta + \frac{1}{2} cc - \frac{1}{2} cc\cos 2(\zeta - \vartheta))$, cum igitur sit $tang\, 2(\zeta - \vartheta)$ $= \frac{3aa\sin 2\zeta}{3aa\cos 2\zeta + cc}$, hoc utrumque momentum ita exprimetur:

$$\tfrac{1}{12}M(3aa + cc \pm \sqrt{(9a^4 + 6aacc\, cos\, 2\zeta + c^4)}) = \tfrac{1}{12}Mcc$$
$$(1 - cos\, 2\zeta - \int 2\zeta\, tang\, \vartheta) = \frac{Mcc \int\zeta \int(\zeta - \vartheta)}{6\, cos\, \vartheta}$$
prout enim pro ϑ angulus AIF vel AIG assumitur, ita ad utrumque axem referetur.

EXEMPLUM.

481. Sit triangulum ABD isosceles seu angulus ζ rectus, hincque ob $tang\, 2\vartheta = 0$, erit vel $\vartheta = 0$ vel $\vartheta = 90°$, unde alter axis in ipsam rectam AC incidit, alter vero ad eum est normalis. Respectu prioris AC momentum inertiae erit $= \frac{1}{6}Mcc$, respectu posterioris vero $= \frac{1}{2}Maa$: dum respectu primi, qui ad planum trianguli est normalis, erat $= \frac{1}{2}Maa + \frac{1}{6}Mcc$ ita, ut hoc sit aequale summae binorum reliquorum. Si praeterea triangulum sit aequilaterum, cujus singula latera $= 2c$; erit $3a = c\sqrt{3}$ seu $aa = \frac{cc}{3}$, quare omnes axes in plano trianguli per I ducti aequalia praebent momenta inertiae $= \frac{1}{6}Mcc$ et momentum respectu axis ad triangulum in I normalis erit duplo majus $= \frac{1}{3}Mcc$.

COROLL. 4.

482. Haec postrema proprietas adeo in genere valet: cum enim sit momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli normalis $= \frac{1}{6}M(3aa + cc)$, tum vero respectu axis IF $= \frac{1}{12}M(3aa + cc - \sqrt{(9a^4 + 6aacc\, cos\, 2\zeta + c^4)})$ respectu axis IG $= \frac{1}{12}M(3aa + cc + \sqrt{(9a^4 + 6aacc\, cos\, 2\zeta + c^4)})$, evidens est, horum summam priori esse aequalem.

SCHOLION.

483. Notari hic meretur, si reliqua trianguli latera ponantur $AB = 2b$, $AD = 2d$, uti est $BD = 2c$, fore $9aa = 2bb + 2dd - cc$, et $cos\, \zeta = \frac{dd - bb}{3ac}$, unde formula irrationalis $\sqrt{(9a^4 + 6aacc\, cos\, 2\zeta + c^4)}$ abit in hanc
$$\tfrac{4}{3}\sqrt{(b^4 + c^4 + d^4 - bbcc - bbdd - ccdd)}.$$
Ceterum hic in genere definire non licet, uter axium IF et IG majus praebeat momentum, cum haec ipsa formula irrationalis quandoque negativum valorem induere debeat, quemadmodum patet ex casu $\zeta = 90°$, ubi valor ejus $3aa - cc$ sit negativus, si $cc > 3aa$. In genere autem

tem haec duo momenta inter se aequalia peri nequeunt, quia formula irrationalis evanescere non potest, nisi sit $2\zeta = 180^\circ$ et $3aa = cc$. At judicium hoc quovis casu, adhibitis angulis ϑ utrique axi convenientibus, facile instituetur ex formula $\frac{1}{3} Maa \int \vartheta^2 + \frac{1}{3} Mcc \int (\zeta - \vartheta)^2$.

PROBLEMA. 35.

484. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana figuram parallelogrammi $BDbd$ habens, invenire ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 54.

SOLUTIO.

Bisectis lateribus binis oppositis BD et bd in A et C, ductaque recta AC in ejus puncto medio I erit centrum inertiae corporis, cujus massa ponatur $= M$. Ponantur latera $Bb = Dd = AC = 2a$, $BD = bd = 2b$, et angulus acutus $B = d = \zeta$, erit area $= 4ab \sin \zeta = M$. Jam unus axium principalium erit ad planum laminae in I normalis, binique reliqui IF et IG in ipso hoc plano siti: ad quos inveniendos concipiatur elementum quodcunque dM in Z, per quod punctum primo ducatur recta MN laterali BD parallela, sitque $AP = t$ et $PZ = u$; tum ex Z ad AC demisso perpendiculo ZY vocetur secundum probl. 28. $IY = y$ et $YZ = z$. Ob $APZ = \zeta$ erit $ZY = u \sin \zeta$ et $PY = u \cos \zeta$, unde $y = a - t + u \cos \zeta$ et $z = u \sin \zeta$; tum vero $dM = dt\, du \sin \zeta$: at in illo calculo fit $x = 0$, ut sit $\int xxdM = 0$, $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$. Hinc ergo habemus: $\int yydM = B = \int dt \int du \int \zeta (a - t + u \cos \zeta)^2$, $\int zzdM = C = \int dt \int uudu \sin \zeta^3$ et $\int yzdM = F = \int dt \int udu \int \zeta^2 (a - t + u \cos \zeta)$. Combinetur cum his elementum simile Z' ad alteram partem situm, pro quo est u negativum, fietque:

$$B = 2 \sin \zeta \int dt \int du ((a - t)^2 + uu \cos \zeta^2); \quad C = 2 \int \zeta^3 \int dt \int uudu$$
$$\text{et } F = 2 \int \zeta^2 \cos \zeta \int dt \int uudu.$$

Priori integratione instituta ponatur $u = b$, prodibitque

$$B = 2 \int \zeta \int dt\, (b(a - t)^2 + \tfrac{1}{3} b^3 \cos \zeta^2); \quad C = \tfrac{2}{3} b^3 \sin \zeta^3 \int dt$$

et $F = \frac{2}{3} b^3 \sin \zeta^2 \cos \zeta \int dt$. Denique posteriori integratione facta ponatur $t = 2a$, fietque $B = \frac{4}{3} ab \int \zeta (aa + bb \cos \zeta^2) = \frac{1}{3} M (aa + bb \cos \zeta^2)$; $C = \frac{4}{3} ab^3 \sin \zeta^3 = \frac{1}{3} Mbb \sin \zeta^2$ et $F = \frac{4}{3} ab^3 \sin \zeta^2 \cos \zeta = \frac{1}{3} Mbb \sin \zeta \cos \zeta$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu primi axis ad laminam in I normalis $B + C = \frac{1}{3} M (aa + bb)$: quod ergo non ab obliquitate, sed tantum a lateribus pendet. At pro reliquis axibus IF et IG posito angulo

 gulo

gulo AIF $= \vartheta$ invenimus $tang\, 2\vartheta = \frac{2F}{B - C} = \frac{2bb \sin\zeta \cos\zeta}{aa + bb \cos 2\zeta}$ seu $tang\, 2\vartheta$ $= \frac{bb \sin 2\zeta}{aa + bb \cos 2\zeta}$, cujus duplex valor ϑ praebet utrumque angulum AIF et AIG. Momentum autem inertiae respectu horum axium est $B \sin\vartheta^2 + C \cos\vartheta^2 - 2F \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{1}{3}M(aa \sin\vartheta^2 + bb \cos\zeta^2 \sin\vartheta^2 + bb \sin\zeta^2 \cos\vartheta^2 - 2bb \sin\zeta \cos\zeta \sin\vartheta \cos\vartheta) =$

$$\tfrac{1}{6}M(aa - aa \cos 2\vartheta + bb - bb \cos 2\zeta \cos 2\vartheta - bb \sin 2\zeta \sin 2\vartheta)$$

sicque hoc momentum inertiae ita exprimi poterit

$$\tfrac{1}{6}M(aa + bb - aa \cos 2\vartheta - bb \cos(2\zeta - 2\vartheta)).$$

Cum igitur sit

$$\sin 2\vartheta = \frac{bb \sin 2\zeta}{\sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)}} \text{ et } \cos 2\vartheta = \frac{aa + bb \cos 2\zeta}{\sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)}}$$

istud momentum erit:

$$\tfrac{1}{6}M(aa + bb - \sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)})$$

ubi ambiguitas signi radicalis et ambos axes IF et IG et momenta inertiae eorum respectu praebet. Patet ergo summam horum binorum aequalem esse momento primo.

COROLL. 1.

485. Si $aa + bb \cos 2\zeta$ habeat valorem positivum, sumto radicali positivo, angulus 2ϑ recto erit minor, ideoque angulus AIF semirecto minor; ac respectu axis IF momentum inertiae erit minimum $= \frac{1}{6}M(aa + bb - \sqrt{(a^4 + 2aabb \cos 2\zeta + b^4)})$; respectu axis IG vero medium.

COROLL. 2.

486. Si $aa + bb \cos 2\zeta$ habeat valorem negativum, et radicale pro axe IF capiatur positive, angulus 2ϑ erit recto major, ideoque angulus AIF semirecto major: atque axis IF respectu momentum inertiae erit minimum.

COROLL. 3.

487. Si ducatur diagonalis Bd per angulos acutos B et d, ob $tang\,.\,AIB = \frac{b \sin\zeta}{a + b \cos\zeta}$ reperitur $tang\, 2BIF =$

$$\frac{2ab \sin\zeta (aa - bb)}{a^4 + 2a^3b \cos\zeta + 2aabb \cos^2\zeta + 2ab^3 \cos\zeta + b^4}$$ unde patet, si

rhom-

rhombo ubi $a = b$, ambas diagonales fore axes principales; dum in rectangulo recta AC est axis principalis.

EXEMPLUM 1.

488. Si parallelogrammum $BbdD$ sit rectangulum, ob $\zeta = 90°$ fit $tang\, 2\vartheta = 0$, ideoque vel $\vartheta = 0$ vel $\vartheta = 90°$: unde respectu axis ad laminam in I normalis erit momentum inertiae $= \frac{1}{3}M(aa + bb)$: tum vero alter axis principalis est AC, cujus respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3}Mbb$; tertius vero axis principalis est in plano laminae ad AC normalis, cujus respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3}Maa$: existentibus lateribus $Bb = Dd = 2a$ et $BD = bd = 2b$.

EXEMPLUM 2.

489. Si parallelogrammum $BbdD$ sit rhombus, ut sit $b = a$ et singula ejus latera $= 2a$, existentibus angulis acutis $= \zeta$, fit $tang\, 2\vartheta = \frac{\sin 2\zeta}{1 + \cos 2\zeta} = tang\, \zeta$, hincque vel $\vartheta = \frac{1}{2}\zeta$ vel $\vartheta = 90° + \frac{1}{2}\zeta$. Quare respectu primi axis principalis ad planum rhombi in I normalis est momentum inertiae $= \frac{2}{3}Maa$; reliqui ambo axes sunt diagonales Bd et Db, quorum illius Bd respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3}Maa(1 - \cos\zeta) = \frac{2}{3}Maa \sin\frac{1}{2}\zeta^2$, respectu vero alterius diagonalis Db est $= \frac{1}{3}Maa(1 + \cos\zeta) = \frac{2}{3}Maa \cos\frac{1}{2}\zeta^2$.

COROLL. 4.

490. Si ergo parallelogrammum abeat in quadratum, cujus latus $= 2a$, omnes rectae in ejus plano per centrum inertiae I ductae pro axibus principalibus haberi possunt, eritque eorum respectu momentum inertiae $= \frac{1}{3}Maa$; at respectu axis ad quadratum in I normalis duplo erit majus $= \frac{2}{3}Maa$.

PROBLEMA. 36.

491. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana in figuram circuli efformata, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit radius circuli $= a$, erit area $= \pi aa$, quae massam M refert: et cum unus axium principalium ad planum circuli in centro I sit Fig. 52.
normalis

normalis, ponantur pro elemento quocunque dM in Z sito coordinatae $IP = y$, $PZ = z$, ob $dM = dydz$, erit $\int yydM = \int dy \int yydz = \int dy . yyz$ $= \int yydy \surd (aa - yy)$ posito $z = \surd (aa - yy)$. At hoc integrale reducitur ad hanc formam $\int yydM = \frac{1}{8}a^4 \int \frac{dy}{\surd (aa - yy)} - \frac{1}{8}y(aa - 2yy)$ $\surd (aa - yy)$, quod quater sumtum et posito $y = a$, dat $B = \frac{\pi}{4}a^4$ $= \frac{1}{4}Maa$. Simili modo vero fit $\int zzdM = C = \frac{1}{4}Maa$. Deinde $\int yzdM$ si ex altera diametri parte simile elementum conjungatur, ad nihilum reducitur, ita ut fit $\int yzdM = F = 0$. Hinc cum $B - C = 0$, oritur $tang 2\vartheta$ $= \frac{0}{0}$, sicque angulus ϑ est indeterminatus, ex quo cognoscimus, quod per se est clarum, omnes diametros pro axibus principalibus haberi posse, quorum respectu sit momentum inertiae $= \frac{1}{4}Maa$. At respectu primi axis ad planum circuli in centro I normalis est momentum inertiae $B + C$ $= \frac{1}{2}Maa$.

S C H O L I O N.

492. Cum hic elementum massae dM esset $= dydx$, notandum est, id semper manere positivum, etiamsi vel y vel z capiatur negative, quo casu etiam differentialia alioquin fierent negativa. In hoc ergo calculo probe cavendum est, ne cum coordinatae negative accipiuntur, elementi massae dM expressio in calculum tanquam negativa inferatur. Ex quo conveniet pro singulis regionibus, ubi coordinatae signis contrariis afficiuntur, calculum seorsim institui. Ceterum idem valor $B = \int yydM$ $= \frac{1}{4}\pi a^4$ eruitur, si ponatur $IZ = r$ et angulus $AIZ = \phi$, erit enim $dM = rdrd\phi$ et $y = r . cos\phi$, unde $yydM = r^3drd\phi\ cos\phi^2$ quae secundum variabilem r integrata posito $r = a$ dat $\frac{1}{4}a^4d\phi\ cos\phi^2$ cujus integrale ob $cos\phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos 2\phi$ praebet $\frac{1}{4}a^4 (\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}f 2\phi)$. Statuatur nunc $\phi = 2\pi$, ob $f 4\pi = 0$, prodit $\frac{1}{4}\pi a^4$ ut ante, unde patet superiorem cautelam legi continuitatis non repugnare.

P R O B L E M A. 37.

Fig. 55. 493. Si corpus sit lamina tenuissima plana figuram habens quamcunque ACBD, definire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

S O L U T I O.

Sit I figurae centrum inertiae, manifestumque est, rectam ad ejus planum in I normalem fore unum axium principalium; tum in plano ipso

ipso sumtis binis directricibus AB et CD inter se normalibus, pro elemento quovis dM in Z ponantur coordinatae $IP = y$ et $PZ = z$, erit $dM = dydz$, hincque $\int yydM = \int dy \int yydz = \int dy \,.\, yyz$. Posito ergo $z = PM$, fit $\int yydM = \int PM \,.\, yydy$, cujus valor pro singulis regionibus AIC, AID, BIC et BID erui debet, eorumque summa erit $= B$, ut sit

$$B = \int IP^2 \,.\, MN \,.\, d \,.\, IP + \int IQ^2 \,.\, \mu\nu \,.\, d \,.\, IQ.$$

Deinde est $\int zzdM = \int dy \int zzdz = \frac{1}{3}\int dy$; $z^3 = \frac{1}{3}\int PM^3 \,.\, dy$, ita ut sit

$$C = \tfrac{1}{3}\int (PM^3 + PN^3)\, d \,.\, IP + \tfrac{1}{3}\int Q(\mu^3 + Q\nu^3)\, d \,.\, IQ.$$

Porro est $\int yzdM = \int dy \int yzdz = \frac{1}{2}\int yzzdy = \frac{1}{2}\int PM^2 \,.\, ydy$, cujus valor in regionibus AID et BIC est negativus, in BID vero positivus, unde habebitur

$$F = \tfrac{1}{2}\int IP\,(PM^2 - PN^2)\, d \,.\, IP - \tfrac{1}{2}\int IQ\,(Q\mu^2 - Q\nu^2)\, d \,.\, IQ.$$

At vero tota massa M erit

$$M = \int MN \,.\, d \,.\, IP + \int \mu\nu \,.\, d \,.\, IQ.$$

His valoribus inventis erit momentum inertiae respectu axis ad planum in I normalis $= B + C$, tum sint reliqui axes principales FIf et GIg, ac posito angulo $AIF = \vartheta$ reperimus $\tang 2\vartheta = \frac{2F}{B - C}$, et momentum inertiae respectu axis $FIf = B\int\vartheta^2 + C \cos\vartheta^2 - 2F\int\vartheta \cos\vartheta =$

$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(B - C)\cos 2\vartheta - F\int 2\vartheta.$$

Verum ob $\int 2\vartheta = \frac{2F}{\sqrt{((B-C)^2+4FF)}}$ et $\cos 2\vartheta = \frac{B - C}{\sqrt{((B-C)^2+4FF)}}$ obtinebitur momentum inertiae respectu

$$\text{axis } FIf = \tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{((B - C)^2 + 4FF)} \text{ et}$$
$$\text{axis } GIg = \tfrac{1}{2}(B + C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((B - C)^2 + 4FF)}$$

COROLL. 1.

494. Momenta ergo inertiae respectu axium Ff et Gg simul sumta aequalia sunt momento inertiae respectu primi axis principalis, qui ad planum laminae in I est normalis.

COROLL. 2.

495. Si recta AB fuerit figurae diameter, ut sit $PM = PN$, valor litterae F evanescit, id quod etiam evenit si recta CD fuerit diameter, ut sumto $IQ = IP$ sit $Q\mu = PM$. At quoties sit $F = 0$, tam ob $\tang 2\vartheta = 0$, ipsae rectae AB et CD erunt axes principales.

COROLL. 3.

496. Casu hoc quo $F = 0$, et AB et CD sunt axes principales, erit momentum inertiae respectu axis $Ff = C$ et respectu axis $CD = B$, quae si

si insuper fuerint aequalia ob tang $2\vartheta = \frac{0}{0}$, omnes rectae per I ductae paria habent momenta $= B = C$.

COROLL. 4.

497. Si praeter diametrum AB reperiatur alia recta per I ducta, cujus respectu momentum inertiae illi sit aequale, tum omnes plane rectae per I ductae eadem proprietate gaudebunt, et momenta inertiae habebunt aequalia.

PROBLEMA 38.

Fig. 56. 498. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana in figuram polygoni regularis efformata, ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae difinire.

SOLUTIO.

Centrum inertiae talis polygoni regularis erit in centro circuli circumscripti I, cujus radius ponatur $IA = a$, numerusque laterum $= n$. Hinc fit angulus $AIB = \frac{2\pi}{n}$, eoque per rectam IG bisecto angulus AIG $= \frac{\pi}{n}$ atque $AB = 2a \sin \frac{\pi}{n}$ et $IG = a \cos \frac{\pi}{n}$: quare area trianguli $AIB = aa \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} aa \sin \frac{2\pi}{n}$ et area polygoni totius $= \frac{n}{2} aa \sin \frac{2\pi}{n}$ vicem massae M gerens. Iam primo observo (497) omnes rectas in plano laminae per I ductas aequalia esse habituras momenta, quorum bina simul sumta efficiant momentum respectu axis ad planum laminae in I normalis. Hoc vero momentum ex superioribus colligi potest. Consideretur enim triangulum AIB, cujus massa ponatur $= m$, et centrum inertiae in i, ut sit $Gi = \frac{1}{3} a \cos \frac{\pi}{n}$ et $Ii = \frac{2}{3} a \cos \frac{\pi}{n}$ existente $AG = a \sin \frac{\pi}{n}$. Quia igitur hoc triangulum est isosceles, per §. 481. erit ejus momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli in i normalis $= \frac{1}{2} m . Gi^2 + \frac{1}{6} m . AG^2 = m \left(\frac{1}{18} aa \cos \frac{\pi}{n}^2 + \frac{1}{6} aa \sin \frac{\pi}{n}^2 \right)$; hincque respectu axis ad idem planum in I normalis $= m \left(\frac{1}{18} aa \right.$
cos

$\cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{4} aa \sin\frac{\pi^2}{n} + \frac{3}{4} aa \cos\frac{\pi^2}{n} = maa\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}\sin\frac{\pi^2}{n}\right)$ quod per n multiplicatum ob $mn = M$ dabit momentum totius polygoni respectu axis ad id in I normalis $= Maa\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}\sin\frac{\pi^2}{n}\right)$ $= \frac{1}{3} Maa\left(1 + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right)$. Respectu vero cujusque axis in plano laminae per punctum I ducti erit momentum inertiae $= \frac{1}{6} Maa\left(1 + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right)$ illo scilicet duplo minus.

COROLL. 1.

499. Si praeterea latus polygoni ponatur $AB = c$, ut sit $c = 2a\sin\frac{\pi}{n}$, ob $a = \frac{c}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ erit momentum inertiae respectu axis principalis ad planum in I normalis $= \frac{Mcc}{12\sin\frac{\pi^2}{n}}\left(1 + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{12} Mcc, \frac{2 + \cos\frac{2\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}$ respectu reliquorum vero axium principalium est duplo minus.

COROLL. 2.

500. Si praeter radium circuli circumscripti $IA = a$, latus polygoni $AB = c$ introducatur, ob $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{c}{2a}$ et $\cos\frac{2\pi}{n} = 1 - \frac{cc}{2aa}$ erit momentum respectu axis in I normalis $= \frac{1}{3} Maa\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{cc}{4aa}\right) = \frac{1}{12} M(6aa - cc)$, respectu axium vero in ipso plano polygoni per I ductorum est duplo minus.

PROBLEMA 39.

501. Si corpus fuerit cylindrus rectus, cujus axis $Aa = 2a$ et radius basis $AB = AD = c$, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 57.

SOLUTIO.

Cum area basis sit $= \pi cc$, erit cylindri soliditas seu massa $= 2\pi acc = M$. In axis autem puncto medio I erit ejus centrum inertiae, ut sit

$AI = Ia = a$: at ipſe hic axis Aa unus manifeſto eſt axium principalium, per quem ſumto plano quocunque $BDbd$ pro elemento quovis dM in Z ſito habebuntur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ ut ſit $dM = dxdydz$. Hinc colligantur valores ſequentes:

1°. $\int xxdM = \int xxdxdydz$: ubi ſumtis primo x et y conſtantibus et poſito poſt integrationem $z = \sqrt{(cc - yy)}$, habetur $\int xxdx\int dy\sqrt{(cc - yy)}$, at $\int dy\sqrt{(cc - yy)}$ dat aream ſectionis per X factae $= \pi cc$, ut habeatur $\pi cc\int xxdx$, cujus integrale tam ad A quam a extenſum praebet $\frac{2}{3}\pi cca^3$, ut ſit $\int xxdM = A = \frac{1}{3}Maa$.

2°. $\int yydM = \int yydxdydz = \int dx\int yydy\sqrt{(cc - yy)}$, at poſito $y = c$ eſt $\int yydy\sqrt{(cc - yy)} = \frac{1}{16}\pi c^4$, quod quater ſumi debet, ut ſit $\int yydM = \frac{1}{4}\pi c^4\int dx$, hincque habebitur per totum cylindrum $\int yydM = \frac{2}{4}\pi c^4 a = \frac{1}{4}Mcc = B$.

3°. $\int zzdM = \int zzdxdydz$, ubi ſi primo x et z pro conſtantibus ſumantur, poſito $y = \sqrt{(cc - zz)}$ habetur $\int dx\int zzdz\sqrt{(cc - zz)}$, cujus valor ut ante colligitur $\int zzdM = \frac{1}{4}Mcc = C = B$.

4°. $\int yzdH$ ſi ſimile elementum dM infra planum $BDbd$ cum eo conjungatur, in nihilum abit, ita ut prodeat $\int yzdM = F = 0$.

His poſitis reſpectu axis Aa erit momentum inertiae $= B + C = \frac{1}{2}Mcc$: pro reliquis vero binis axibus ad illum normalibus fit $\tang 2\vartheta = \frac{2F}{B - C} = \frac{0}{0}$; ita ut omnes diametri ſectionis in I ad Aa normalis tanquam axes principales ſpectari poſſunt, quorum omnium reſpectu erit momentum inertiae $= A + B = M(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc)$.

COROLL. 1.

502. Si alius axis quicunque per I tranſiens accipiatur, qui faciat cum axe Aa angulum $= \zeta$, ejus reſpectu momentum inertiae erit $= (B + C)\cos\zeta^2 + (A + B)\sin\zeta^2 = M(\frac{1}{2}cc\cos\zeta^2 + \frac{1}{3}aa\int\zeta^2 + \frac{1}{4}cc.\int\zeta^2) = M(\frac{1}{3}aa\int\zeta^2 + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{4}cc\int\zeta^2)$.

COROLL. 2.

503. Fieri poteſt, ut omnia momenta reſpectu rectarum per I ductarum fiant inter ſe aequalia, quod evenit ſi fuerit $\frac{1}{3}aa = \frac{1}{4}cc$ ſeu $a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, ideoque $\frac{c}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et angulus $AaB = 30°$, ſive triangulum BaD aequilaterum, quo caſu ſingula momenta ſunt $= \frac{1}{2}Mcc = \frac{1}{8}M.BD^2$.

PRO-

PROBLEMA. 40.

504. Si corpus fuerit conus rectus, cujus vertex A, altitudo AC $= a$, et radius basis CB = CD $= c$; invenire ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 58.

SOLUTIO.

Cum area basis sit $= \pi cc$ erit soliditas eademque massa $M = \frac{1}{3}\pi acc$: tum vero centrum inertiae I ita in axe est situm, ut sit $CI = \frac{1}{4}a$ et $AI = \frac{3}{4}a$. Sumatur jam elementum quodcunque dM in Z, pro quo sint coordinatae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $dM = dxdydz$. Ponatur autem $AX = t$, erit $XM = \frac{ct}{c}$, et $x = \frac{3}{4}a - t$, nihilo vero minus capi debet $dM = dtdydz$. Evolvantur ergo sequentes formulae:

1°. $\int xxdM = A = \int(\frac{3}{4}a - t)^2\, dtdydz$, ubi sumtis primo t et y constantibus positoque $z = \surd\left(\frac{cctt}{aa} - yy\right)$ habebitur: $\int(\frac{3}{4}a - t)^2\, dt\int dy\surd\left(\frac{cctt}{aa} - yy\right)$; ubi pro tota sectione in X est $\int dy\surd\left(\frac{cctt}{aa} - yy\right) = \frac{\pi cctt}{aa}$, ita ut integrandum supersit $\frac{\pi cc}{aa}\int ttdt\,(\frac{3}{4}a - t)^2 = \frac{\pi cc}{aa}\left(\frac{3}{16}aat^3 - \frac{3}{8}at^4 + \frac{1}{5}t^5\right)$. Ponatur $t = a$ fietque $A = \frac{1}{80}\pi cca^3 = \frac{3}{80}Maa$.

2°. $\int yydM = B = \int yydtdydz = \int dt\int yydy\surd\left(\frac{cctt}{aa} - yy\right)$ per primam integrationem. At manente adhuc t constante est $\int yydy \surd\left(\frac{cctt}{aa} - yy\right)$, posito $y = \frac{ct}{a}$ et quater sumtum $= \frac{1}{4}\pi\frac{c^4t^4}{a^4}$, ut etiamnum integrari debeat $\int\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{c^4t^4}{a^4}dt$, unde posito pro toto cono $t = a$, fit $B = \frac{1}{20}\pi ac^4 = \frac{3}{20}Mcc$.

3°. $\int zzdM = C$ pari modo dat $C = \frac{3}{20}Mcc = B$, at $\int yzdM = F$ manifesto evanescit ut ante.

Cum ergo AC sit unus axium principalium, ejus respectu momentum inertiae est $= B + C = \frac{3}{10}Mcc$. Reliqui axes principales sunt diametri omnes sectionis in I ad axem normalis, quorum respectu momentum inertiae est $A + B = \frac{3}{80}M(aa + 4cc)$.

COROLL.

505. Casu quo $aa + 4cc = 8cc$, seu $a = 2c$, hoc est AC = BD, omnes rectae per I ductae axium principalium proprietate gaudent, eorumque respectu erit momentum inertiae $= \frac{3}{10} Mcc$.

PROBLEMA. 41.

Fig. 59. 506. Si corpus fuerit globus ex materia homogenea confectus, cujus centrum I et radius IA $= a$, definire ejus momentum inertiae respectu axis cujusvis per ejus centrum transeuntis.

SOLUTIO.

Ob radium IA $= a$, erit area circuli maximi $= \pi aa$, et superficies globi $= 4\pi aa$, hinc ejus soliditas seu massa M $= \frac{4}{3}\pi a^3$. Iam positis pro elemento quocunque dM in Z posito coordinatis IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$, erit respectu axis AC momentum inertiae $= \int dM(yy + zz)$. Ponatur XZ $= r$, et angulus YXZ $= \phi$, erit $y = r \cos\phi$, $z = r \sin\phi$, et $dM = rdrd\phi dx$, unde $\int rrdM = \int r^3 drd\phi dx = 2\pi \int r^3 drdx$ ob $\int d\phi = 2\pi$: nunc sumto r variabili, positoque $r =$ XM $= \sqrt{(aa - xx)}$, habebimus $\frac{1}{2}\pi \int dx(aa - xx)^2 = \frac{1}{2}\pi(a^4 x - \frac{2}{3}aax^3 + \frac{1}{5}x^5)$. Statuatur $x = a$ pro altero hemisphaerio, et duplum hujus expressionis dabit momentum inertiae quaesitum $= \pi \cdot \frac{8}{15} a^5 = \frac{2}{5} Maa$.

PROBLEMA. 42.

Fig. 60. 507. Si corpus fuerit conoides quodcunque revolutione lineae AMB circa axem AC genitum, ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae invenire.

SOLUTIO.

Sit AC $= a$, et pro curva AX $= t$, et XM $= u$, ita ut detur aequatio inter t et u: erit soliditas seu massa M $= \pi \int uudt$ posito post integrationem $t = a$. Tum vero centrum inertiae erit in I, ut sit AI $= \frac{\int tuudt}{\int uudt}$. Ponatur brevitatis ergo AI $= f$ ut sit $\int tuudt = f \int uudt$: est vero AC unus axium principalium. Iam pro elemento dM in Z posito sint coordinatae IX $= x = f - t$; XY $= v$, et YZ $= z$, ac ponatur XZ $= r$, angulus YXZ $= \phi$, erit $dM = rdrdtd\phi$, $y = r\cos\phi$ et $z = r \sin\phi$. Nunc considerentur formulae sequentes.

1°. $\int xxdM = \int (f-t)^2 rdrdtd\phi = 2\pi \int (f-t)^2 rdrdt$ ob $\int d\phi = 2\pi$. Sit adhuc t constans, et posito $r =$ XM $= u$, fiet $\int xxdM = \pi \int (f-t)^2$

$uudt = A$, ideoque $A = \pi ff\int uudt - 2\pi f\int tuudt + \pi\int ttuudt = -\pi ff\int uudt + \pi\int ttuudt = M\left(-ff + \frac{\int ttuudt}{\int uudt}\right)$.

2°. $\int yydM = \int r^3\, drdtd\phi \cos\phi^2 = \pi\int r^3\, drdt$ ob $\int d\phi \cos\phi^2 = \int d\phi\, (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi) = \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}\int 2\phi$, quae posito $\phi = 2\pi$ abit in π. Porro prodit $\frac{\pi}{4}\int u^4 dt$ posito $r = u$, ita ut sit $\int yydM = B = \frac{\pi}{4}\int u^4 dt = \frac{M\int u^4 dt}{4\int uudt}$, cui etiam aequale sit $\int zzdM = C$. At $\int yzdM = F$ evanescit.

His evolutis prodit momentum inertiae respectu axis $AC = B + C = \frac{M\int u^4 dt}{2\int uudt}$, posito post integrationem $t = a$, tum vero in sectione ad AC in I normali omnes diametri locum axium principalium sustinent, eorumque respectu reperitur momentum inertiae $= A + B = M\left(-ff + \frac{4\int ttuudt + \int u^4 dt}{4\int uudt}\right) = M\left(\frac{\int uudt(4tt + uu)}{4\int uudt} - ff\right)$.

EXEMPLUM. 1.

508. Sit corpus hemisphaerium seu AMB quadrans circuli radii $CA = CB = a$: erit $uu = 2at - tt$, hine $\int uudt = att - \frac{1}{3}t^3 = \frac{2}{3}a^3$, posito $t = a$; porro $\int tuudt = \frac{2}{3}at^3 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{5}{12}a^4$, ergo $f = AI = \frac{5}{8}a$ et $CI = \frac{3}{8}a$. Deinde $\int u^4 dt = \int dt\,(4aatt - 4at^3 + t^4) = \frac{4}{3}aat^3 - at^4 + \frac{1}{5}t^5 = \frac{8}{15}a^5$, et $\int ttuudt = \int ttdt\,(2at - tt) = \frac{1}{2}at^4 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{3}{10}a^5$. Qurre respectu axis AG est momentum inertiae $= \frac{M.8a^5.3}{15.4a^3} = \frac{2}{5}Maa$, et respectu axis cujusvis alius ad istum in I normalis $= M\,(-\frac{25}{64}aa + \frac{13}{20}aa) = \frac{83}{320}Maa$: ita ut illud momentum sit ad hoc ut 128 ad 83.

EXEMPLUM 2.

509. Sit corpus conus truncatus cujus axis $AC = a$, radius alterius basis $BC = c$, alterius $AD = b$, eritque $u = b + \frac{(c-b)t}{a}$ et $uu = bb + \frac{2b(c-b)t}{a} + \frac{(c-b)^2 tt}{aa}$, unde pro centro inertiae I inveniendo, erit $\int uudt = bbt = \frac{b(c-b)tt}{a} + \frac{(c-b)^2 t^3}{3aa} = \frac{1}{3}a\,(bb + bc + cc)$ ideoque soliditas seu massa $M = \frac{1}{3}\pi a\,(bb + bc + cc)$, deinde $\int tuudt = \frac{1}{2}bb$ Fig. 61.

$\frac{1}{2}bbtt + \frac{2b(c-b)t^3}{3a} + \frac{(c-b)^2t^4}{4aa} = \frac{1}{12}aa(bb+2bc+3cc)$ unde oritur intervallum $AI = f = \frac{a(bb+2bc+3cc)}{4(bb+bc+cc)}$ et $CI = \frac{a(cc+2bc+3bb)}{4(bb+bc+cc)}$.
Porro ob $u^4 = b^4 + \frac{4b^3(c-b)t}{a} + \frac{6bb(c-b)^2tt}{aa} + \frac{4b(c-b)^3t^3}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^4}{a^4}$ erit $\int u^4dt = b^4t + \frac{2b^3(c-b)tt}{a} + \frac{2bb(c-b)^2t^3}{aa} + \frac{b(c-b)^3t^4}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^5}{5a^4}$ et facto $t = a$, $\int u^4dt = \frac{1}{5}a(b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4)$, denique $\int ttuudt = \frac{1}{3}bbt^3 + \frac{b(c-b)t^4}{2a} + \frac{(c-b)^2t^5}{5aa} = \frac{1}{30}a^3(bb+3bc+6cc)$.

Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis $AC = \frac{3}{10}M \frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} = \frac{3}{10}M \cdot \frac{b^5-c^5}{b^3-c^3}$.
at respectu axium ad AC in I normalium fit momentum $= \frac{3}{20}M. \frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} + \frac{1}{80}Maa\left(\frac{8(bb+3bc+bcc)}{bb+bc+cc} - \frac{5(bb+2bc+3cc)^2}{(bb+bc+cc)^2}\right)$.
quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{3}{20}M \cdot \frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} + \frac{3}{80}Maa\frac{(b+c)^4+4bbcc}{(bb+bc+cc)^2}.$$

COROLL. 1.

510. Si $b = c$ prodit casus cylindri, quo fit $AI = f = \frac{1}{2}a$, mom. inertiae respectu $AC = \frac{1}{2}Mcc$, et mom. inertiae respectu axium ad illum in I normalium $= \frac{1}{4}Mcc + \frac{1}{12}Maa$.

COROLL. 2.

511. Si $b = 0$, prodit casus coni recti, quo fit $AI = f = \frac{3}{4}a$; momentum inertiae respectu $AC = \frac{3}{10}Mcc$ et mom. inert. respectu axium ad illum in I normalium $= \frac{3}{20}Mcc + \frac{3}{80}Maa$, ut supra.

COROLL. 3.

512. Ut omnia momenta respectu axium per I ductorum fiant aequalia, debet esse $4(b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4) = aa \cdot \frac{(b+c)^4+4bbcc}{bb+bc+cc}$ ideoque datis basibus coni truncati, altitudo $AC = a$, ita debet definiri ut sit $aa = \frac{4(bb+bc+cc)(b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4)}{(b+c)^4+4bbcc}$.

EXEM-

EXEMPLUM 3.

513. Sit corpus sphaeroides ellipticum conversione semiellipsis AEB circa axem AB natum, in cujus ergo medio I est centrum inertiae. Ponatur semiaxis $AI = IB = a$, et conjungatus $IE = c$, erit $uu = \frac{cc}{aa}(2at - tt)$: et in integralibus poni oportet $t = 2a$. Hinc habebimus $\int uudt = \frac{cc}{aa}(att - \frac{1}{3}t^3)$ $= \frac{4}{3}acc$, ideoque massam $M = \frac{4}{3}\pi acc$: deinde $\int tuudt = \frac{cc}{aa}(\frac{2}{3}at^3 - \frac{1}{4}t^4)$ $= \frac{4}{3}aacc$, ergo $AI = f = a$, porro $\int ttuudt = \frac{cc}{aa}(\frac{1}{2}at^4 - \frac{1}{5}t^5) = \frac{8}{5}a^3cc$, et ob $u^4 = \frac{c^4}{a^4}(4aatt - 4at^3 + t^4)$ erit $\int u^4dt = \frac{c^4}{a^4}(\frac{4}{3}aat^3 - at^4$ $+ \frac{1}{5}t^5) = \frac{16}{15}ac^4$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis AB $= \frac{2}{5}Mcc$, at respectu axium ad AB in I normalium $= \frac{1}{5}M(aa + cc)$. Fig. 62.

EXEMPLUM 4.

514. Si corpus sit lens ex duobus segmentis sphaerae aequalibus composita, seu ortum ex conversione figurae AEB, ex duobus semisegmentis circuli aequalibus AIE et BIE formatae, circa axem AB, in cujus ergo medio I erit centrum inertiae. Ponatur semiaxis $AI = BI = a$, et $IE = IF = b$, erit diameter circuli $= \frac{aa + bb}{a}$, quem tantisper ponamus $= 2c$, ut sit $c = \frac{aa + bb}{2a}$. Quare fiet $uu = 2ct - tt$, et in integralibus superioribus poni debet $t = a$, quo facto ea debebunt duplicari: nisi quod $AI = f$ per se sit $= a$, ideoque $A = M\left(aa - \frac{2a\int tuudt + \int ttuudt}{\int uudt}\right)$. Hinc nanciscimur $\int tuudt = \frac{2}{3}a^3c - \frac{1}{4}a^4$; $\int uudt$ $= aac - \frac{1}{3}a^3$ et $M = 2\pi(aac - \frac{1}{3}a^3)$; $\int ttuudt = \frac{1}{2}a^4c - \frac{1}{5}a^5$, et $\int u^4dt$ $= \frac{4}{3}a^3cc - a^4c + \frac{1}{5}a^5$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis $AB = \frac{1}{10}M \cdot \frac{20acc - 15aac + 3a^3}{3c - a} = \frac{1}{10}M \cdot \frac{a^4 + 5aabb + 10b^4}{aa + 3bb}$ at respectu axium EF ad AB in I normalium: Fig. 63.

$$\frac{1}{10}M\left(\frac{a^3 - 5aac + 20acc}{3c - a}\right) = \frac{1}{10}M \cdot \frac{7a^4 + 15aabb + 10b^4}{aa + 3bb}.$$

PROBLEMA. 42.

515. Si corpus fuerit parallelepipedum rectangulum, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Fig. 64. Sit rectangulum BD*bd* basis parallelepipedi, cujus latera sint $Bb = 2a$, $BD = 2b$, altitudo vero $= 2c$, atque manifestum est, in puncto medio parallelepipedi fore ejus centrum inertiae, et axes principales fore tres rectas per id punctum lateribus parallelas. Quaeratur ergo momentum inertiae respectu axis altitudini paralleli, qui basi in puncto medio G perpendiculariter insistet. Consideretur hoc rectangulum BD*bd* tanquam sectio basi parallela a centro inertiae distans intervallo $= x$, ac ponatur $GY = y$, et $YZ = z$, erit $dxdydz$ elementum soliditatis seu massae dM, unde fit $M = 8abc$. Tum vero habebimus $\int xxdM = \int xxdxdydz$, et bis integrando per y et z variabiles, ponendoque $y = a$, et $z = b$, duplicentur integralia, ut per totam sectionem extendantur, erit $\int xxdM = 4ab\int xxdx = \frac{4}{3}abx^3$: jam posito $x = c$, ac duplicando, erit per totum parallelepipedum $\int xxdM = A = \frac{8}{3}abc^3 = \frac{1}{3}Mcc$, simili modo erit $\int yydM = B = \frac{1}{3}Maa$ et $\int zzdM = C = \frac{1}{3}Mbb$: atque $\int yzdM = F = 0$. Ex his concluditur momentum inertiae respectu axis principalis altitudini paralleli seu ad basin BD*bd* perpendicularis $= B + C = \frac{1}{3}M(aa + bb)$: deinde momentum inertiae respectu axis lateri B*b* paralleli $= \frac{1}{3}M(bb + cc)$, et respectu axis lateri BD paralleli $= \frac{1}{3}M(aa + cc)$.

COROLL. 1.

Fig. 65. 516. Si ergo ABCD*abcd* fuerit tale parallelepipedum rectangulum, cujus massa sit $= M$; erunt ejus axes principales lateribus AB, AC, AD paralleli per punctum medium transeuntes, eritque momentum inertiae

$$\text{respectu axis lateri} \begin{Bmatrix} AB \\ AC \\ AD \end{Bmatrix} \text{paralleli} = \begin{cases} \frac{1}{12}M(AC^2 + AD^2) \\ \frac{1}{12}M(AB^2 + AD^2) \\ \frac{1}{12}M(AB^2 + AC^2) \end{cases}$$

COROLL. 2.

517. Si corpus fuerit cubus, cujus latus $= a$, haec tria momenta fiunt inter se aequalia; ideoque momenta inertiae respectu omnium plane axium per centrum cubi ductorum erunt inter se aequalia et quidem $= \frac{1}{6}Maa$. Talis autem aequalitas in omnibus corporibus regularibus locum habere debet.

PRO

PROBLEMA. 43.

518. Si corpus fuerit globus excavatus, ut cavitas sit etiam sphaera eodem centro praedita, definire ejus momentum inertiae respectu omnium axium per ejus centrum ductorum. Fig. 66.

SOLUTIO.

Sit I centrum, et radius globi IA $= a$, cavitatis vero I$a = b$, ut crassities crustae sphaericae sit $= a - b =$ Aa, erit ergo massa hujus globi cavi $= \frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)$, quae ponatur $=$ M; omnes autem axes per centrum I ductos paria habere momenta inertiae, per se est manifestum; quaeramus ergo momentum inertiae respectu axis AB. Ac si globus esset solidus, ob ejus massam $= \frac{4}{3}\pi a^3$, foret ejus momentum inertiae $= \frac{4}{3}\pi a^3 . \frac{2}{5}aa = \frac{8}{15}\pi a^5$, globi autem e medio sublati $= \frac{8}{15}\pi b^5$, quo ob illo subtracto remanere debet momentum inertiae globi cavi, quod ergo erit $= \frac{8}{15}\pi(a^5 - b^5) = \frac{2}{5}M . \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$. Habebitur ergo momentum inertiae pro globo excavato respectu omnium axium per centrum ductorum $= \frac{2}{5}M . \frac{a^4 + a^3 b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{aa + ab + bb}$.

COROLL. 1.

519. Si $b = 0$, prodit casus globi solidi, cujus radius $= a$, pro quo momentum inertiae est ut supra $= \frac{2}{5}Maa$ respectu omnium axium per centrum ductorum.

COROLL. 2.

520. Si crusta haec sphaerica fuerit tenuissima, ut sit proxime $b = a$, erit momentum inertiae $= \frac{2}{3}Maa$, quae formula valet pro superficie sphaerica. Sin autem crassitiem Aa, quae sit $= c = a - b$, omnino negligere nolimus, erit momentum $= \frac{2}{5}M . \frac{5a^4c - 10a^3c^2}{3aac - 3acc} = \frac{2}{3}M(aa - ac)$.

SCHOLION.

521. Hi casus abunde sufficiunt, non solum ut hinc pro pluribus corporibus momenta inertiae depromere, sed etiam si alia corpora occurrant, calculum eo facilius instituere valeamus. Quamobrem progrediamur ad motus gyratorios corporum a gravitate sollicitatorum definiendos, quandoquidem hic est praecipuus casus, ad quem haec tractatio accommodari solet.

CAPUT VII.

DE MOTU OSCILLATORIO CORPORUM GRAVIUM.

PROBLEMA 44.

522. Si corpus rigidum fuerit mobile circa axem horizontalem fixum, ejusque motus a sola gravitate turbetur, determinare mutationem momentaneam in motu gyratorio productam.

SOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 67. Communem hic gravitatis hypothesin assumo, qua singula corporis elementa massis proportionaliter deorsum urgentur secundum directiones inter se parallelas. Quatenus ergo corpus est rigidum, his omnibus viribus aequivalet una vis ponderi corporis aequalis, cujus directio deorsum tendens per ejus centrum inertiae transit. Quare si corporis massa dicatur $= M$, ejusque centrum inertiae sit in I, indeque deorsum ducatur recta verticalis IG, ob gravitatem corpus sollicitabitur in directione IG a vi, quae ipsa massae M aequalis est statuenda, quandoquidem ipsam massam M per pondus hujus corporis exprimimus. Porro cum axis gyrationis sit horizontalis, ad eum normaliter constituatur planum per centrum inertiae I transiens, quod erit verticale, et ipso plano tabulae referatur: axis igitur gyrationis ad hoc planum normalis per punctum O trajectus concipiatur, unde ad I ducta recta OI exhibet distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis. His praemissis teneat nunc corpus AEBF situm in figura repraesentatum, ductaque verticali OC, ex angulo COI situs corporis innotescit. Ponatur intervallum $OI = f$, et ad tempus $= t$ angulus $COI = \varphi$, erit vis $IG = M$ momentum respectu axis gyrationis $= Mf \sin\varphi$, tendens ad angulum COI minuendum, quae in probl. 22. loco momenti Vf est substituenda. Praeterea vero necesse est nosse momentum inertiae corporis respectu axis gyrationis O, ibi per $\int rrdM$ indicatum: hunc in finem concipiatur axis per ipsum centrum inertiae I transiens axi gyrationis parallelus, cujus respectu sit momentum inertiae corporis $= Mkk$, eritque ejusdem momentum inertiae respectu axis gyrationis $O = M(ff + kk)$ ob intervallum horum axium $OI = f$. Hinc

si

si corpus ita gyretur, ut recta OI accedat ad verticalem OC, fueritque celeritas angularis $= \varepsilon$, quia ea a vi sollicitante augetur, per §. 408. erit $d\varepsilon = \frac{2g \cdot Mf \sin\phi}{M(ff+kk)} dt$ seu $d\varepsilon = \frac{2fgdt \sin\phi}{ff+kk}$; sin autem recta OI recederet a verticali OI celeritate angulari $= \varepsilon$, foret $d\varepsilon = \frac{-2fgdt \sin\phi}{ff+kk}$. Cum autem illo casu sit $\varepsilon = \frac{-d\phi}{dt}$, hoc vero $\varepsilon = \frac{d\phi}{dt}$, sumto dt constante pro utroque erit $dd\phi = \frac{-2fgdt^2 \sin\phi}{ff+kk}$, ubi signum $-$ adest, quia momentum vis sollicitantis tendit ad angulum ϕ minuendum.

COROLL. 1.

523. Si corpus in situ AEBF nullum adhuc habeat motum, a gravitate ita rectam verticalem OC versus urgebitur, ut tempusculo dt eo sit accessurum per angulum $= \frac{fgdt^2 \sin\phi}{ff+kk}$, qui est infinite parvus secundi ordinis.

COROLL. 2.

524. Si ergo corpus fuerit in quiete, in quiete persistere nequit nisi sit $\sin\phi = 0$, hoc est nisi centrum inertiae I in recta verticali OC versetur. Quare si corpus quodcunque hoc modo suspendatur, in quiete esse nequit, nisi recta OI sit verticalis, quod fit si centrum inertiae locum vel imum vel summum obtineat.

COROLL. 3.

525. Quoties autem recta OI fuerit obliqua, corpus ob gravitatem ad motum sollicitabitur, ac si jam habuerit motum, ejus motus perturbabitur, vel accelerando vel retardando, prout motus vel ad OC accedat vel ab eo recedat.

COROLL. 4.

526. Patet etiam, si axis per ipsum centrum inertiae I transeat, ut sit $OI = f = 0$, momentum gravitatis evanescere, motumque gyratorium propterea plane non turbari. Hoc ergo casu corpus vel quiescet, vel uniformiter circa axem O gyrabitur.

SCHOLION.

527. Hic statim notari convenit, corpus non perinde moveri, ac si tota ejus massa in ipsius centro inertiae I esset collecta, quemadmodum in motu progressivo usu venire vidimus. Si enim hic tota corporis massa M revera in centro inertiae I esset collecta, ejus momentum inertiae respectu axis per I ducti evanesceret, foretque $kk = 0$; motusque ergo ita perturbaretur, ut esset $dd\phi = \frac{-2gdt^2 \sin\phi}{f}$, quae formula major est quam casu proposito. Unde intelligitur, motum corporis extensi, quale hic contemplamur, minus a gravitate perturbari, quam si tota corporis massa in centro inertiae esset collecta. Verum infra videbimus, dari in recta OI aliud punctum magis ab axe O remotum, in quo si tota corporis massa esset collecta, motus eandem perturbationem esset passurus, quod punctum in motu gyratorio imprimis notari meretur, quoniam est id ipsum quod vulgo *centrum oscillationis* appellari solet, et de cujus inventione plurima passim occurrunt praecepta.

PROBLEMA. 45.

Fig. 67. 528. Si corpus rigidum AEBF fuerit mobile circa axem horizontalem, ejusque detur situs et celeritas initio motus, ad tempus quodvis invenire ejus situm et celeritatem.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus uti in praecedente problemate, scilicet massa corporis $= M$, distantia centri inertiae I ab axe gyrationis O scilicet $OI = f$, et momento inertiae respectu axis ipsi axi gyrationis paralleli et per I transeuntis $= Mkk$; teneat corpus elapso tempore $= t$ situm in figura repraesentatum, sitque angulus $COI = \phi$, existente CO recta verticali, atque sumto elemento dt constante pervenimus ad hanc aequationem $dd\phi = \frac{-2fgdt^2 \sin\phi}{ff + kk}$, quae per $2d\phi$ multiplicata et integrata praebet

$$d\phi^2 = \alpha dt^2 + \frac{4fgdt^2 \cos\phi}{ff + kk}$$

unde cognoscitur quadratum celeritatis $uu = \alpha + \frac{4fg \cos\phi}{ff + kk}$. Deinde

posito

posito brevitatis gratia $\frac{4fg}{ff+kk} = \lambda$, ob $d\varphi^2 = dt^2(\alpha + \lambda \cos\varphi)$ reperitur $dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha + \lambda \cos\varphi)}}$ et $t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha + \lambda \cos\varphi)}}$: ubi constans α et ultera in ultima integratione ingressa ex statu initiali dato debent definiri.

COROLL. 1.

529. Evanescente angulo COI $= \varphi$, fit celeritas angularis $\varepsilon = \sqrt{\left(\alpha + \frac{4fg}{ff+kk}\right)}$ omnium maxima, in aequalibus autem elongationibus rectae OI a verticali OC celeritates sunt aequales: et nisi constans α sit minor, quam $\frac{4fg}{ff+kk}$, corpus integras revolutiones circa axem absolvet: quoniam tum pro angulo $\varphi = 180°$ celeritas angularis adhuc est realis.

COROLL. 2.

530. Sin autem fuerit $\alpha < \frac{4fg}{ff+gg}$, angulus COI $= \varphi$ non ultra certum limitem crescere potest, corpusque cum eo pertigerit rursus descendet, motumque oscillatorium peraget: ac ducta IK horizontali ob $OK = f\cos\varphi$, angulo elongationis COI respondebit celeritas angularis $\varepsilon = \sqrt{\left(\alpha + \frac{4g \cdot OK}{ff+kk}\right)}$

SCHOLION.

531. Sive corpus integras revolutiones absolvat, sive oscillando eat redeatque, determinatio motus eundem calculum postulat, atque motus penduli simplicis, quo corpusculum infinite parvum filo inertiae experti alligatum circa axem horizontalem gyratur. Quem motum cum jam fusius supra exposuerimus, superfluum foret, eosdem calculos hic repetere: sufficiet igitur, pro quovis casu pendulum simplex assignasse, quod pari motu angulari feratur. Atque hic quidem tantum longitudo hujus penduli simplicis in computum venit, cum motus ejus solum ab ejus longitudine pendeat; siquidem initio utrique eundem motum angularem tribuimus.

DEFINITIO. 9.

532. Pro motu gyratorio vel oscillatorio corporis cujusvis gravis circa axem horizontalem, *pendulum simplex isochronum* vocatur, quod cum

cum semel in pari a recta verticali elongatione parem celeritatem angularem acceperit, deinceps continuo simili motu angulari feratur.

EXPLICATIO.

Fig. 67. 533. Si corpus ponatur quodcunque AEBF, quod a sola gravitate sollicitatum circa axem horizontalem O gyretur, primo ejus centrum inertiae I spectandum est, quod si in recta verticali OC versetur, corporis situm naturalem, in quo acquiescat, indicat: angulus autem COI *elongatio a situ naturali* vocatur. Quodsi jam huic corpori in data elongatione datus motus angularis fuerit impressus, pendulum simplex isochronum ita debet esse comparatum, ut si ei in pari elongatione aequalis motus angularis imprimatur, deinceps hujus motus perpetuo sit responsurus motui corporis propositi. Vel quia totum negotium a longitudine hujus penduli simplicis pendet, si id fuerit OS atque ex communi axe O suspensum concipiatur, motu suo perpetuo motum corporis AEBF comitabitur, dummodo semel aequalem motum gyratorium acceperit. Perinde quidem est, sive hoc pendulum simplex eidem axi applicatum concipiatur, sive secus: sed quoniam utrinque elongationes a situ verticali OC perpetuo eaedem esse debent, corporisque elongatio ex situ rectae OI est aestimanda, pendulum simplex commodissime in puncto O suspensum consideratur, ut ejus situs OS perpetuo in rectam OI incidat, totaque quaestio ad determinationem puncti S revocetur.

COROLL. 1.

534. Invento hoc puncto S in recta OI producta, corpus perinde movebitur, ac si tota ejus massa in ipso hoc puncto S esset collecta: tum enim ob extensionem evanescentem habetur pendulum simplex longitudinis OS.

COROLL. 2.

535. Hoc ergo punctum S quaeri debet in recta, quae per centrum inertiae corporis ad axem gyrationis normaliter ducitur, etiamsi hic non sit necessarium, et pendulum simplex OS ex eodem axis puncto O suspensum statuatur.

SCHOLION.

536. Cum istud pendulum simili motu latum ob massae evanescentiam *simplex* vocetur ad hunc modum corpora quaevis extensa circa axem fixum mobilia vocari solent *pendula composita;* ita ut quaestio

huc

huc reducatur, ut proposito quocunque pendulo composito, quod scilicet sit corpus rigidum, assignetur pendulum simplex isochronum, quam quaestionem nunc quidem facillime resolvere poterimus. Ceterum monendum est, filum, quo pendulum simplex axi alligatum intelligimus, non solum inertiae expers statui, sed etiam rigidum concipi oportere, ne ulla inflexio calculum turbare queat.

PROBLEMA 46.

537. Proposito corpore quocunque rigido et gravi AEBF circa axem horizontalem fixum O mobili, definire pendulum simplex isochronum OS.

SOLUTIO.

Posita massa totius corporis $= M$ ejusque centro inertiae in I, hinc ad axem ducatur recta normalis $IO = f$, quae jam a verticali OC distet angulo $COI = \phi$: tum vero sit Mkk momentum inertiae corporis respectu axis per I ducti et axi gyrationis paralleli. His positis, quicunque motus corpori initio fuerit impressus, elapso tempore $= t$, motus variatio hac formula exprimitur: $dd\phi = \frac{-2fgdt^2 \sin\phi}{ff+kk}$. Ponatur nunc penduli simplicis isochroni longitudo $OS = l$, quod cum eodem angulo $COS = \phi$ a situ verticali distet, ejus motus hanc variationem patietur, ut sit $dd\phi = \frac{-2gdt^2 \sin\phi}{l}$, quae quidem formula ex praecedente fluit, ponendo $k = 0$ et $f = l$. Quare cum eadem variatio utrinque evenire debeat, obtinemus $l = \frac{ff+kk}{f}$ seu $l = f + \frac{kk}{f}$. Fig. 67.

COROLL. 1.

538. Longitudo ergo penduli simplicis isochroni OS superat distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis O, estque intervallum $IS = \frac{kk}{f}$. Cognita vero longitudine $OS = l$, erit $kk = f(l-f) = OI . IS$, ita ut pro eodem corpore rectangulum $OI . IS$ sit constans.

COROLL. 2.

539. Si pro eodem corpore distantia $OI = f$ varietur, patet, tam casu $f = 0$, quam $f = \infty$, pendulum simplex isochronum l evadere infinitum; brevissimum autem erit, si capiatur $f = k$, quo casu fit $l = 2k$; praeterea semper est $l > 2k$.

COROLL. 3.

540. Invento pendulo simplici isochrono l, quoniam oscillationes minimae corporis, perinde atque istius penduli sunt isochronae, tempus cujusque oscillationis erit $= \frac{\pi \sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$ min. sec. (215). Hinc si prodeat $l = \frac{2g}{\pi\pi}$, singulae oscillationes minimae corporis absolventur minutis secundis.

SCHOLION.

541. Hinc colligitur methodus facilis cujusque corporis momentum inertiae practice definiendi. Suspenso enim corpore ex axe horizontali, circa quem liberrime gyrari queat, omni cura primo definiatur distantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, nempe $OI = f$, quod etiam practice fieri potest: deinde corpus ad minimas oscillationes peragendas incitetur, pluribusque dato tempore numeratis, inde colligatur tempus unius oscillationis, quod sit $= \tau$ min. sec. hincque habebitur $l = \frac{2g\tau\tau}{\pi\pi}$: quo invento erit $kk = f(l - f)$, et pondus corporis M per kk multiplicatum dabit momentum inertiae, respectu axis per ejus centrum inertiae transeuntis et axi gyrationis paralleli. Potest etiam hoc experimentum multiplicari; dum corpus successive ex variis axibus, qui tamen sint inter se paralleli, suspenditur, quo certiores de vero valore kk reddamur. Quin etiam hinc vicissim longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis explorari potest, quandoquidem neque pendulis simplicibus uti licet, neque altitudo lapsus g uno minuto secundo absoluta satis accurate per experimenta lapsus determinari potest. Hinc autem pro corpore suspenso quantitates f et kk accurate nosse oportet, unde colligitur $l = f + \frac{kk}{f}$: tum si tempus unius oscillationis minimae τ sit observatum, habebitur $g = \frac{\pi\pi l}{2\tau\tau}$, hincque longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis $\frac{2g}{\pi\pi} = \frac{l}{\tau\tau}$.

DEFINITIO. 10.

542. Centrum oscillationis in pendulo composito est punctum, in quo si tota corporis massa esset collecta, idem motus oscillatorius esset prodi-

prodituras. Sumitur autem in recta, quae per centrum inertiae corporis transiens ad axem gyrationis est normalis.

COROLL. 1.

543. Distantia ergo centri oscillationis ab axe gyrationis aequalis est longitudini penduli simplicis isochroni: ac semper ab axe gyrationis O magis distat, quam centrum inertiae, intervallo $IS = \frac{kk}{f}$.

COROLL. 2.

544. Ad centrum igitur oscillationis S inveniendum nosse oportet momentum inertiae corporis respectu axis per ejus centrum inertiae I transeuntis et axi gyrationis paralleli, quod si fuerit $= Mkk$, dividi debet per Mf, hoc est per productum ex massa corporis M in distantiam axis gyrationis a centro inertiae $OI = f$, et quotus $\frac{Mkk}{Mf}$ ostendet distantiam centri oscillationis a centro inertiae.

SCHOLION.

545. Hoc modo investigatio motus pendulorum compositorum ad centri oscillationis investigationem perduci solet, etsi ad hoc sufficit, longitudinem penduli simplicis isochroni nosse, neque ulla ratio urget, ut hoc pendulum eidem axi suspensionis, et quidem secundum rectam per centrum inertiae ad axem suspensionis normaliter ductam applicatum concipiatur. Verum hic modus rem concipiendi est commodissimus, et si corpus in situ quietis pendeat, ut recta per centrum inertiae ad axem normaliter ducta simul sit verticalis, centrum oscillationis in eadem recta profundius quam centrum inertiae erit situm; neque enim hic opus est, ut corpus tanquam in motu spectetur. Ita recta OI in verticalem OC incidens consideratur, in qua erit centrum oscillationis S profundius situm centro inertiae I, quod hic revera nomen *centri gravitatis* obtinet, ita ut sit intervallum $IS = \frac{Mkk}{Mf} = \frac{kk}{f}$. Quare calculus centri oscillationis facillime expeditur calculo, quem supra pro momento inertiae inveniendo tradidimus.

EXEMPLUM.

546. Experimenta ante memorata globo ex materia homogenea confecto institui solent, qui ope fili OB suspensus ad minimas oscillationes Fig. 58.

 inci-

incitatur, ubi quidem filum tam tenue est sumendum, ut ejus massa prae globo pro nihilo haberi liceat. Sit igitur radius globi BI $= b$, et distantia puncti suspensionis O a centro globi I, quod simul ejus est centrum inertiae vel gravitatis, nempe OI $= f$, erit ut supra invenimus $kk = \frac{2}{5}bb$. Quare centrum oscillationis erit in S, ut sit IS $= \frac{2bb}{5f}$, seu oscillationes convenient cum oscillationibus penduli simplicis, cujus longitudo est $= f + \frac{2bb}{5f}$. Ut ergo hoc pendulum singulis minutis secundis oscilletur, necesse est sit $f + \frac{2bb}{5f} = \frac{2g}{\pi\pi}$ seu $ff = \frac{2gf}{\pi\pi} - \frac{2}{5}bb$, unde $f = \frac{g}{\pi\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{\pi^4} - \frac{2}{5}bb\right)}$, ita ut pro f duplex habeatur valor, qui simul sumti dent $\frac{2g}{\pi\pi}$. Hi ambo valores fient aequales, si globus tantus accipiatur, ut sit $bb = \frac{5gg}{2\pi^4}$, et $b = \frac{g}{\pi\pi}\sqrt{\frac{5}{2}}$: hoc est in pedibus Rhenanis debet esse radius globi $= 2,50317$, ac tum distantia OI $= f$ fit $= 1,583144$ ped. ita ut punctum suspensionis seu axis gyrationis intra globum capi debeat. Cum autem sit $f = \frac{g}{\pi\pi} = b\sqrt{\frac{2}{5}}$ seu $f = k$, evidens est hoc casu globum celerrime oscillari. Scilicet si sit Iω $= b\sqrt{\frac{2}{5}}$, ducta horizontali $\mu\nu$, quae axem gyrationis referet, erit cos$B\mu$ $= \sqrt{\frac{2}{5}}$, ideoque arcus B$\mu = 50°, 46'$. Sin autem globus fuerit valde parvus, ut fieri solet, ad minuta secunda producenda sumi debet OI $= \frac{2g}{\pi\pi} - \frac{\pi\pi bb}{5g}$: quare ut globus ex ipso puncto B suspensus hoc praestet, ejus radius debet esse $b = \frac{(\sqrt{65}-5)g}{2\pi\pi} = 0,155136g$ proxime.

PROBLEMA 47.

547. Si corpus rigidum circa axem horizontalem mobile pluribus constet partibus, quarum singularum centra inertiae et momenta inertiae sint cognita; definire totius corporis centrum oscillationis.

SOLUTIO.

Fig. 69. Axis gyrationis horizontalis ad planum figurae in puncto O normalis concipiatur, sintque A, B, C, D centra inertiae partium, ex quibus corpus

corpus est compositum, quarum partium massae sint A, B, C, D, et momenta inertiae respectu axium ipsi axi gyrationis parallelorum et per cujusque centrum inertiae transeuntium Aa^2, Bb^2, Cc^2, Dd^2: centra autem inertiae distent ab axe gyrationis intervallis AO, BO, CO, DO; perinde enim est, sive haec intervalla ad idem axis punctum O tendant, sive ad diversa, quoniam tam momenta gravitatis quam momenta inertiae tantum a distantiis ab axe pendent, neque diversitas punctorum O quicquam eo confert. Primum ergo centrum inertiae I totius corporis, cujus massa sit $= M = A + B + C + D$, definiatur, quod in tali recta OI erit situm, ut sit AOA . si AOI + BOB . si BOI = COC, f COI + DOD . sin DOI: tum vero erit:

$$M . OI = A . AO . \cos AOI + B . BO . \cos BOI + C . CO \cos COI + D . DO . \cos DOI,$$

quae quantitas in superiori formula $IS = \frac{Mkk}{Mf}$ loco Mf scribi debet. At momentum inertiae totius corporis respectu axis gyrationis $M(ff + kk)$ ex partibus ita componitur, ut sit:

$$A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd).$$

Quare cum sit $OS = \frac{M(ff + kk)}{Mf}$, erit

$$OS = \frac{A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd)}{A . AO . \cos AOI + B . BO . \cos BOI + C . CO . \cos COI + D . DO . \cos DOI}$$

COROLL. 1.

548. Si singulae partes seorsim considerentur, earumque centra oscillationis statuantur in punctis a, b, c, d, ob $Oa = \frac{A(AO^2 + aa)}{A . OA}$, erit

$$OS = \frac{A . OA . Oa + B . OB . Ob + C . OC . Oc + D . OD . Od}{A . OA \cos AOI + B . OB . \cos BOI + C . OC . \cos COI + D . OD . \cos DOI}$$

COROLL. 2.

549. Invento autem centro inertiae seu gravitatis totius corporis I loco denominatoris poni potest M . OI: per praecepta autem statica centrum gravitatis totius corporis ex datis centris gravitatis partium, facile colligitur.

EXEMPLUM.

550. Sit pendulum compositum ex virga cylindrica recta ACB et globo illi annexo BEDF, quod circa axem horizontalem $\varepsilon O f$ sit mobile, cu- Fig. 70.

 jus

jus centrum oscillationis S quaeratur. Virga autem et globus constent ex materia uniformi, ponaturque virgae longitudo $AB = a$, pondus $= A$, et extremitatis B ab axe gyrationis O distantia $BO = b$, basis autem hujus cylindri radius $= c$; erit ejus centrum inertiae in C, ut sit $AC = BC = \frac{1}{2}a$, et $OC = b - \frac{1}{2}a$, momentum vero inertiae respectu axis per C ducti et axi gyrationis paralleli $= A(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc)$. Porro globi annexi sit massa $= E$, radius $BG = e$, erit ejus centrum inertiae in G et momentum inertiae $= \frac{2}{5}Eee$. Sit jam totius corporis centrum inertiae in I erit $(A + E)$. $OI = A(b - \frac{1}{2}a) + E(e + b) = Mf$; deinde momentum inertiae respectu axis gyrationis $= A(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc = (b - \frac{1}{2}a)^2) + E(\frac{2}{5}ee + (b+e)^2)$ quod loco $M(ff + kk)$ substitui debet. Sicque centrum oscillationis erit in S ut sit:

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa - ab + bb + \frac{1}{4}cc) + E(bb + 2be + \frac{7}{5}ee)}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b + e)}$$

ergo ob $OG = b + e$ fiet

$$GS = \frac{A(be + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae - \frac{1}{3}aa - \frac{1}{4}cc) - E.\frac{2}{5}ee.}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b + e)}.$$

COROLL. 1.

551. Si axis gyrationis O capiatur in summitate virgae A, ut sit $b = a$, erit

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc) + E(aa + 2ae + \frac{7}{5}ee)}{A.\frac{1}{2}a + E(a + e)}$$

$$\text{et } GS = \frac{A(\frac{1}{2}ae + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{4}cc) - E.\frac{2}{5}ee}{A.\frac{1}{2}a + E(a + e)}$$

si quidem sumamus punctum S supra G cadere.

COROLL. 2.

552. Si sit exempli gratia $E = 30\,A$; $a = b = 3$ ped. $e = \frac{1}{12}$ ped. et $c = \frac{1}{100}$ ped. ita ut cc tuto negligi possit, erit $OG = 3\frac{1}{12} = 3{,}0833$ et $OS = \frac{3 + 285\frac{7}{24}}{1\frac{1}{2} + 92\frac{1}{2}} = \frac{828\frac{7}{24}}{94} = 3{,}0669$, hocque casu punctum S supra G cadit; sin autem massa virgae evanesceret, foret $OS = 3{,}0842$, sicque S infra G caderet.

SCHOLION.

553. Hic postremus casus ideo est notatu dignus, quod vulgo filum, si fuerit valde tenue ac leve respectu globi, vix quicquam ad cen-

trum

trum oscillationis conferre videatur, hic enim certe, etsi globus tricies ponderosior est filo, hujus ratio sine insigni errore negligi non posset. Ponamus enim, hoc pendulum oscillationes absolvisse minutis secundis, hincque longitudinem penduli simplicis isochroni determinari oportere. Haec igitur neglecta fili massa prodiret $= 3,0842$ ped. cum tamen revera tantum sit $3,0669$, ped. ita ut error $0,0173$ ped. $2\frac{1}{2}$ lin. committeretur minime certe tolerandus. Sin autem manentibus reliquis dimensionibus, filum adhuc levius atque $E = 60 A$ esset, foret $OS = \dfrac{3 + 570\frac{7}{2}}{1\frac{1}{2} + 185}$ $= 3,0782$, cujus loco si sumeretur $3,0842$ error committeretur $= 0,0060$ ped. $= \frac{4}{7}$ lin.

PROBLEMA 48.

554. Si pendulum constet ex virga tenuissima OB inertiae experte rigida tamen, et globo BEDF, invenire locum, ubi alius globus datus eidem virgae affigi debeat, ut oscillationes fiant promtissimae. Fig. 71.

SOLUTIO.

Cum in O sit axis gyrationis, sit distantia $OG = b$, et radius globi infra affixi $BG = c$; massaque hujus globi $= B$: tum alterius globi affigendi sit massa $= L$, et radius $QK = e$, pro loco autem ejus quaesito distantia $OQ = q$. His positis sit I centrum inertiae commune, erit $(B + L)\, OI = Bb + Lq = Mf$, tum vero momentum inertiae totius penduli respectu axis gyrationis $= B(\frac{2}{5}cc + bb) + K(\frac{2}{5}ee + qq) = M(ff + kk)$. Quare si centrum oscillationis statuatur in S, erit $OS = \dfrac{B(\frac{2}{5}cc + bb) + L(\frac{2}{5}ee + qq)}{Bb + Lq}$, quae longitudo minima esse debet, ut oscillationes fiant promtissimae. Hinc prodit ista aequatio:

$$2BLbq - BL(\tfrac{2}{5}cc + bb) - \tfrac{2}{5}LLee + LLqq = 0$$

seu $Lq = -Bb + \sqrt{(BBbb + BLbb + \frac{2}{5}BLcc + \frac{2}{5}LLee)}$

unde innotescit distantia $OQ = q$: ex qua porro colligitur longitudo penduli simplicis isochroni

$$OS = \frac{2}{L}\sqrt{(BBbb + BLbb + \tfrac{2}{5}BLcc + \tfrac{2}{5}LLee)} - \frac{2Bb}{L} = 2q.$$

Hinc si ambo globi ex eadem materia fuerint confecti, ob $B : L = c^3 : e^3$ erit $OS = \dfrac{2\sqrt{(c^6bb + c^3e^3bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8)} - 2c^3b}{e^3}$ et OQ $= q = \dfrac{\sqrt{(c^6bb + c^3e^3bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8)} - c^3b}{e^3}$.

CO-

COROLL. 1.

555. Si diametri globorum fuerint minimi, ut cc et ee prae bb negligi queant, distantia OQ $= q$ ita capi debet, ut sit OQ $= \frac{\sqrt{B(B+L)}-B}{L} b$, et longitudo penduli simplicis isochroni erit $= 2 \cdot \text{OQ} = 2b \cdot \frac{\sqrt{B(B+L)}-B}{L}$.

COROLL. 2.

556. Si globus alter KLMN plane omitteretur, foret OS $= b + \frac{2cc}{5b}$, quae major est, quam adjuncto isto globo, si fuerit $b + \frac{2cc}{5b} > 2e\sqrt{\frac{2}{5}}$. Unde nisi sit $e > \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(b + \frac{2cc}{5b}\right)$, hoc altero globo adjungendo oscillationes promtiores reddi possunt.

COROLL. 3.

557. Sin autem fuerit $e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(b + \frac{2cc}{5b}\right)$ quantacunque etiam fuerit hujus globi massa L, pro oscillationibus celerrimis obtinendis sumi debet OQ $= q = \frac{1}{2} b + \frac{cc}{5b}$, et tum longitudo penduli simplicis isochroni erit $= b + \frac{2cc}{5b}$, omnia ac si globus KLMN removeretur.

COROLL. 4.

558. Si ambo globi fuerint aequales, ut sit L $=$ B et $e = c$, oscillationes promtissimae evadent, capiendo OQ $= q = \sqrt{(2bb + \frac{4}{5}cc)} - b$: ac si cc prae bb negligere liceat, OQ $=$ OG $(\sqrt{2} - 1)$; hincque longitudo penduli simplicis isochroni $= 2\text{OG}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}828427$ OG.

COROLL. 5.

559. Si ambo globi ex eadem materia constent, definiri potest globi KLMN radius e, ut eo rite adjungendo oscillationes fiant promtissime; scilicet e quaeri debet ex hac aequatione, $16e^{10} - 48c^5e^5 - 120bbc^3e^5 - 600bbc^6ee + 9c^6(5bb + 2cc)^2 = 0$.

SCHOLION.

560. Ceterum patet, quo minor sit radius e globi KLMN manente ejus massa L, eo minorem prodire distantiam OQ $= q$, ideoque eo prom-

promtiores fore oscillationes. At vero manente radio e oscillationes fient celerrimae, si massa L globi affigendi fuerit quam maxima; nam si esset $L = o$, foret $OS = b + \frac{2cc}{5b}$, qui est valor maximus, si quidem affigendo altero globo oscillationes crebriores reddi possunt. At vero si fuerit $5bb + 2cc = 2be\sqrt{10}$, seu $e = \frac{5bb + 2cc}{2b\sqrt{10}}$, quantacunque fuerit hujus globi massa L, eo rite annexo oscillationes manent ejusdem durationis, et si hic globus adhuc fuerit major, oscillationes adeo tardiores evadent. Quodsi ambo globi ex materia aeque gravi fuerint confecti, magnitudo affigendi, ut motus oscillatorius fiat rapidissimus, ex aequatione decimi gradus definiri debet: verum si axis per centrum G globi BCDF transeat, ut sit $b = o$, inde prodit $e = c\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}}$; pro radio globi affigendi, et pro ejus loco $OQ = q = \sqrt{(\tfrac{2}{5}\frac{c^5}{e^3} + \tfrac{2}{5}e^2)} = c\sqrt[10]{\tfrac{8}{25}}$, et longitudo penduli simplicis isochroni $= 2c\sqrt[10]{\tfrac{8}{25}}$. Axis ergo gyrationis per centrum prioris globi transiens alterum ita trajicere debet, ut ab ejus centro distet intervallo $OQ = c\sqrt[10]{\tfrac{8}{25}}$, quod minus est ejus radio $e = c\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}}$. Hujusmodi autem quaestiones circa motum oscillatorium plures proponi possent, quae autem ex stabilitis hic principiis non difficulter solventur. Plurimum autem interierit investigare, quantas vires ipse axis gyrationis inter motum sustineat.

PROBLEMA. 49.

561. Dum corpus rigidum grave circa axem horizontalem fixum OA gyratur, ad quodvis tempus definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A sustinet. Fig. 72.

SOLUTIO.

Repraesentet tabula planum verticale per axem gyrationis OA transiens, versetur que jam centrum inertiae corporis extra hoc planum in I, unde tam ad planum verticale, quam ad axem ducantur perpendiculares IK et IG, erit angulus $IGK = \phi$ elongatio corporis a situ naturali, ac posito distantia $IG = f$, erit $KI = f.\sin\phi$ et $GK = f\cos\phi$. Tum sit massa corporis $= M$, quae cum simul ejus pondus exprimat, vis sollicitans erit $= M$ in directione verticali IV urgens, cujus momentum $= Mf\sin\phi$ tendit ad angulum IGK minuendum. Deinde consideretur

 ele-

elementum corporis quodcunque dM in Z, unde ad planum verticale et axem ductis perpendiculis ZY, ZX vocentur coordinatae $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, eritque $OG = \frac{\int xdM}{M}$, $GK = \frac{\int ydM}{M}$ et $KI = \frac{\int zdM}{M}$: posita autem distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$, exprimit $\int rrdM$ momentum inertiae corporis respectu axis OA, quod sit $= Mkk$: denique ponatur distantia punctorum axis $OA = a$, et per ambo ducantur rectae BOb, COc et EAe, FAf ipsis KG et KI parallelae. His praeparatis secundum ductum probl. 23. primum observo nullam adesse vim, cujus directio cum axe sit in eodem plano: cum autem hic momentum vis $Mf \sin\phi$ in sensum contrarium vergat, atque ibi sumsimus, erit $Vf = -Mf \sin\phi$.

Nunc igitur ob vim $IV = M$, quae axi in G secundum directionem GK applicata est concipienda, axis in punctis O et A has sustinebit vires:

$$\text{sec. OB vim} = \frac{M \cdot AG}{a}; \text{ sec. AE vim} = \frac{M \cdot OG}{a}.$$

Quibuscum conjungendae sunt illae, quae ex viribus elementaribus contrarie applicatis nascuntur: quae sunt

$$\text{pro termino O} \begin{cases} \text{sec. O}b\text{ vis} = \dfrac{f \sin\phi \cdot \int(a-x)\, zdM}{akk} \\ \text{sec. OC vis} = \dfrac{f \sin\phi \cdot \int(a-x)\, ydM}{akk} \end{cases}$$

$$\text{pro termino A} \begin{cases} \text{sec. A}e\text{ vis} = \dfrac{f \sin\phi \cdot \int xzdM}{akk} \\ \text{sec. AF vis} = \dfrac{f \sin\phi \cdot \int xydM}{akk} \end{cases}$$

hasque vires axis ob actionem gravitatis corporis sustinet, verum ob motum, quo jam gyratur, si celeritas gyratoria vocetur $= \varepsilon$, axis in punctis O et A has vires sustinet:

$$\text{pro termino O} \begin{cases} \text{sec. OB vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon \int(a-z)\, ydM}{2ag} \\ \text{sec. OC vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon \int(a-x)\, zdM}{2ag} \end{cases}$$

pro

pro termino A $\begin{cases} \text{sec. AE vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon\int xydM}{2ag} \\ \text{sec. AF vim} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon\int xzdM}{2ag} \end{cases}$

COROLL. 1.

560. Si distantiae terminorum O et A a puncto G vocentur $OG = b$ et $AG = c$, ut sit $a = b + c$; tum vero ponatur $GX = u$, erit $x = b - u$ et $a - x = c + u$; ideo

$$\int(a-x)\,zdM = \int(c+u)\,zdM = Mc\,.\,KI + \int uzdM$$
$$\int(a-x)\,ydM = \int(c+u)\,ydM = Mc\,.\,GK + \int uydM$$
$$\int xzdM = \int(b-u)\,zdM = Mb\,.\,KI - \int uzdM$$
$$\int xydM = \int(b-u)\,ydM = Mb\,.\,GK - \int uydM.$$

COROLL. 2.

563. His valoribus introductis axis in puncto O has vires sustinet: primo secundum directionem OB vim

$$\frac{Mc}{a} - \frac{Mcf\,si\varphi.KI}{akk} - \frac{f\,si\varphi.\int uzdM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon.Mc.GK}{2ag} + \frac{\varepsilon\varepsilon.\int uydM}{2ag}$$

deinde secundum directionem OC vim

$$\frac{Mcfs\varphi.GK}{akk} + \frac{fs\varphi.\int uydM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon.Mc.KI}{2ag} + \frac{\varepsilon\varepsilon.\int uzdM}{2ag}$$

At vero in puncto A istas:

primo secundum directionem AE vim

$$\frac{Mb}{a} - \frac{Mbfs\varphi.KI}{akk} + \frac{fs\varphi.\int uzdM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon.Mb.GK}{2ag} - \frac{\varepsilon\varepsilon.\int uydM}{2ag}$$

deinde secundum directionem AF vim

$$\frac{Mbfs\varphi.GK}{akk} - \frac{fs\varphi.\int uydM}{akk} + \frac{\varepsilon\varepsilon.Mb.KI}{2ag} - \frac{\varepsilon\varepsilon\int uzdM}{2ag}.$$

COROLL. 3.

564. Si corpus ita fuerit comparatum, ut a plano IGK in duas partes similes et aequales dividatur, sitque $GO = GA = \frac{1}{2}a$, ob $\int uzdM = 0$ et $\int uydM = 0$, axis in puncto O sustinebit has vires

$$\text{sec. OB vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mfs\varphi.KI}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon.M.GK}{4g}$$

 sec.

$$\text{sec. OC vim} = \frac{Mf\int\varphi . GK}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon . M . KI}{4g}$$

in puncto autem A sustinebit has vires

$$\text{sec. AE vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mf\int\varphi . KI}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon . M . GK}{4g}$$

$$\text{sec. AF vim} = \frac{Mf\int\varphi . GK}{2kk} + \frac{\varepsilon\varepsilon . M . KI}{4g}$$

hoc ergo casu vires non a magnitudine distantiae OA $= a$ pendeat.

COROLL. 4.

565. Hoc ergo casu, quo $\int uydM = 0$ et $\int uzdM = 0$, nihil impedit, quominus distantia OA $= a$ evanescens accipiatur, atque axis in unico puncto G retineri poterit, hic quippe sustinet binas vires

$$\text{alterum secundum GK} = M - \frac{Mff \sin\varphi^2}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f \cos\varphi}{2g}$$

$$\text{alterum secundum GH} = \frac{Mff\int\varphi \cos\varphi}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f\int\varphi}{2g}$$

existente GH ipsi KI parallela.

SCHOLION.

566. Corpora, quae vulgo ad motum oscillatorium adhiberi solent, ita sunt comparata, ut plano, quod per eorum centrum inertiae ad axem gyrationis normaliter ducitur, in duas portiones aequales et similes secentur: de iis igitur locum habet, quod axis in unico puncto retineri queat. Scilicet si figura 67. repraesentet planum verticale per talis corporis centrum inertiae I ductum et ad axem gyrationis normale, qui figurae in O normaliter insistere concipiatur, existente OC recta verticali, et OH in hoc plano horizontali, axis in puncto ipso O vires modo indicatas sustinebit. Nempe si angulus COI ponatur $= \varphi$, distantia OI $= f$, massa corporis $= M$, ejus momentum inertiae respectu axis gyrationis $= Mkk$, et celeritas angularis in hoc statu sit $= \varepsilon$, sive ad angulum COI augendum tendat, sive minuendum, axis O sustinet duas vires.

Fig. 67.

$$\text{alterum secundum OC} = M - \frac{Mff \sin\varphi^2}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f \cos\varphi}{2g}$$

$$\text{alterum secundum OH} = \frac{Mff \sin\varphi \cos\varphi}{kk} + \frac{M\varepsilon\varepsilon f\int\varphi}{2g}.$$

Priori

Priori ergo vi deorsum sollicitatur, eamque sustentaculum sustinet: ob alteram vero vim axis in eam plagam, in qua centrum inertiae versatur, horizontaliter super sustentaculo procedere conatur, quem effectum obice arceri convenit. Quando centrum inertiae in contrariam plagam divagatur, haec vis horizontalis in contrarium dirigitur. Ceterum ambae vires ex duabus constant partibus, quarum altera actioni gravitatis, altera motui gyratorio ipsi debetur, ac ducta OL ad OI normali, hae partes ad pauciores ita redigentur, ut axis in puncto O ab his viribus sollicitetur.

$$\text{sec. OG vi} = M; \ \text{sec. OL vi} = \frac{Mff \sin\phi}{kk}; \ \text{sec. OI vi} = \frac{Mfzz}{2g}.$$

Si non fuerit $\int uydM = 0$ et $\int uzdM = 0$, tum praeter istas vires axis insuper in punctis O et A fig. 72. eas virium §. 563. partes sustinet, quae has formulas integrales involvunt, quoniam reliquas partes immunes ad unicum punctum reducere licuit.

PROBLEMA. 50.

576. Si axis OA, circa quem corpus rigidum grave est mobile, non fuerit horizontalis, definire motum gyratorium ut et vires, quas axis inde sustinet. Fig. 73.

SOLUTIO.

Per axem OA ductum concipiatur planum verticale, in quo sit GC recta verticalis, ponaturque angulus OGC $= \zeta$, cujus complementum $90^\circ - \zeta$ dat axis OA inclinationem ad horizontem. Reperiatur nunc corporis centrum inertiae I extra hoc planum verticale, unde ad axem ducta normali IG $= f$, et ex G in plano verticali ad axem pariter normali GK, erit ipsum planum IGK ad planum verticale normale, ponaturque angulus IGK $= \phi$, elongationem corporis a situ suo naturali metiens: recta enim GI in plano IGK movebitur. Statuatur massa corporis, eademque ejus pondus $=$ M, ejusque momentum inertiae respectu axis OA $= Mkk$, quod perinde colligitur, ac si axis esset horizontalis: inclinatio enim tantum ad vim sollicitantem spectat. Effectus autem gravitatis eo redit, ut corpus in puncto I sollicitetur in directione verticali IV a vi $=$ M, ad quam resolvendam ducantur IM et IN parallelae ipsis GO et GK, eruntque rectae IM, IV et IN in plano verticali, angulusque MIV $= \zeta$. Hinc ex vi IV $=$ M nascuntur duae vires, altera sec. IM $= M \cos\zeta$ et altera secundum IN $= M \sin\zeta$. Prior

 cum

cum sit axi parallela, nihil plane ad motum confert, sed tota in axem impenditur, quemadmodum supra docuimus. Pro motu ergo restat sola vis $IN = M \sin\zeta$ cujus directio cum sit ipsi GK parallela, orietur momentum $= Mf \sin\zeta \sin\phi$ tendens ad angulum IGK minuendum, atque pro motu definiendo formulae superiores pro axe horizontali inventae valebunt, nisi quod loco momenti vis sollicitantis, quod ante erat $= Mf \sin\phi$, hic scribi debeat $Mf \sin\zeta \sin\phi$: vel quatenus M pondus corporis denotat, ejus loco scribi debet $M \sin\zeta$, quatenus autem in momentum inertiae ingreditur, immutatum relinqui debet. Quare motus similis erit motui penduli simplicis circa axem horizontalem, cujus longitudo $= \frac{Mkk}{Mf \sin\zeta} = \frac{kk}{f \sin\zeta}$: quo ipso motus perfecte determinatur. Quod autem ad vires attinet, quas axis interea sustinet in datis si placet punctis O et A, primo ob vim $IM = M \cos\zeta$, axis secundum suam directionem AO a tanta vi urgetur, praeterea vero in utroque O et A a vi $= \frac{GI}{OA} \cdot M \cos\zeta$, in puncto A scilicet secundum directionem ipsi GI parallelam, in O vero secundum oppositam. Tum vero praeter has vires in punctis O et A ab iisdem viribus sollicitabitur, quas in problemate praecedente determinavimus, hoc tantum observato, quod pro M scribi debeat $M\int\zeta$ et $\int\int\zeta\int\phi$ loco $\int\int\phi$.

Fig. 72. Nempe si in fig. 72. OA sit noster axis inclinatus et reliqua maneant ut in problemate praecedente, tum axis praeter vires a vi $IM = M \cos\zeta$ natus sustinet insuper has vires. Primo in puncto O secundum directionem OB vim

$$\frac{Mc \sin\zeta}{a} - \frac{Mcff\int\zeta\int\phi^2}{akk} - \frac{f\int\zeta\int\phi \cdot \int uzdM}{akk} + \frac{Mcf88 \cos\phi}{2ag} + \frac{88\int uydM}{2ag}$$

et secundum directionem OC vim

$$\frac{Mcff\int\zeta\int\phi \cos\phi}{akk} + \frac{f\int\zeta\int\phi \cdot \int uydM}{akk} + \frac{Mcf88\int\phi}{2ag} + \frac{88\int uzdM}{2ag}$$

Deinde in puncto A secundum directionem AE vim

$$\frac{Mc\int\zeta}{a} - \frac{Mbff\int\zeta\int\phi^2}{akk} + \frac{f\int\zeta\int\phi \cdot \int uzdM}{akk} + \frac{Mbf88 \cos\phi}{2ag} - \frac{88\int uydM}{2ag}$$

et secundum directionem AF vim

$$\frac{Mbff\int\zeta\int\phi \cos\phi}{akk} - \frac{f\int\zeta\int\phi \cdot \int uydM}{akk} + \frac{Mbf88\int\phi}{2ag} - \frac{88\int uzdM}{2ag}$$

ubi est $OA = a$, $OG = b$, $AG = c$, et celeritas angularis $= 8$, integralibus sumtis ut ibi definivimus.

COROL.

COROLL. 1.

568. Cum longitudo penduli simplicis isochroni sit $= \frac{kk}{f \sin \zeta}$, corpus circa axem inclinatum tardius oscillationes suas absolvit quam si axis esset horizontalis, ac si oscillationes fuerint minimae, tempus unius erit $= \pi \surd \frac{kk}{2fg\, \text{ſ}\zeta}$ min. sec.

COROLL. 2.

569. Si axis est inclinatus, etiam vim sustinet secundum suam directionem AO, quae est $=$ M $\cos\zeta$, reliquae vires omnes ad axem sunt normales, et ad duo data puncta O et A revocari possunt. Fig. 73.

COROLL. 3.

570. Si corpus a plano IGK in duas partes similes et aequales bisecetur, valores integralium $\int uyd$M et $\int uzd$M evanescunt et omnes vires praeter eas, quae ex vi IM nascuntur, ad unicum punctum G reduci possunt, ut supra

SCHOLION.

571. Haec sint, quae de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum proponenda videbantur, ubi quidem ipsius motus determinatio eo est reducta, ut plus difficultatis non habeat, quam motus corpusculi circa axem fixum, si modo momentum inertiae fuerit exploratum. Vires autem, quas axis gyrationis inter motum sustinet, molestiorem calculum plerumque exigunt, cum ex corporis figura valores binorum integralium $\int xyd$M et $\int xzd$M erui debeant. Verum haec investigatio maximi est momenti, si ad motum corporum rigidorum circa axes non fixos progredi velimus: ubi primo quidem eos casus diligentius evolvi convenit, quibus axis sponte manet immobilis, etiamsi extrinsecus non retineatur. Proposito ergo corpore quocunque rigido, inquirendum est, utrum in eo dentur ejusmodi axes, circa quos si corpus motum gyratorium receperit, ipsi inde nullas sustineant vires: deinde etiam videndum est, a quibusnam viribus corpus circa talem axem motum sollicitari debeat, ut etiam hinc nullae vires ad axem dimovendum nascantur.

CAPUT

CAPUT VIII.

DE AXE GYRATIONIS LIBERO MOTUQUE CORPORUM RIGIDORUM CIRCA TALES AXES.

DEFINITIO. II.

572. *Axis gyrationis liber* in quovis corpore rigido est ejusmodi axis, qui dum corpus circa eum gyratur, nullas ob motum vires sustinet.

COROLL. 1.

573. Si igitur corpus circa axem liberum gyrari coeperit, axis sponte in quiete manebit, neque opus est, ut is extrinsecus in situ suo retineatur: quod quidem intelligendum est, si corpus a nullis viribus sollicitetur.

COROLL. 2.

574. Corpus ergo nullis viribus subjectum, si circa talem axem liberum motum gyratorium quemcunque acceperit, hoc motu perpetuo uniformiter gyrari perget, perinde ac si axis esset fixus.

SCHOLION.

575. En igitur alium casum motus liberi, in corpora rigida cadentis, cujus explicatio jam est manifesta. Primus scilicet casus erat, quo vidimus tale corpus motu progressivo libere proferri, at si vires sollicitantes per ejus centrum inertiae transeant, motus perturbationem jam definivimus. Deinde cum ostendissem corpus, cui circa axem fixum impressus fuerit motus gyratorius, eundem motum perpetuo conservare, dum axis ille fixus retineatur, nunc evidens est, si axis iste ita fuerit comparatus, ut vires, quas sustinet, se mutuo destruant, eum sponte immotum manere, corpusque motum gyratorium perpetuo esse continuaturum, qui propterea est casus motus liberi: ubi quidem nullum est dubium, quin ejusmodi etiam dentur vires, quae dum motum gyratorium vel accelerant vel retardant, axem non afficiant, ita ut adhuc in quiete persistat, de quo deinceps tractabimus. Ante omnia autem necesse est, ut inquiramus, an in quovis corpore tales axes gyrationis liberi dentur, et quomodo ii sint investigandi? in quo negotio summam

mam afferent utilitatem ea, quae supra de ternis axibus principalibus cujusque corporis tradidimus, quippe qui simul esse axes gyrationis liberi deprehendentur.

PROBLEMA 51.

576. Definire conditiones axium liberorum, qui dum corpora circa eos gyrantur, a nullis viribus sollicitata nullas vires sustineant.

SOLUTIO.

Quaestio haec ex probl. 7. §. 338. facile resolvetur. In genere enim si corpus circa axem quemcunque OA gyretur celeritate angulari $= \gamma$, ac pro elemento corporis quocunque dM in Z sito statuantur coordinatae orthogonales $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, quarum prima x in ipso axe gyrationis capiatur, vidimus axem ob hunc motum duas sustinere vires secundum Ee et Ff quae sint Fig. 32.

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y\,dM \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z\,dM$$

quae applicatae sint in punctis E et F ut sit

$$OE = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \text{ et } OF = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

Quare ut hic axis gyrationis OA sit liber, primo necesse est, ut ambae hae vires Ee et Ff seorsim evanescant, ideoque esse oportet tam $\int y\,dM = 0$, quam $\int z\,dM = 0$, unde patet, axem OA per corporis centrum inertiae I transire debere, quoniam posita corporis massa $= M$ est $\int y\,dM = M \cdot GK$ et $\int z\,dM = M \cdot KI$. Haec ergo est prima conditio axium gyrationis liberorum, ut per corporis centrum inertiae I transeant: verum etiamsi hae duae vires evanescant, tamen quia distantiae OE et OF fiunt infinitae, earum momenta ad axem circa punctum O vertendum prodeunt $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int xy\,dM$ et $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int xz\,dM$, quae nisi etiam evanescant, axis non sponte in quiete permanet. Quocirca ut axis gyrationis OA sit liber, non sufficit, ut is per corporis centrum inertiae I transeat, sed praeterea hac proprietate praeditus esse debet, ut pro eo fiat tam $\int xy\,dM = 0$ quam $\int xz\,dM = 0$. Quae cum sit proprietas axium principalium supra demonstrata, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima, manifestum est cujusque corporis axes principales, quos supra invenire docuimus, simul esse axes gyrationis liberos.

COROLL. 1.

577. In quolibet ergo corpore libero tres certe dantur axes gyrationis liberi, qui scilicet sunt ejus axes principales, circa quos ita libere gyrari possit, ut axes sponte in quiete perseverent.

COROLL. 2.

578. Si tria principalia momenta fuerint inter se inaequalia, tres tantum dantur axes gyrationis liberi; neque corpus circa ullum alium axem, etiamsi per centrum inertiae transeat, gyrari potest, quin viribus externis opus sit ad axem continendum.

COROLL. 3.

579. Sin autem momentum medium aequale sit vel maximo vel minimo, bini axes principales non determinantur, sed omnes ad tertium normales pari gaudent proprietate, ideoque etiam sunt axes gyrationis liberi.

COROLL. 4.

580. At si omnia tria momenta principalia fuerint inter se aequalia, uti fit in globo et cubo, omnes plane rectae per centrum inertiae transeuntes proprietatem axium principalium habebunt, corpusque circa eos libere gyrari poterit.

SCHOLION.

581. Quae ergo supra de axibus principalibus omnium corporum tradidimus, non solum in inventione momentorum inertiae maximum habent usum, sed etiam in praesenti investigatione totum negotium conficiunt, cum in quovis corpore axes principales iique soli sint axes gyrationis liberi, circa quos corpus ita gyrari possit, ut non opus sit vi externa ad eos in quiete retinendos. Quemadmodum ergo in quovis corpore rigido centrum inertiae est punctum maxime memorabile, cujus ratio per universam Mechanicam latissime patet, ita axes principales, qui simul sunt axes gyrationis liberi, in quovis corpore non minus sunt notatu digni, cum iis universa doctrina de motu corporum libero innitatur. Inter proprietates ergo corporum mechanicas axes hi principales post centrum inertiae praecipuum locum obtinent, atque in quovis corpore, cujus motus examinandus suscipitur, in id potissimum erit incumbendum, ut ejus axes principales exquirantur. Triplex scilicet datur corporum cognitio, prima geome-

geometrica, qua ejus extensio mensuratur, secunda mechanica, qua ejus massa seu inertia spectatur, ac tertia physica, qua ejus reliquae qualitates expenduntur; cognitio igitur mechanica potissimum centro inertiae et axibus principalibus contineri est censenda.

PROBLEMA 52.

582. Dum corpus circa axem gyrationis liberum movetur, invenire, a quibusnam viribus corpus sollicitari debeat, ut nullus inde effectus in axem redundet, atque axis etiamnum sponte in quiete persistat.

SOLUTIO.

Quemcunque motum gyratorium corpus circa axem principalem seu liberum acceperit, modo vidimus, hunc motum perpetuo conservatum iri, axemque sponte in quiete esse perseveraturum, cum vires ex motu natae se mutuo perfecte destruant. Nunc igitur videamus, quomodo vires sollicitantes comparatae esse debeant, ut ab iis etiam axis non afficiatur, id quod ex probl. 17. facile perspicere licet. Primo autem manifesto excluduntur vires obliquae, unde per resolutionem nascerentur vires axi parallelae, quippe quae a viribus elementaribus tolli non possent. Relinquuntur ergo vires, quae in planis ad axem normalibus sunt directae; ab hujusmodi autem viribus axem ita affici ostendimus, ut primo easdem vires in plano quamque suo ad axem translatas sustineat, tum vero insuper vires elementaribus contrarias pariter ad axem translatas. Cum autem ob axem principalem sit $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$, $\int (a-x)ydM = 0$ et $\int (a-x)zdM = 0$, vires ex elementaribus natae, quae in probl. 17. punctis O et A sunt applicatae evanescunt: ideoque axis tantum ipsas vires sollicitantes ad axem translatas sustinebit. Quare vires sollicitantes ita debent esse comparatae, ut si singulae in planis ad axem normalibus secundum suas directiones ipsi axi applicentur, se mutuo destruant. Binae igitur quaeque vires aequales et contrariae corpori in eodem plano ad axem normali applicatae hoc praestabunt, ut axis ab iis nullam plane vim sentiat. Scilicet si IA fuerit axis gyrationis liber, atque ad eum in puncto quovis L concipiatur planum normale, in quo agant duae vires Nn et Mm aequales et contrariae, ab iis quidem motus gyratorius, quatenus in diversis ab axe distantiis sunt applicatae, mutabitur, sed axis nihilominus sponte in quiete persistet. Consequenter quotcunque hujusmodi binarum virium paria corpori fuerint applicata, axis ab illis nullo modo afficietur. Tab. X. Fig. 74.

COROLL. 1.

583. Proposita ergo quacunque vi Nn, cujus directio sit in plano ad axem normali, quod axem in puncto L secet, si praeterea axi in ipso puncto L vis aequalis et contraria Ll applicetur, ab his duabus viribus axis nullam vim sustinebit.

COROLL. 2.

584. Quodsi igitur corpus a binis hujusmodi viribus Nn et Ll sollicitetur, axis manet immotus, et solus motus gyratorius perturbabitur ab earum momentis. Cum autem vis Ll nullum habeat momentum, mutatio motus ex momento solius vis Nn erit definienda.

COROLL. 3.

585. Quare si celeritas angularis fuerit $= \varepsilon$, momentum vis Nn $= Vf$, et corporis momentum inertiae respectu axis IA $= Mkk$, erit $d\varepsilon = \pm \frac{2Vfgdt}{Mkk}$ pro elemento temporis dt: ubi ambiguitas signi vel accelerationem vel retardationem indicat.

SCHOLION.

586. Quando ergo corpus rigidum circa quempiam axium suorum principalium gyratur, simulque a quotcunque hujusmodi viribus sollicitatur, quarum singulae sibi pares et contrarias ipsi axi applicatas habeant quasi comites, motus continuationem assignare valemus, quoniam axis sponte manet in quiete, motusque aeque immutatur, ac si axis firmiter retineretur, quem casum jam supra evolvimus. Verum haec determinatio adstricta est ad istam virium sollicitantium rationem, minimeque adhuc patet, cujusmodi effectum aliae vires essent producturae: hoc quidem saltem intelligitur, axem non in quiete esse permansurum, utrum vero motum simplice progressivum sit nacturus, an se inclinando sit processurus, nondum liquet. Interim tamen casus, quo axi motus progressivus imprimitur, ita hunc quo in quiete persistet simplicitate excipit, ut ejus evolutionem suscipere valeamus. Observandum enim est, si cum motu quocunque motus progressivus uniformis et rectilineus conjungatur, actionem virium minime perturbari, quod principium ad praesens institutum accommodemus.

THEOREMA. 4.

587. Quem motum gyratorium corpus rigidum circa axem quiescentem prosequitur, eundem motum circa hunc axem uniformiter in

in directum progredientem prosequi poterit, si quidem ab iisdem viribus sollicitetur.

DEMONSTRATIO.

Dum axis quiescit, et corpus quomodocunque circa eum gyratur, resolvantur singulorum elementorum motus secundum ternas directrices, quibus coordinatae x, y, z parallelae constituantur, eruntque posito temporis elemento $= dt$, celeritates hae laterales $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, atque $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$, $\frac{ddz}{dt}$ exhibent effectus virium corpus sollicitantium, quatenus iis singula elementa afficiuntur. Ponamus jam corpori insuper tribui motum progressivum, quo axis motu sibi parallelo uniformiter in directum proferatur celeritate $= c$ secundum eam directionem, cui coordinatae x capiuntur parallelae, ac jam singulorum corporis elementorum celeritates erunt $c + \frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, et $\frac{dz}{dt}$, quarum differentialia non discrepabunt a praecedentibus: ideoque motus gyratorius circa axem uniformiter in directum progredientem perinde se habebit, ac si axis quiesceret; viresque si quae affuerint, motum gyratorium aeque perturbabunt, sive axis quiescat, sive uniformiter in directum progrediatur.

COROLL. 1.

588. Si igitur corpori, dum circa axem principalem gyratur, motus progressivus tribuatur, neque ab ullis viribus sollicitetur, utrumque motum uniformiter continuabit.

COROLL. 2.

589. Ac si corpus interea ab ejusmodi viribus sollicitetur, quibus solus motus gyratorius mutetur, axis vero non afficiatur, etiam motus gyratorius mutationem patietur: motus progressivus autem manebit uniformis rectilineus.

COROLL. 3.

590. Sin autem corpus interea sollicitetur a vi, cujus directio transit per centrum inertiae, ab ea solus motus progressivus afficietur. Nam quia ab hac vi neque ullum momentum respectu axis gyrationis

nascitur, neque axis de situ suo sibi parallelo deturbatur, motus gyratorius nullam mutationem patitur.

SCHOLION.

591. Veritas hujus Theorematis etiam per ea, quae supra de motu absoluto et respectivo sunt exposita, quando corpus, ad quod motus refertur, uniformiter in directum progreditur, sufficienter stabilitur. Cum enim corpus, quod motum gyratorium circa quendam axem principalem acceperit, hunc motum perpetuo ita conservet, ut axis sponte maneat in quiete, idem eveniat necesse est, si corpus in spatio uniformiter in directum lato versetur, hujusque respectu ejus axis quiescat. Tum enim res eodem redit, ac si corpus absolute uniformiter in directum progrediatur, simulque circa axem principalem, qui perpetuo situm sibi parallelum servet, aequabiliter gyretur. Ex quo res ita concipi potest quasi in corpore duplex inesset motus, alter gyratorius, quo corpus circa quendam axem principalem gyratur, alter vero progressivus, quo axis cum corpore ita abripiatur, ut axis perpetuo situm sibi parallelum conservet. Atque hinc etiam intelligitur, a viribus supra definitis motum gyratorium perinde accelerari vel retardari oportere, ac si axis quiesceret, simulque vires, quae solum motum progressivum afficere sunt ostensae, nihil quicquam in motu gyratorio mutare, ita ut uterque motus seorsim, quasi solus adesset, considerari queat. Haec igitur, quibus tam insignis casus motus liberi corporum rigidorum continetur, omnino sunt digna, ut diligentius evolvantur.

DEFINITIO. 10.

592. *Motus mixtus ex progressivo et gyratorio* est, quo corpus partim circa quempiam axem principalem seu liberum gyratur, partim vero ita insuper movetur, ut ejus axis sibi semper maneat parallelus.

COROLL. 1.

593. Ad motum ergo talem mixtum cognoscendum, ad quodvis tempus nosse oportet, 1°. celeritatem angularem circa axem gyrationis, 2°. celeritatem qua axis motu progressivo promovetur, et 3°. directionem hujus motus progressivi, quomodo ad axem gyrationis sit inclinata.

COROLL. 2.

594. Celeritas porro angularis eodem modo aestimatur, ac si axis quiesceret: celeritas autem, ac directio motus progressivi ex motu axis gyrationis, vel ex motu centri inertiae judicari debet.

EXPLI-

EXPLICATIO.

595. Idea haec motus mixti ex ideis utriusque motus progressivi et gyratorii est conflata, unde fit, ut neutra in ea pure et perfecte contineatur. Cum enim motum progressivum ita definivimus, ut omnes rectae, quas in corpore concipere licet, sibi perpetuo maneant parallelae, haec proprietas in motu mixto minime valet, sed tantum ad axem gyrationis adstringitur: interim tamen evidens est, si motus gyratorius tolleretur, vel evanesceret, motum progressivum perfectum esse remansurum. Simili modo definitio motus gyratorii supra data ad axem fixum seu quiescentem erat adstricta, nunc autem ad axem motum extenditur, quae translatio per ideam spatii moti corroboratur, dummodo ut hic assumimus, axis sibi semper maneat parallelus. Quin etiam perspicuum est, si alter motus progressivus tolleretur vel evanesceret, motum gyratorium perfectum qualem supra descripsimus esse remansurum. Quo minus erit dubitandum, quin talis motus recte ex progressivo et gyratorio mixtus appelletur, quoniam alterutro sublato alter nomen suum jure sibi vendicat.

SCHOLION.

596. Circa talem motum mixtum variae quaestiones veniunt considerandae, quarum prima est, quomodo talis motus, si nullae vires accesserint, se sit habiturus, ubi quidem jam vidimus, utrumque aequabiliter esse perrecturum. Deinde viribus accedentibus quaestionem minime in genere tractare licet, ut variatio utriusque motus a viribus quibuscunque orta definiatur; sed ea tantum ad certa virium genera est restringenda. Cum scilicet certae sint vires, quae utrumque motum seorsim ita turbant, ut genus motus non mutetur, his conjungendis eas adipiscemur vires, quarum effectum in hujusmodi motibus mixtis definire valebimus. De reliquis autem cunctis viribus nihil aliud affirmare licebit, nisi quod axis gyrationis non sit situm sibi perpetuo parallelum conservaturus. Quamdiu enim axis sibi manet parallelus, motus semper erit mixtus ex progressivo et gyratorio, atque ad genus, quod hic tractamus, erit referendus: in quo eximium hujus motus criterium cernitur.

THEOREMA 5.

597. Si corpori rigido impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio, idque a nullis viribus porro sollicitetur, utrumque motum uniformiter continuabit, et progressivus erit rectilineus.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Veritas hujus Theorematis ex praecedentibus luculenter perſpicitur, cum uterque motus ſeorſim vi inertiae ſponte ſe conſervet, neque continuatio unius impediat continuationem alterius, quandoquidem ſi ſpatio motus aequalis et contrarius motui progreſſivo impreſſus concipiatur, motus progreſſivus tolleretur, et gyratorius uniformis eſſet manſurus, ſecundum ea, quae ſupra ſunt demonſtrata. Neceſſe autem eſt, quod probe notandum, ut axis gyrationis per centrum inertiae corporis tranſeat, ſimulque ſit unus ex ejus axibus principalibus. Niſi enim axis ita ſit comparatus, motus gyratorius mox in aliud motus genus tranſibit, de quo hic nihil adhuc definire licet.

COROLL. 1.

598. In hoc ergo motu mixto, quem corpus vi inertiae proſequitur, non ſolum centrum inertiae uniformiter in directum progredietur, ſed etiam axis gyrationis perpetuo eundem ſitum conſervabit, intereaque corpus circa eum uniformiter gyrari perget.

COROLL. 2.

599. Talis ergo motus cognoſcetur, ſi noverimus primo directionem et celeritatem centri inertiae, tum vero celeritatem angularem ejusque ſenſum ac denique poſitionem axis gyrationis.

COROLL. 3.

600. Quoniam in omni corpore tres dantur axes principales, atque in quibusdam adeo infiniti, qui ſimul ſunt axes gyrationis liberi, omnia corpora talis motus ſunt capacia idque infinitis modis.

SCHOLION.

Fig. 75. 601. Ad hujusmodi ergo motum calculo evolvendum ſit AB recta, in qua centrum inertiae I uniformiter progreditur, cujus celeritas ſit $= c$. Interea autem corpus circa axem principalem MIN gyretur, qui cum recta AB perpetuo eundem angulum AIM conſtituat, circa quem gyretur celeritate angulari $= \gamma$. Quod ſi jam initio centrum inertiae fuerit in A, et elapſo tempore t pervenerit in I, erit ſpatium motu progreſſivo percurſum $AI = ct$, et interea motu angulari corpus circa axem

axem MN descripserit angulum $= \gamma t$, necesse est. Ceterum compages corporis easdem vires sustinebit, ac si motus progressivus abesset. Quod denique ad motum cujuscunque puncti corporis attinet, is primo definiatur quasi motus progressivus abesset, tum cum eo conjungatur celeritas progressiva secundum praecepta resolutionis motus supra tradita, sicque habebitur verus ejus puncti motus.

PROBLEMA 53.

602. Si corpus rigidum motu feratur mixto ex progressivo et gyratorio, definire eas vires, quarum actione axis gyrationis de situ suo sibi parallelo non deflectatur, motusque ideo maneat mixtus ex progressivo et gyratorio.

SOLUTIO.

Primo perspicuum est, omnes vires, quarum directiones per centrum inertiae corporis transeunt, nihil in motu gyratorio efficere, sed tantum ad motum progressivum impendi, ita ut ab iis axis gyrationis non de situ suo deflectatur. Tales ergo vires ad id genus virium, quas quaerimus pertinent, tum vero etiam eo sunt referendae illae vires, quae solum motum gyratorium afficiunt, quas ita vidimus esse comparatas, ut si AB sit axis gyrationis, ad eumque in quovis puncto L constituatur planum normale, binae vires aequales et contrariae Nn et Ll in hoc plano applicatae hunc effectum praestent: atque harum virium altera Ll ipsi axi applicata concipi potest. Verum hujusmodi binis viribus aequivalent binae similes vires, in plano, quod axi normaliter in ipso centro inertiae I constituitur, applicatae, quae sint Kk et Ii, illis aequales et parallelae, sumto intervallo $IK = LN$; harum enim contrariae cum illis in aequilibrio consisterent. Sicque loco binarum quarumvis talium virium Nn et Ll semper substituere licet binas similes et aequales in plano per centrum inertiae I ad axem normaliter ducto applicatas. Quare si binas hujusmodi vires quascunque Kk et Ii cum viribus quibuscunque ipsi centro inertiae applicatis conjungamus, habebimus generatim id genus virium, quibus motus mixtus ita mutatur, ut axis gyrationis sibi maneat parallelus. Inter vires igitur centro inertiae I applicatas statuamus unam $I\eta$ ipsi Ii aequalem et contrariam, qua haec destruatur, ac jam vires quaesitae ita describi possunt, ut praeter vires centro inertiae I applicatas complectantur vires quascunque, quarum directiones sint in plano per centrum inertiae I ad axem normaliter ducto, et quotcunque hujusmodi vires corpori fuerint applicatae, motus ejus mixtus aliam inde mutationem non patitur, nisi qua axis situm sibi parallelum servet. Fig. 76.

COROLL. 1.

603. Hic ergo alias vires contemplari non licet, nisi quae vel ipsi centro inertiae sint applicatae, vel quarum directiones reperiantur in plano ad axem normali et per centrum inertiae ducto.

COROLL. 2.

604. Hujusmodi igitur viribus vel motus progressivus afficitur, vel gyratorius, vel uterque, sed tamen ita, ut axis gyrationis perpetuo situm sibi parallelum sit conservaturus.

SCHOLION.

605. En ergo vires, ad quas nostra praesens tractatio adstringitur, quarum effectum in motu corporis mixto mutando ex principiis adhuc stabilitis definire licebit: de aliis autem viribus quibuscunque, nisi forte per aequivalentiam ad tales reduci queant, certum est, ab iis axem gyrationis de situ suo deturbari, motumque ad aliud genus traduci, quod etiamnum evolvere non valemus. Cujusmodi autem effectum vires assignatae producant, tribus problematibus investigabimus, quorum primo in effectum earum virium inquiremus, quarum directiones per ipsum centrum inertiae corporis transeunt: in secundo alteram virium speciem contemplabimus, quarum directiones sitae sunt in plano, quod ad axem in ipso centro inertiae est normale. In tertio denique effectum a viribus utriusque speciei, simul sollicitantibus oriundum investigemus. Perpetuo autem corpori initio ejusmodi motum mixtum imprimi assumimus, ut gyratorius fiat circa axem principalem corporis.

PROBLEMA 54.

606. Si corpori rigido initio impressus fuerit motus quicunque mixtus ex progressivo et gyratorio circa axem principalem, idque deinceps sollicitetur a viribus quibuscunque, quarum media directio constanter per ejus centrum inertiae transeat, determinare corporis motum.

SOLUTIO.

Quia virium sollicitantium media directio perpetuo per ejus centrum inertiae transit, motus gyratorius nullam inde mutationem patietur, sed uniformiter peragi perget, quasi axis quiesceret, unde ad quodvis tempus facillime patebit, quantus angulus jam circa axem motu gyratorio fuerit descriptus. Tota ergo quaestio reducitur ad motum progressivum, qui

ex motu centri inertiae perfecte cognoscetur, corpus scilicet ita consideretur, quasi tota ejus massa in centro inertiae esset collecta, atque ex viribus quibus quovis temporis momento sollicitatur, ejus motus eodem modo definietur, quo motum punctorum liberum a viribus quibuscunque sollicitatorum determinare docuimus, ita ut superfluum foret haec fusius prosequi. Cum autem ad quodvis tempus locus centri inertiae fuerit definitus, etiam positio axis gyrationis et quanto angulo corpus circa eum jam se converterit, patebit.

COROLLARIUM.

607. Hic ergo utrumque motum ita seorsim considerare licet, quasi alter plane non adesset, dum motus gyratorius manet aequabilis, progressivus autem perinde turbatur, ac si tota corporis massa in centro inertiae collecta ab iisdem viribus urgeretur.

PROBLEMA. 55.

608. Si corpori rigido initio impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio circa axem principalem, idque sollicitetur a viribus, quarum media directio constanter in plano ad axem per centrum inertiae normaliter ducto reperiatur, determinare corporis motum.

SOLUTIO.

Quia axis sibi semper manet parallelus, elapso tempore t teneat situm AB, et ducto per centrum inertiae I plano ad axem normali, in hoc sit Kk media directio virium jam corpus sollicitantium, et vis illis aequivalens sit $Kk = V$: cui in I aequalis et contraria $Ii = V$ applicata concipiatur, quae autem a pari opposita $I\eta = V$ denuo destruatur, ita ut corpus jam ab his tribus viribus Kk, Ii et $I\eta$ sollicitetur. Nunc autem a binis viribus Kk et Ii solus motus gyratorius afficitur, cujus immutatio ita definitur: Ex centro inertiae I in directionem vis Kk demittatur perpediculum, quod sit $= f$, erit momentum hujus vis $= Vf$ ad motum sive accelerandum sive retardandum tendens: tum sit massa corporis $= M$ ejusque respectu axis AB momentum inertiae $= Mkk$ Quibus positis, si celeritas angularis circa axem AB jam fuerit $= g$, quae perinde aestimatur, ac si axis quiesceret, erit $dg = \pm \frac{2Vfgdt}{Mkk}$: unde ad quodvis tempus vera celeritas angularis g est petenda. Deinde vis $I\eta = V$ solum motum progressivum afficit, idque non aliter, ac si tota corporis massa M in ipso centro iner- Fig. 76.

 tiae

tio I eſſet collecta, ita ut corpus tanquam punctum I, quod jam a vi Ip = V ſollicitetur, conſiderare liceat: quae determinatio cum in praecedentibus ſatis ſit explicata, manifeſtum eſt, quomodo ad quodvis tempus tam motum progreſſivum, quam gyratorium aſſignari oporteat.

COROLL. 1.

609. Si motus progreſſivus initio fuerit nullus, centrum inertiae in ipſo plano ad axem normali moveri incipiet, et cum vires ſollicitantes perpetuo in eodem plano agant, totus centri inertiae motus in eodem plano abſolvetur, ad quod axis gyrationis ubique erit normalis.

COROLL. 2.

610. Idem evenit, ſi prima directio motus centri inertiae fuerit ad axem gyrationis normalis; tum enim conſtanter in plano ad axem gyrationis normali motum ſuum continuabit. Secus autem evenit, ſi prima motus progreſſivi directio cum axe gyrationis angulum fecerit obliquum.

COROLL. 3.

611. Motus ergo gyratorius ex momento vis ſollicitantis Kk quod eſt $= Vf$, motus autem progreſſivus ex ipſa hac vi $Kk = V$ ita definitur, quaſi haec vis in ſua directione ipſi centro inertiae applicata eſſet.

PROBLEMA. 56.

612. Si corpori rigido impreſſus fuerit motus mixtus ex progreſſivo et gyratorio circa quempiam axem principalem, idque deinceps ſollicitetur partim a viribus, quarum media directio per ipſum centrum inertiae tranſit, partim vero ab ejusmodi viribus, quarum directio media in plano per centrum inertiae normaliter ad axem tranſeunte verſatur; determinare motum corporis.

SOLUTIO.

Hujus problematis ſolutio ſponte ex praecedente fluit, dummodo inſuper ratio habeatur virium, quarum media directio per ipſum centrum inertiae tranſit, et quibus ſolum motum progreſſivum affici vidimus. Quare pro motu progreſſivo determinando praeter vires priores centro inertiae per ſe applicatas, eidem centro inſuper applicatae concipiantur omnes vires poſteriores ſingulae ſecundum ſuas directiones: tum ſi placet tota etiam corporis maſſa in eodem puncto collecta conſideretur, ut habeatur

casus

ejus puncti ſeu corpuſculi infinite parvi a viribus quibuscunque ſollicitati, quem per praecepta ſuperiora expedire licebit. Deinde pro motu gyratorio, omiſſis viribus per centrum inertiae tranſeuntibus, conſiderentur eae ſolae, quarum media directio eſt in plano per centrum inertiae ad axem normaliter ducto, atque ax ſingulis vel vi omnibus aequivalente colligetur momentum reſpectu axis gyrationis, quod ſi fuerit $= Vf$, mutatio motus gyratorii inde elicitur ut ſupra, cognito autem ſeorſim utroque motu univerſus corporis motus ſponte innoteſcit.

COROLL. 1.

613. Ad motum ergo progreſſivum definiendum, omnes vires, quibus corpus ſollicitatur, ſingulae in ſuis directionibus ad centrum inertiae transferri debent, per easque motus progreſſivus perinde determinabitur, ac ſi nullus motus gyratorius adeſſet.

COROLL. 2.

614. Ad motum autem gyratorium definiendum omnium virium ſollicitantium colligantur momenta reſpectu axis gyrationis; hincque motus gyratorius perinde determinabitur, ac ſi nullus adeſſet motus progreſſivus, ſeu axis gyrationis teneretur fixus.

SCHOLION.

615. Corollarium prius latiſſime patet, uti infra videbimus, quomodocunque etiam vires ſollicitantes fuerint applicatae: hic autem ſufficiat id ſaltem pro ejusmoei viribus, quales in problemate aſſumſimus, admiſiſſe: poſterius vero locum non habet, niſi virium, quae per ſe non tranſeunt per centrum inertiae, media directio ſita fuerit in plano ad axem normali et per centrum inertiae tranſeunte: alioquin enim axis ſibi non maneret parallelus. Longiſſime ergo adhuc diſtamus a problemate generali, quo corporis rigidi a viribus quibuscunque ſollicitati motus quaeritur: quo igitur continuo propius eo accedamus, corpus rigidum in quiete conſideremus, et dum a viribus quibuscunque ſollicitetur, primam motus generationem inveſtigemus. Quamvis enim ſtatim illud problema aggredi poſſemus tamen praeſtabit per gradus quaſi eo aſcendere, ut hoc modo clariorem omnium elementorum cognitionem conſequamur.

CAPUT IX.

DE PRIMA MOTUS GENERATIONE IN CORPORIBUS RIGIDIS.

THEOREMA 6.

616. Si cognitus fuerit effectus duarum virium junctim agentium in motu generando, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, alterius etiam seorsim agentis effectus innotescet.

DEMONSTRATIO.

A vi corpori in ipso centro inertiae applicata generatur motus progressivus purus, quo singula ejus elementa secundum directionem vis per aequalia spatiola promoventur, quae si vis sollicitans sit $= V$ et massa corporis $= M$, tempusculo dt sunt $= \frac{Vgdt^2}{M}$. Quodsi jam corpus praeter vim hanc V centro inertiae applicatam sollicitetur ab alia vi quacunque S, effectusque harum duarum virium simul agentium fuerit cognitus, res ita concipiatur, quasi corpus insuper a vi contraria ipsi V aequali et centro inertiae applicata sollicitaretur, qua prior effectus ita turbabitur, ut totum corpus motu progressivo secundum directionem hujus vis retro feratur per spatiolum $= \frac{Vgdt^2}{M}$, qui effectus cum illo conjunctus dabit effectum solius vis S corpus sollicitantis, qui propterea innotescet.

COROLL. 1.

617. Effectus nempe vis S aequalis est effectui a binis viribus V et S simul agentibus producto, demendo hunc effectum, quem sola vis V produceret: secundum ea quae supra de resolutione motus sunt praecepta.

COROLL. 2.

618. Si ergo a duabus viribus V et S simul urgentibus corpori imprimatur motus gyratorius circa quempiam axem, a vi sola S corpori imprimetur motus mixtus ex eodem gyratorio et progressivo, qui ipsi a vi ipsi V aequali et contraria induceretur.

SCHO-

SCHOLION.

619. Legibus justae methodi adversari videbitur, quod ex effectu duarum virium simul agentium in effectum unius vis inquirere conemur. Verum in probl. 18. ubi vires definivimus a quibus axis gyrationis non afficiatur, vidimus has vires rarissime ad unicam, semper autem ad duas reduci posse; quarum ergo effectus in corpus quiescens assignari poterit. Quare ut unius tantum vis effectum definire valeamus, efficiendum est ut illarum binarum virium altera per ipsum corporis centrum inertiae transeat, sicque hoc Theorema amplissimum nobis praestabit usum. Quo accedit, ut etiam vires quaecunque corpus sollicitantes ad duas hujusmodi vires reduci queant, quemadmodum jam docebimus.

THEOREMA 7.

620. Quotcunque fuerint vires corpus rigidum sollicitantes, et quomodocunque fuerint applicatae, eae semper ad duas reduci possunt, quarum altera per ipsum centrum inertiae corporis transeat.

DEMONSTRATIO.

Sit I centrum inertiae corporis, per quod pro lubitu ducatur recta quaecunque ID. Per directionem cujuslibet vis sollicitantis ducatur planum ad rectam ID normale, quod eam secet in puncto R: ac nisi directio hujus vis in isto plano sit sita, ea resolvatur in duas vires Ss et Sσ, quarum illa sit in plano ad ID normali, altera vero Sσ ipsi rectae ID sit parallela. Ad certum punctum fixum D statuatur planum ad rectam ID normale, ac ducta recta ISE loco vis Ss in punctis I et E substitui poterunt vires Ii et Ee ipsi parallelae, ut sit Fig. 77.

$$\text{vis } Ii = \text{vi } Ss \cdot \frac{DR}{ID} \quad \text{et vis } Ee = \text{vi } Ss \cdot \frac{IR}{ID}$$

simili modo loco vis Sσ substituantur vires Iη et Eε ipsi aequivalentes parallelae, ut sit

$$\text{vis } I\eta = \text{vi } S\sigma \cdot \frac{DR}{ID} \quad \text{et vis } E\varepsilon = \text{vi } S\sigma \cdot \frac{IR}{ID}.$$

Talis resolutio in omnibus viribus corpus sollicitantibus instituatur, atque ex singulis obtinebuntur binae vires ipsi centro inertiae I applicatae, tum vero etiam binae vires Ee et Eε illa in plano ad axem ID in D normali sita, haec vero ad istud planum normalis seu axi ID parallela. Omnibus viribus, quae centro inertiae I applicantur, in unam collectis, omnes vires Ee, quia in eodem sunt plano, pariter in unam colligi

Fig. 78. ligi poterunt, quae sit vis Mm: similique modo omnes vires Ee, quia sunt inter se parallelae, etiam in unam colligi possunt, quae sit vis Nn, axi ID itidem parallela, quemadmodum illa Mm in plano mMD ad axem normali versatur. Hoc modo loco omnium virium sollicitantium, quotcunque fuerint, nanciscimur tres vires, unam ipsi centro inertiae I applicatam et binas Mm et Nn, quae tres autem porro ad duas reducentur hoc modo: Producatur recta IN in Q donec ejus ab axe distantia QR aequalis fiat distantiae DM ex D per N ad occursum vis Mm usque ductae: eritque $ID : IR = DN : DM$. Tum loco vis Nn substituere licebit vires Ii et Qq ipsi parallelas, ut sit

$$\text{vis } Ii = \text{vi } Nn \cdot \frac{MN}{DM} \text{ et vis } Qq = \text{vi } Nn \cdot \frac{DN}{DM}.$$

Prior cum reliquis centro inertiae applicatis in unam coalescit, posterior vero Qq secundum suam directionem in ipso puncto M applicata concipi potest; sicque cum vi Mm pariter uniri potest, quae sit vis $M\mu$, ita ut nunc omnes vires sollicitantes reductae sint ad duas, alteram centro inertiae I applicatam, alteram vero istam vim $M\mu$.

COROLL. 1.

621. Quoniam tam axem ID quam in eo punctum D pro lubitu assumere licet, vires sollicitantes infinitis modis ad hujusmodi binas vires, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, reduci possunt.

COROLL. 2.

622. Facta autem una hujusmodi reductione, per eadem principia loco vis $M\mu$ duae aliae ipsi parallelae substitui possunt, quarum altera centrum inertiae I afficiat, altera vero in puncto quovis alio rectae IM sit applicata, unde patet omnes reductiones ad eandem rectam IM referri.

SCHOLION.

623. Theorema hoc maximi est momenti in argumento hujus capitis evolvendo, ubi propositum nobis est in primam motus generationem inquirere, quando corpus rigidum quiescens et liberum a viribus quibuscunque sollicitatur. Cum enim hae vires quotcunque etiam fuerint semper ad binas revocari queant, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, hujusque effectus sit determinatu facillimus, totum negotium eo redit, ut effectus ab unica quacunque vi productus definiatur; quod si minus successerit, cum ea vi alia quaecunque centro

inertiae

inertiae applicata combinari poterit, ac si effectus inde conjunctim productus assignari potuerit, totum negotium erit confectum. Primum ergo dispiciamus, quomodo duae hujusmodi vires comparatae esse debeant, ut ab iis corpori motus circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem imprimatur; hoc enim praestito facile erit institutum nostrum prosequi.

PROBLEMA. 57.

624. Definire duas vires corpori rigido applicandas, quarum alterius directio per centrum inertiae transeat, ut corpus ab iis sollicitatum circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem converti incipiat.

SOLUTIO.

Incidat centrum inertiae in punctum O, sitque OA axis, circa quem motus gyratorius generari debeat; ac necesse est, ut vires sollicitantes ita sint comparatae, ut axis ab illis nihil patiatur. Hoc ergo problema continetur in probl. 18 supra §. 390. soluto, ubi in scholio §. 394. vires generaliter exhibitas ita determinari oportet, ut pro termino O omnes vires ipsi puncto O sint applicatae. Ponantur ergo vires $Pp = 0$ et $Qq = 0$, unde ob $KI = 0$, aeque ac $OK = 0$, fiet vis $O\pi = \frac{\int xydM}{ab}$ et vis $O\varphi = \frac{\int xzdM}{ab}$. Deinde pro termino A sumantur vires $A\varrho = 0$ et $A\sigma = 0$, fientque vires $Rr = \frac{\int xydM}{ab}$ et $Ss = \frac{\int xzdM}{ab}$, ita ut sit vis $Rr =$ vi $O\pi$ et vis $Ss =$ vi $O\varphi$: tum vero requiritur, ut sit $AR\int xydM + AS\int xzdM = a\int rrdM$. Quoniam planum OAR ob centrum inertiae I in O positum pro lubitu assumi potest, id ita assumi poterit, ut fiat $\int xzdM = 0$, hincque duae tantum supersunt vires problemati satisfacientes, altera vis $O\pi = \frac{\int xydM}{ab}$ ipsi centro inertiae applicata, altera vis $Rr = \frac{\int xydM}{ab}$ in distantia ab axe $AR = \frac{a\int rrdM}{\int xydM}$, applicanda. Hinc solutionem problematis ita brevi complectemur: cum axe gyrationis proposito IA ejusmodi binae directrices IB et IC conjungantur, ut constitutis pro quovis corporis elemento dM coordinatis illis parallelis $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, positaque $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$, fiat $\int xzdM = 0$. Tum sumto intervallo pro lubitu $IA = a$, et ipsi IB paralle-

Fig. 43. Fig. 79.

rallela $AR = \frac{a\int rrdM}{\int xydM}$, quaecunque vis Rr ipsi IC parallela et in puncto R applicata effectum propositum producet, si modo insuper centro inertiae I vis illi aequalis et contraria $I\pi$ applicetur: et positis his viribus $Rr = I\pi = V$ cum momentum respectu axis IA inde natum sit $= \frac{Va\int rrdM}{\int xydM}$, tempusculo dt circa axem IA generabitur angulus $d\omega = \frac{Vagdt^2}{\int xydM}$.

COROLL. 1.

625. Cum intervallum $IA = a$, a quo distantia AR pendet, pro lubitu accipi possit, omnia puncta R reperiuntur in linea recta IR faciente cum axe IA angulum, cujus tangens $= \frac{\int rrdM}{\int xydM}$, dummodo planum AIB ita sit sumtum, ut fiat $\int xzdM = 0$.

COROLL. 2.

626. Ducta hac recta IR quaelibet vis huic rectae in quovis puncto applicata et ad planum AIB normalis, si in I vis illi aequalis et contraria $I\pi$ insuper applicetur, corpus circa axem IA converti incipiet.

COROLL. 3.

627. Proposita autem quacunque vi Rr, cui aequalis in I contrarie sit applicata, corpus circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem verti incipiet, de quo tantum patet, quod situs sit in plano, per centrum inertiae I ad directionem vis sollicitantis Rr normaliter ducto.

PROBLEMA 58.

628. Si corpus rigidum quiescens a vi quacunque sollicitetur, determinare primum initium motus, qui ab ea vi in corpore generabitur, circa axem in plano ad directionem vis normali situm, si quidem fieri queat.

SOLUTIO.

Fig. 80. Sit I centrum inertiae corporis, per quod ductum concipiatur planum ad directionem vis normale, quod ipso plano tabulae referatur, cui ergo vis sollicitans $Rr = V$ normaliter insistere est intelligenda, et recta

IR

IR ad eam sit normalis, quae ponatur IR $= h$. Applicetur corpori insuper in centro inertiae vis $I\pi$ illi aequalis et contraria, ita ut ex opposito in planum tabulae sit normalis. Ab his duabus viribus simul agentibus corpus circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem converti incipiet, atque ex §. praec. patet, hunc axem in plano tabulae fore situm, qui propterea sit IA, pro cujus positione quaeri debet angulus RIA $= \eta$; ita ut ducta ex R ad eum normalis RA sit RA $= h\,f\eta$ et IA $= \epsilon \operatorname{cos}\eta$. Quoniam autem positionem hujus axis nondum novimus, referamus singula corporis elementa ad ternas directrices IR, IP, IQ, quarum prima ex directione vis sollicitantis datur, altera IP in plano tabulae ad eam sit normalis, ac tertia IQ ipsi huic plano normaliter insistat. Sint ergo coordinatae secundum has ternas directrices $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Deinde ad coordinatas superioribus formulis consentaneas obtinendas, ex Y ad axem gyrationis IA ducatur normalis YX', sintque istae coordinatae:

$$IX' = x';\; X'Y = y' \text{ et } YZ = z' = z \text{ ut ante,}$$

quarum priores per praecedentes ita determinentur, ut sit

$$x' = x \operatorname{cos}\eta - y\, f\eta \text{ et } y' = x\, f\eta + y \operatorname{cos}\eta.$$

Ex his autem necesse est fiat $\int x'z\,dM = 0$, et tang AIR $=$ tang η $= \dfrac{\int rr\,dM}{\int x'y'\,dM}$ (625.) existente $rr = y'y' + zz$.

At vero erit

$$\int x'z\,dM = \operatorname{cos}\eta \int xz\,dM - \operatorname{fi}\eta \int yz\,dM$$

$$\int rr\,dM = f\eta^2 \int xx\,dM + 2\operatorname{fi}\eta \operatorname{cos}\eta \int xy\,dM + \operatorname{cos}\eta^2 \int yy\,dM + \int zz\,dM$$

$$\int x'y'\,dM = f\eta \operatorname{cos}\eta \int xx\,dM + (\operatorname{cos}\eta^2 - f\eta^2) \int xy\,dM - f\eta \operatorname{cos}\eta \int yy\,dM$$

Ponamus haec integralia per totum corpus extensa:

$$\int xx\,dM = A;\; \int yy\,dM = B;\; \int zz\,dM = C$$

$$\int xy\,dM = D;\; \int xz\,dM = E;\; \int yz\,dM = F$$

atque habebimus has aequationes:

$$E \operatorname{cos}\eta - F f\eta = 0 \text{ et}$$

$$A f\eta^2 + D(\operatorname{cos}\eta^2 - f\eta^2) \,.\, \text{tang}\,\eta - B f\eta^2 = A f\eta^2 + 2D f\eta \operatorname{cos}\eta + B \operatorname{cos}\eta^2 + C$$

seu D tang η + B + C = o: unde duplici modo nanciscimur:

$$\text{tang}\,\eta = \frac{E}{F} \text{ et tang}\,\eta = \frac{-B-C}{D}$$

qui bini valores nisi consentiant, problema sub conditione proposita, qua axis gyrationis in plano ad directionem vis normali assumitur, resolvi nequit.

 Pona-

Ponamus ergo vim ita esse applicatam, ut fiat $\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$, atque corpus gyrari incipiet circa axem IA in plano ad directionem vis normali situm, ut sit tang RIA $= \frac{E}{F} = \frac{-B-C}{D}$. Tum ob momentum vis $= Vh \int \eta$, et momentum inertiae respectu hujus axis $\int rrdM = A \int \eta^2 + B \cos \eta^2 + 2D \int \eta \cos \eta + C$, tempusculo dt vertetur per angulum $d\omega = \frac{Vghdt^2 \int \eta}{A \int \eta^2 + B \cos \eta^2 + 2D \int \eta \cos \eta + C}$. Qui cum sit effectus binarum virium Rr et $I\pi$ junctim agentium, ut prodeat effectus solius vis $Rr = V$, addatur insuper vis $Ip = V$, et corpori praeter motum gyratorium imprimetur motus progressivus purus secundum directionem IQ ipsi Rr parallelam, quo tempusculo dt conficietur spatiolum $= \frac{Vgdt^2}{M}$.

COROLL. 1.

629. Solutio ergo hujus problematis ad eos tantum casus extenditur, quibus vis sollicitans $Rr = V$ corpori ita est applicata, ut collectis formulis integralibus expositis fiat $\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$.

COROLL. 2.

630. Nisi autem haec proprietas locum habeat, solutio problematis adhuc latet: hocque tantum constat, gyrationem non fieri circa axem, qui situs sit in plano ad directionem vis sollicitantis normali.

SCHOLION.

631. Mirum utique videbitur, quod cum praeparatio ex viribus, quas axis supra sustinere inventus est, petita solutionem completam polliceri sit visa, nunc tamen infiniti casus excludantur, quos nostra solutio non complectatur. Cum enim certum sit, conversionem circa nullum alium axem fieri posse, nisi qui nullas plane vires sustineat, problema 18. perfectam solutionem suppeditare deberet, si quidem ipsum in omni extensione fuisset solutum. Verum probe notandum est, in hoc problemate nullas alias vires esse assumtas, nisi quarum directiones reperiantur in planis ad axem normalibus, cum tamen vires etiam obliquae induci potuissent, dummodo vires axi parallelae inde natae se destruerent. Atque hoc revera usu venit in casibus exclusis, ubi corpus initium gyrationis capere debet circa axem, qui est inclinatus ad planum per centrum inertiae

tiae ad vim sollicitantem normaliter ductum, quoniam tum ex resolutione vis Rr nascitur vis tali axi parallela: cujus utique ratio haberi debet, si hoc problema in genere resolvere velimus.

PROBLEMA. 59.

632. Si corpus rigidum quiescens a vi quacunque sollicitetur, eique simul in centro inertiae vis aequalis et contraria applicata fuerit, definire axem, circa quem primum gyrari incipiet.

SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, ac tabula referat ut ante planum per I ad directionem vis sollicitantis, quae sit $Rr = V$, normaliter ductum, in quo ponatur distantia $IR = h$. Tum sumto in hoc plano angulo $RIA = \eta$, ut ducto ex R in IA perpendiculo RA sit $IA = h \cos\eta$ et $RA = h \sin\eta$: ducatur in A ad planum normalis AD, sitque ducta ID angulus $AID = \vartheta$, ideoque $AD = h \cos\eta \tan\vartheta$ et $ID = \frac{h \cos\eta}{\cos\vartheta}$; quae linea ID sit axis gyrationis quaesitus ita, ut ambos angulos η et ϑ investigari oporteat. Corpus ergo exprimi debet per ternas coordinatas, quarum una in ipso axe ID capiatur. Dari igitur assumo relationem inter coordinatas $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, quarum prima in ipsa recta IR, secunda in plano ad vim normali, a tertia ipsi vi Rr parallela capiatur. Ex Y primo ad IA perpendicularis YX' ducatur, in plano autem ad tabulam normali AID perpendicularis $X'y$ ipsi YZ et yZ ipsi $X'Y$ parallela, erit ut ante vidimus: Fig. 80.

$$IX' = x \cos\eta - y \sin\eta;\quad X'y = YZ = z;\quad X'Y = yZ = x \sin\eta + y \cos\eta.$$

Tum in plano normali ex y ad ID ducatur perpendicularis yx, et habebuntur novae coordinatae, quales desideramus, quae sint $Ix = X$; $xy = Y$ et $yZ = Z$, atque ita per praecedentes determinantur.

$$X = x \cos\eta \cos\vartheta - y \sin\eta \cos\vartheta + z \sin\vartheta;\quad Y = z \cos\vartheta - x \cos\eta \sin\vartheta + y \sin\eta \sin\vartheta;\quad Z = x \sin\eta + y \cos\eta.$$

Hae jam coordinatae, plano IAD in planum tabulae projecto in fig. 81 repraesententur, ad quod jam $AR = h \sin\eta$ erit normalis, et vis Rr ipsi AD parallela: ducatur DV ipsi AR parallela, et vis in puncto V applicata concipiatur, ut sit vis $Vr = V$: ductisque Vv ipsi xy et Vu ipsi Ix parallela, ob angulum $rVv = \vartheta$; vis Vr resolvitur in binas has: vim $Vv = V \cos\vartheta$ et vim $Vu = V \sin\vartheta$, quae contrarie puncto I applicentur, quarum prior sit vis $Ii = V \cos\vartheta$, ad ID jam in plano tabulae norma-

 lis,

lis, altera vero axis secundum DI urgebitur. Momentum autem vis $Vv = V \cos\vartheta$ respectu axis ID est $= V \cos\vartheta . h \sin\eta = Vh \sin\eta \cos\vartheta$, et posito $YY + ZZ = RR$ momentum inertiae corporis respectu axis ID $= \int RR dM$, unde tempusculo dt conversio fiet per angulum $d\omega = \frac{Vghdt^2 \sin\eta \cos\vartheta}{\int RR dM}$. Cum axis nullas vires sentire debeat, vis $Vv = V \cos\vartheta$ ipsi axi in D applicetur, ut sit vis $Dd = V \cos\vartheta$, vis vero $Vu = V \sin\vartheta$ in sua directione perpendiculo $IT = DV = h \sin\eta$ applicata concipiatur, ex qua pro axe primo vis nascitur secundum ID urgens, quae superiorem illam destruit: tum vero posito intervallo $ID = \frac{h \cos\eta}{\cos\vartheta} = a$, inde oriuntur binae vires ad axem et planum tabulae normales $I\eta = D\delta = \frac{h \sin\eta}{a} V \sin\vartheta = V \tang\eta \sin\vartheta \cos\vartheta$. Praeterea vero habentur vires $Ii = Dd = V \cos\vartheta$, quae per vires elementares destrui debent. At ex probl. 16. vires elementares huc accommodatae praebent binas vires Pp et Qq in punctis P et Q applicandae, ut sit

$$IP = \frac{\int XZ dM}{\int Z dM}; \text{ vis } Pp = \frac{Vh \sin\eta \cos\vartheta . \int Z dM}{\int RR dM}.$$

$$IQ = \frac{\int XY dM}{\int Y dM}; \text{ vis } Qq = \frac{Vh \sin\eta \cos\vartheta . \int Y dM}{\int RR dM}.$$

Cum autem motus hic in contrarium sensum incipiat, atque ibi assumsimus, hae vires praecedentibus aequivalentes statui debent: et quia ob I centrum inertiae fit $\int Y dM = 0$, et $\int Z dM = 0$, omnia ad momenta revocantur, ut esse debeat $Pp . IP = Dd . ID$ et $Qq . IQ = D\delta . ID$ sicque habebimus has duas aequationes:

$$\frac{Vh \sin\eta \cos\vartheta \int XZ dM}{\int RR dM} = Vh \cos\eta \text{ et}$$

$$\frac{Vh \sin\eta \cos\vartheta \int XY dM}{\int RR dM} = Vh \sin\eta \sin\vartheta \text{ sive}$$

$$\sin\eta \cos\vartheta \int XZ dM = \cos\eta \int RR dM \text{ et } \cos\vartheta \int XY dM = \sin\vartheta \int RR dM.$$

Nunc igitur positis integralibus ex coordinatis principalibus x, y et z natis:

$$\int xx dM = A; \int yy dM = B; \int zz dM = C; \int xy dM = D; \int xz dM = E, \int yz dM = F$$

$= F$, ob $RR = YY + ZZ$ erit

$\int RR dM$

$$\int RR dM = A(\int\eta^2 + \cos\eta^2 \int\vartheta^2) + B(\cos\eta^2 + \int\eta^2\int\vartheta^2) + C\cos\vartheta^2$$
$$+ 2D\int\eta\cos\eta\cos\vartheta^2 - 2E\cos\eta\int\vartheta\cos\vartheta + 2F\int\eta\int\vartheta\cos\vartheta$$
$$\int XY dM = -A\cos\eta^2\int\vartheta\cos\vartheta - B\int\eta^2\int\vartheta\cos\vartheta + C\int\vartheta\cos\vartheta$$
$$+2D\int\eta\cos\eta\int\vartheta\cos\vartheta + E\cos\eta(\cos\vartheta^2 - \int\vartheta^2) - F\int\eta(\cos\vartheta^2 - \int\vartheta^2)$$
$$\int XZ dM = A\int\eta\cos\eta\cos\vartheta - B\int\eta\cos\eta\cos\vartheta + D\cos\vartheta(\cos\eta^2 - \int\eta^2)$$
$$+ E\int\eta\int\vartheta + F\cos\eta\int\vartheta$$

quibus valoribus substitutis binae aequationes inventae induent has formas:

$$\text{I.} -A\cos\eta\int\vartheta^2 - B\cos\eta - C\cos\eta\cos\vartheta^2 - D\int\eta\cos\vartheta^2 + E(1+\cos\eta^2)$$
$$\int\vartheta\cos\vartheta - F\int\eta\cos\eta\int\vartheta\cos\vartheta = 0$$
$$\text{II.} -A\sin\vartheta - B\sin\vartheta + E\cos\eta\cos\vartheta - F\int\eta\cos\vartheta = 0$$

quarum posterior praebet $\tang\vartheta = \frac{E\cos\eta - F\sin\eta}{A+B}$. At II. $\cos\eta\int\vartheta$ — I praebet

$$B\cos\eta\cos\vartheta^2 + C\cos\eta\cos\vartheta^2 + D\int\eta\cos\vartheta^2 - E\int\vartheta\cos\vartheta = 0,$$

unde colligitur $\tang\vartheta = \frac{(B+C)\cos\eta + D\int\eta}{E}$; hincque tandem $\tang\eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$: unde ambo anguli RIA $= \eta$ et AID $= \vartheta$ atque adeo axis gyrationis ID innotescit.

COROLL. 1.

633. Proposita ergo vi quacunque $Rr = V$, cui simul aequalis in ipso centro inertiae I contrarie sit applicata, si per I planum ad directionem vis normale ducatur PIR, atque ad id recta IQ perpendicularis, his ternis directricibus IR, IP, IQ pro quovis elemento corporis dM in Z sito parallelae capiantur coordinatae IX $= x$, XY $= y$, et YZ $= z$, hincque ex indole corporis colligi debet sequentes sex valores:

$$\int xx dM = A,\ \int yy dM = B,\ \int zz dM = C;\ \int xy dM = D;$$
$$\int xz dM = E;\ \int yz dM = F.$$

COROLL. 2.

634. His inventis in plano RIP ad directionem vis normali ex opposito coordinatarum XY $= y$ positivarum, seu in regione negativarum capiatur angulus RIA $= \eta$ ut sit $\tang\eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$, quo invento super illo plano in regione coordinatarum YZ $= z$ positivarum eriga-

erigatur angulus AID $= \vartheta$, ut sit $\tang \vartheta = \frac{E \cos \eta - F \sin \eta}{A + B}$ seu $\tang \vartheta = \frac{(B + C) \cos \eta + D \sin \eta}{E}$ eritque recta ID axis gyrationis.

COROLL. 3.

635. Posita distantia IR $= b$, erit respectu hujus axis ID momentum vis sollicitantis $= Vh \sin \eta \cos \vartheta$, et momentum inertiae $= \int RRdM$, quod etiam est $= \tang \eta \cos \vartheta \int XZdM = \cot \vartheta \int XYdM$, cujus valor ex praecedentibus facile eruitur: inde vero elemento temporis dt conversio fit per angulum $d\omega = \frac{Vghdt^2 \sin \eta \cos \vartheta}{\int RRdM}$.

SCHOLION.

636. En ergo problema nostrum generale, in quo summa hujus capitis versatur, perfecte solutum; unde quidem casus ante tractatus sponte fluit, quippe quo est angulus $\vartheta = 0$: nam tum fit ex formula priori $\tang \eta = \frac{E}{F}$ et ex posteriore $\tang \eta = \frac{-B - C}{D}$, qui valores nisi conveniant, casus ille locum habere nequit. Vicissim autem si fuerit $DE + (B + C) F = 0$, ob $B + C = \frac{-DE}{F}$, fit $\tang \eta = \frac{E}{F}$ et $\tang \vartheta = 0$. Ceterum hic observo, ex iis quae supra de axibus principalibus sunt tradita esse.

$$\int XYdM = \frac{-d. \int RRdM}{2d\vartheta} \text{ sumto tantum } \vartheta \text{ variabili, et}$$

$$\int XZdM = \frac{d. \int RRdM}{2d\eta \cos \vartheta} \text{ sumto tantum } \eta \text{ variabili.}$$

Quibus valoribus substitutis binae conditiones principales postulant

$$\frac{\sin \eta . d. \int RRdM}{2d\eta} = \cos \eta \int RRdM \text{ et } \frac{-\cos \vartheta . d. \int RRdM}{2d\vartheta} = \sin \vartheta . \int RRdM,$$

in quarum priore tantum η in posteriore tantum ϑ est variabile. Utriusque igitur idem est integrale $\int RRdM = \alpha \sin \eta^2 \cos \vartheta^2$, unde vicissim concludo, angulos η et ϑ ita definiri oportere, ut quantitas $\frac{\sin \eta^2 \cos \vartheta^2}{\int RRdM}$ fiat minimum, quoniam hinc eaedem binae aequationes resolvendae proveniunt.

veniunt. Eadem autem formula oritur, si $d\omega^2 \int RRdM$ seu $\int dM . RRd\omega^2$ reddatur minimum, in qua cum $Rd\omega$ denotet celeritatem elementi dM, ideoque $dM . RRd\omega^2$ ejus vim vivam uti vocatur, hinc colligimus istud insigne Theorema;

THEOREMA 8.

637. Si corpus rigidum quiescens sollicitetur a vi quacunque, eique insuper in centro inertiae applicata sit vis aequalis et contraria, ei circa ejusmodi axem per centrum inertiae transeuntem primo instanti motus gyratorius imprimetur, ut totum corpus inde minimam adipiscatur vim vivam, quae est aggregatum omnium elementorum per quadrata celeritatum suarum acquisitarum multiplicatorum.

DEMONSTRATIO.

Quicunque enim axis per centrum inertiae transiens accipiatur, ejus respectu vis proposita V certum obtinebit momentum quod si Vf, tum vero etiam corpus ejus respectu certum obtinebit momentum inertiae, quod sit $= \int RRdM$: utrumque a situ axis assumti pendens; hinc autem tempusculo dt generabitur circa hunc axem angulus $d\omega = \frac{Vfg\,dt^2}{\int RRdM}$ et celeritas angularis infinite parva $\varepsilon = \frac{2Vfg\,dt}{\int RRdM}$: unde elementi dM ab axe intervallo $=$ R distantis celeritas fit $= R\varepsilon$, ideoque vis viva $= R^2\varepsilon^2 dM$. Totius ergo corporis vis viva tempusculo infinite parvo dt acquisita erit $= \varepsilon\varepsilon \int R^2 dM = \frac{4VVffgg\,dt^2}{\int RRdM}$, quae ob Vg et dt constans erit minimum, si $\frac{ff}{\int RRdM}$ reddatur minimum, atque ex hac conditione positio axis determinetur. Hinc autem eadem axis determinatio resultat, quam ante invenimus: ita ut ex hoc principio minimi eadem solutio erui potuisset.

SCHOLION.

638. Quod ad usum solutionis ante inventae attinet, hoc adhuc nimis est molestum, quod pro unaquaque vi sollicitante indoles corporis ad peculiares coordinatas revocari debeat. Cui incommodo remedium affertur per ea quae supra de axibus principalibus cujusque corporis docuimus, quorum respectu si momenta inertiae semel fuerint inventa,

 facil-

facillime inde respectu omnium aliorum axium colligi possunt. Atque etiam pro praesenti instituto sufficit, relationem corporis ad coordinatas axibus principalibus parallelas nosse, quoniam et hinc relatio ad quasvis alias ternas coordinatas derivari potest. Quamobrem problema superius ita resolvam, ut vim sollicitantem respectu axium principalium dari assumam; ac solutionem ipsam ex principio jam stabilito, quod minima vis viva generetur, petam.

PROBLEMA. 60.

639. Datis corporis rigidi axibus principalibus eorumque respectu momentis inertiae, si id a vi quacunque sollicitetur, simulque ipsi in centro inertiae applicata sit alia vis illi aequalis et contraria, definire axem, circa quem corpus primum gyrari incipiet.

SOLUTIO.

Fig. 82. Sit I centrum inertiae corporis, et rectae IA, IB, IC ejus tres axes principales, quorum respectu momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc. Iam a quacunque vi corpus solicitetur, notetur ejus transitus per planum binis axibus principalibus interceptum AIB, qui sit in puncto V, ab I distante intervallo $IV = h$: existente angulo $AIV = \delta$ ipsa autem vis, quasi huic puncto esset applicata, resolvatur in ternas axibus parallelas quae sint vis $VP = P$, vis $VQ = Q$, et vis $VR = R$; quibus igitur aequales et contrariae in puncto I applicatae sunt intelligendae. Ab his ergo corpus circa quempiam axem per centrum inertiae I transeuntem verti incipiet, qui sit IF ad planum BIA inclinatus angulo $FIE = \vartheta$ existente angulo $AIE = \eta$, quos binos angulos investigari oportet. Iam primo respectu hujus axis IF quaeratur momentum inertiae, quod cum sit $\cos AIF = \cos\eta \cos\vartheta$, $\cos BIF = -\sin\eta \cos\vartheta$, $\cos CIF = \sin\vartheta$ erit per superiora

$$M(aa \cos\eta^2 \cos\vartheta^2 + bb \sin\eta^2 \cos\vartheta^2 + cc \sin\vartheta^2).$$

Deinde momenta virium P, Q, R respectu axis hujus IF sunt investiganda; ex antecedentibus autem patet, ducta VM ad IE normali ut $VM = h \sin(\delta + \eta)$, fore vis $VR = R$, momentum $= R . VM . \cos\vartheta = Rh \sin(\delta + \eta) \cos\vartheta$. Verum quo reliquarum virium momenta facilius inveniri queant, puncta V, A, B, C, E, F in superficie sphaerica considerentur cujus centrum sit in I. Erunt ergo arcus AB, AC et

Fig. 83. BC quadrantes, $AV = \delta$, $AE = \eta$, $EF = \vartheta$; et vires P, Q, R in V applicatae resolvantur in binas, quarum alterae sint in superficiem sphaericam

ricam normales, alterae superficiem sphaericam tangant, ubi priores per centrum transeuntes nulla praebent momenta, unde solas posteriores considerasse sufficit, quae erunt: vis sec. $VA = P \sin AV$; vis sec. $VB = Q \sin BV$ et vis sec. $VC = R \sin CV = R$ ob CV quadrantem. Hae vires porro resolvantur secundum directionem VF, et aliam ad eam normalem, ubi priores cum axe IF in eodem plano sitae nullum praebent momentum, alterae autem vires erunt

$$P \sin AV \sin AVF - Q \sin BV \sin BVF - R \sin CVF$$

quarum directio cum sit ad planum IFV normalis, erit etiam in plano ad axem IF normali, unde cum distantia ab axe sit $= h \sin FV$, ob $AV = \delta$, et $\sin BVF = \sin AVF$ erit momentum quaesitum $= h((P \sin\delta - Q \cos\delta) \sin AVF \sin FV - R \cos AVF . \sin FV)$ at $\sin AVF . \sin FV = \sin FE = \sin\vartheta$, sicque momentum habebitur

$$Ph \sin\delta \sin\vartheta - Qh \cos\delta \sin\vartheta - Rh \cos AVF . \sin FV$$

at ex sphaericis est $\cos AVF . \sin FV = \sin(\delta + \eta) \cos\vartheta$, ita ut momentum quaesitum sit $= Ph \sin\delta \sin\vartheta - Qh \cos\delta \sin\vartheta - Rh \sin(\delta + \eta) \cos\vartheta$, ex quo angulus tempusculo dt genitus fit

$$d\omega = \frac{ghdt^2 (P \sin\delta \sin\vartheta - Q \cos\delta \sin\delta - R \sin(\delta + \eta) \cos\vartheta)}{M(aa \cos\eta^2 \cos\vartheta^2 + bb \sin\eta^2 \cos\vartheta^2 + cc \sin\vartheta^2)}.$$

Quocirca minimum reddi debet haec expressio

$$\frac{((P \sin\delta - Q \cos\delta) \sin\vartheta - R \sin(\delta + \eta) \cos\vartheta)^2}{aa \cos\eta^2 \cos\vartheta^2 + bb \sin\eta^2 \cos\vartheta^2 + cc \sin\vartheta^2}$$

statuamus primo ϑ tantum variabile, et fiet:

$$2(aa \cos\eta^2 \cos\vartheta^2 + bb \sin\eta^2 \cos\vartheta^2 + cc \sin\vartheta^2)((P \sin\delta - Q \cos\delta) \cos\vartheta + R \sin(\delta + \eta) \sin\vartheta) =$$
$$2(-aa \cos\eta^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - bb \sin\eta^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + cc \sin\vartheta \cos\vartheta)((P \sin\delta - Q \cos\delta) \sin\vartheta - R \sin(\delta + \eta) \cos\delta)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(P \sin\delta - Q \cos\delta)(aa \cos\eta^2 + bb \sin\eta^2) \cos\vartheta + Rcc \sin(\delta + \eta) \sin\vartheta = 0$$

unde oritur $\tan\vartheta = \dfrac{(Q \cos\delta - P \sin\delta)(aa \cos\eta^2 + bb \sin\eta^2)}{Rcc \sin(\delta + \eta)}$.

Nunc sumto η variabili obtinebimus:

$$2(aa \cos\eta^2 \cos\vartheta^2 + bb \sin\eta^2 \cos\vartheta^2 + cc \sin\vartheta^2)(-R \cos(\delta + \eta) \cos\vartheta) =$$
$$2(-aa \sin\eta \cos\eta \cos\vartheta^2 + bb \sin\eta \cos\eta \cos\vartheta^2)((P \sin\delta - Q \cos\delta) \sin\vartheta - R \sin(\delta + \eta) \cos\vartheta)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$R \cos\vartheta (aa \cos\delta \cos\eta \cos\vartheta^2 - bb \sin\delta \sin\eta \cos\vartheta^2 + cc \cos(\delta + \eta) \sin\vartheta^2) =$$
$$(Q \cos\delta - P \sin\delta)(bb - aa) \sin\eta \cos\eta \sin\vartheta \cos\vartheta^2$$

ubi si loco $Q\cos\delta - P\sin\delta$ ponatur $\frac{Rcc\sin(\delta+\eta)\tan\vartheta}{aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2}$, facta reductione pervenitur ad hanc aequationem

$$\cos\vartheta^2(aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta)(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2) + cc\sin\vartheta^2 (aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta) = 0.$$

quae per $aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta$ divisa praebet

$$\cos\vartheta^2(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2) + cc\sin\vartheta^2 = 0$$

aequationem impossibilem ob omnes partes positivas. Quare divisore utentes nanciscimur determinationem anguli η scilicet $\tan\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$: ex quo porro colligitur $\tan\vartheta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aabb}{Rcc\sqrt{(a^4\cos\delta^2 + b^4\sin\delta^2)}}$ vel ne ambiguitas signi radicalis dubium relinquat.

$$\tan\vartheta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aa\cos\eta}{Rcc\sin\delta} = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)bb\sin\eta}{Rcc\cos\delta}.$$

Hoc jam axe invento si pro $Q\cos\delta - P\sin\delta$ valor superior substituatur, colligitur momentum virium sollicitantium respectu istius axis $= \frac{Rh\sin(\delta+\eta)(aa\cos\eta^2\cos\vartheta^2 + bb\sin\eta^2\cos\vartheta^2 + cc\sin\vartheta^2)}{(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2)\cos\vartheta}$ unde angulus elementaris $d\omega$ tempusculo dt circa axem genitus erit

$$d\omega = \frac{Rghdt^2\sin(\delta+\eta)}{M\cos\vartheta(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2)} = \frac{Rghdt^2\sqrt{(a^4\cos\delta^2 + b^4\sin\delta^2)}}{Maabb\cos\vartheta}$$

si in $\sin(\delta+\eta)$ loco anguli η valor repertus substituatur.

COROLL. 1.

Fig. 82. 640. Ex puncto ergo V, in quo directio vis sollicitantis planum AIB trajicit, statim invenitur in eodem plano recta IE cui axis gyrationis IF imminet: posito enim angulo AIV $= \delta$, erit tang AIE $= \tan\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$: neque a directione ipsius vis pendet.

COROLL. 2.

641. Quare si vis sollicitans per axem principalem IA transeat, angulus AIE fit rectus, axisque gyrationis IF erit in plano ad axem IA normali. At ob $\delta = 0$ et $\eta = 90°$ erit tang EIF $= \tan\vartheta = \frac{Qbb}{Rcc}$.

CO-

COROLL. 3.

642. Si momenta inertiae respectu axium IA et IB fuerint aequalia, erit $\tang \eta = \cot \delta = \tang (90° - \delta)$, ideoque angulus VIE rectus: hoc igitur casu axis gyrationis IF erit ad rectam IV normalis, et $aa = bb$ fiet $\tang \vartheta = \frac{(Q \cos \delta - P \sin \delta) aa}{Rcc}$.

COROLL. 4.

643. Si vis sollicitans, quae sit $= V$, et cujus directio planum AIB in puncto V trajicit, ex cujus resolutione nascuntur vires P, Q, R, sola in corpus agat, ea corpori motum assignatum circa axem inventum IF inducet, praeterea vero ipsi motum progressivum secundum suam directionem imprimet, qua tempusculo dt conficiet spatiolum $= \frac{Vg\,dt^2}{M}$.

SCHOLION.

644. In solutione hujus problematis jucundum sane erat perspicere, quomodo calculus, qui initio non parum intricatus videbatur, continuo ad majorem simplicitatem quasi sponte fuerit perductus, in quo eximium veritatis criterium cernitur. Plerumque enim talis calculi commoditas deprehenditur, dum in veritatis investigatione felici successu versamur, cum contra a veritatis tramite aberrantes in calculos inextricabiles illabi solemus. Ac principium quidem minimi, quo hic sum usus, elegantem suppeditavit solutionem, quae multo intricatior evasisset, si eam ut ante ex primis mechanicae principiis petere voluissemus Nunc ergo problema, quo praesens caput absolvitur, in genere pertractare licebit.

PROBLEMA. 61.

645. Si corpus rigidum quiescens a viribus quibuscunque sollicitetur, definire primum motum elementarem, qui in eo generabitur.

SOLUTIO.

Ex Theor. VII. omnes vires sollicitantes, quotcunque fuerint, reducantur ad binas, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, altera vero extra hoc centrum directa: harum prior sit $= S$ posterior $= V$.

= V. His duabus viribus inventis primo sola vis V consideretur, cui aequalis in ipso centro inertiae contrarie applicata concipiatur, ut centrum inertiae etiamnunc in quiete conservetur. Dispiciatur ergo, ubi directio illius vis V per planum aliquod intra binos axes principales corporis transeat, et ex probl. praeced. quaeratur tam axis gyrationis circa quem corpus primum converti incipiet, quam angulus infinite parvus primo tempusculo productus. Tum autem corpori insuper motus progressivus imprimetur, ad quem inveniendum vis illa altera V secundum suam directionem ipsam quoque centro inertiae applicata concipiatur, ita ut conjunctim cum vi priore S jam corpus sollicitet; et quia utraque centro inertiae est applicata, inde orietur motus progressivus purus, qui si cum gyratorio ante invento combinetur, habebitur totus effectus a viribus propositis productus.

COROLL. 1.

646. Si vis V evanescat, hoc est, si unica detur vis S centro inertiae applicata, quae omnibus viribus sollicitantibus aequivaleat, tum ut supra jam vidimus, corpori solus motus progressivus imprimitur.

COROLL. 2.

647. Sin autem vis S aequalis sit vi V sed directionem habeat oppositam, quod fit si vires sollicitantes ita fuerint comparatae, ut omnes quaeque in sua directione centro inertiae applicatae se mutuo destruerent, tum centrum inertiae in quiete perseverabit, solusque motus gyratorius generabitur.

COROLL. 3.

648. Reliquis casibus omnibus in corpore motus mixtus generabitur; alter progressivus, alter circa certum quendam axem per centrum inertiae transeuntem; quorum utrumque seorsim considerare ac determinare licet.

SCHOLION.

649. Idem effectus producetur ab his viribus sollicitantibus, etiam si corpus in motu versetur, verum ob hujus motus admixtionem difficilius cognosci poterit. Si enim corpus jam circa alium axem gyretur ac nunc incitatur, non solum celeritas angularis sed etiam ipse axis gyrationis mutabitur, ita ut nunc circa alium axem per centrum iner-

tiae

tiae transeuntem gyrari incipiat. Atque in hac axis variatione maxima motus perturbatio est sita, ad quam explicandam primo conveniet hujusmodi perturbationem momentaneam accurate determinari, quod argumentum in sequente capite evolvamus.

CAPUT X.

DE VARIATIONE MOMENTANEA AXIS GYRATIONIS A VIRIBUS PRODUCTA.

PROBLEMA. 62.

650. Si corpus rigidum, dum circa axem per centrum inertiae transeuntem gyratur, ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae ipsi si quiesceret, motum gyratorium circa alium axem essent impressurae, determinare motus mutationem tempusculo minimo productum.

SOLUTIO.

Cum tam in motu jam insito, quam in eo, qui a viribus imprimeretur, centrum inertiae quiescat, id etiam conjunctim in quiete perseverabit. Consideretur ergo centrum inertiae I tanquam centrum sphaerae, in cujus superficie sit O polus, et IO axis circa quem corpus jam gyretur celeritate angulari $= \varepsilon$: idque in eum sensum, quo punctum S feratur in s. Tum vero corpus ab ejusmodi viribus sollicitetur, ut si quiesceret, gyraretur circa polum S seu axem IS, tempusculoque dt verteretur per angulum $q dt^2$, quandoquidem vidimus hunc angulum quadrato tempusculi dt esse homogeneum, fiatque hac conversio in eum sensum, quo punctum O versus ω ferretur. Datur ergo angulus, quem hi duo axes OI et SI in I constituunt, seu in superficie sphaerica arcus circuli maximi OS, qui ponatur OS $= s$: ac tempusculo dt hic arcus OS, ob motum insitum, circa polum O gyrabitur per angulum SOs $= \varepsilon dt$ perventurus in situm Os, ut esset areulus Ss $= \varepsilon dt$ sin s. Ob motum autem impressum idem arcus OS circa polum S gyrabitur per angulum OSω $=$ Fig. 84.

$q dt^2$

qdt^2 perventurus in situm $S\omega$, ut esset arculus $O\omega = qdt^2 \sin s$. Utraque igitur hoc motu simul punctum S in s et punctum O in ω transferetur, quia neutra translatio alteram turbat: reliqua autem puncta omnia utrumque motum percipient. Scilicet punctum quodvis o in ipso arcu OS assumtum, ut sit $Oo = \omega$, ob motum insitum circa o transferetur in m, ut sit $om = \varepsilon dt \sin \omega$, at ob motum genitum circa S transferetur in μ ut sit $o\mu = qdt^2$, $\sin(1 - \omega)$. Prout jam fuerit vel $om > o\mu$ vel $o\mu > om$, punctum o ob utrumque motum conjunctim vel m versus vel μ versus per differentiam istorum arculorum feretur. Quare si fuerit $om = o\mu$, punctum o revera quiescet, eritque propterea polus circa quem corpus jam gyrari est censendum: ita ut ob vires sollicitantes axis gyrationis IO tempusculo dt in Io transferetur. Ad hanc igitur axis variationem momentaneam inveniendam ponamus $om = o\mu$, seu $\varepsilon dt \sin \omega = qdt^2 \sin(s - \omega)$ erit $\varepsilon \sin \omega = qdt \sin s \cos \omega - qdt \cos s \sin \omega$, unde evidens est arculum $Oo = \omega$ esse infinite parvum, ideoque $\sin \omega = \omega$ et $\cos \omega = 1$ hincque $\omega = \dfrac{qdt \sin s}{\varepsilon + qdt \cos s}$ $= \dfrac{qdt \sin s}{\varepsilon}$. Circa hunc autem axem Io corpus tanta celeritate angulari gyratur, qua tempusculo dt puncta O et S in ω et s transferantur, unde ea cognosci poterit. Cum enim ea tempusculo dt conficiatur angulus $= \dfrac{O\omega}{Oo} = \dfrac{qdt^2 \sin s}{\omega} = dt(\varepsilon + qdt \cos s)$ praecedente autem tempusculo ob similem vim, quippe quae nunc non subito exorta est putanda, angulus confectus censeri debeat $= dt(\varepsilon - qdt \cos s)$, ita ut differentia sit $2qdt \cos s$ ipsa celeritas angularis agmentum accepit $2qdt \cos s$ atque ob similem rationem quia valor q dum ad variationes continuas definiendas inducitur, duplicari debet, etiam spatiolum Oo duplo majus est censendum. Dum enim in calculo punctum O continuo progredi assumitur, hic autem in o quiescens assumatur, intervallum Oo hic inventum diversum est a spatiolo, per quod polus gyrationis profertur; concipiatur enim punctum o' ut sit $Oo' = 2Oo$, ac dico fore o' polum gyrationis post tempus dt, cum initio esset O. Hoc enim posito manifestum est interea punctum o manere immotum. Quare cum hic invenissemus $Oo = \dfrac{qdt \sin s}{\varepsilon}$, spatiolum O$o'$ per quod polus gyrationis transiisse est censendus erit duplo majus $= \dfrac{2qdt \sin s}{\varepsilon}$. Vires ergo, quae corpori si

quiesce-

quiesceret, imprimerent motum gyratorium circa axem IS in sensum $O\omega$ quo tempusculo dt absolveretur angulus $OS\omega = qdt^2$, motum corporis gyratorium jam insitum circa axem IO in sensum Sr celeritate angulari $= \varepsilon$ ita turbant, ut elapso tempusculo dt axis gyrationis sit recta Io, a praecedente IO versus IS vergens angulo $OIo = \frac{2qdt \sin s}{\varepsilon}$, simulque celeritas gyratoria ε augmentum capiat $= 2qdt \cos s$.

COROLL. 1.

651. Si vires sollicitantes in sensum oppositum tenderent; quantitas q negative accipi deberet, et punctum o in arcum SO ultra O productum caderet, celeritasque gyratoria minueretur.

COROLL. 2.

652. Si arcus OS vel evanesceret, vel semicirculo esset aequalis, axis gyrationis IO non mutaretur, sed totus effectus in priori motu gyratorio vel accelerando vel retardando consumeretur. Qui est casus jam supra pertractatus, ubi ostendimus incrementum vel decrementum celeritatis angularis esse $2qdt$.

COROLL. 3.

653. Si arcus OS est quadrans circuli, ideoque $\cos s = 0$, celeritas angularis ε nullam mutationem patietur, sed totus effectus virium in axe gyrationis mutando insumetur, eum vel propius ad S vel longius inde removendo.

SCHOLION 1.

654. Hic ejusmodi tantum vires sumus contemplati, quae corpori, si quiesceret, motum gyratorium simplicem imprimerent, centro inertiae manente immoto: cujusmodi effectum producunt vires quaecunque, si modo ipsis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur, quemadmodum in superiori capite fusius est ostensum. Neque vero pro aliis viribus indagatio erit difficilior, cum eae eundem motum gyratorium semper producant, ac si ipsis aequales et contrariae centro inertiae essent applicatae: motus enim progressivus, quem corpori praeterea inducunt, etiam hic nihil in motu gyratorio, qui corpori jam inest, esset mutaturus. Quin etiam si in corpore praeter motum gyratorium circa axem IO jam inesset motus progressivus, is nihil a gyratione circa axem IS genita mu-

 tare-

taretur: ex quo solutio hujus problematis latissime patet, atque etiam ad motum progressivum, quem corpus vel jam habet, vel a viribus sollicitantibus nancisceretur, extendi potest. Quae combinatio motus progressivi cum gyratorio, cum nihil habeat difficultatis, hic erat praecipuum opus, ut quantum motus gyratorius, ob alium motum gyratorium a viribus oriundum, perturbetur, sollicite definiremus.

SCHOLION 2.

655 Si axis IO, circa quem corpus jam gyrari assumitur, esset corporis axis principalis, corpus hunc motum, si a nullis viribus sollicitaretur, perpetuo esset conservaturum, uti in antecedentibus demonstravimus. Verum si axis IO non sit principalis, etiamsi nullae vires extrinsecus urgerent, tamen motus conservari non posset, quoniam ipse motus vires suppeditat, quae ad axem gyrationis deflectendum tendunt: hoc ergo casu, si quanta variatio in axe gyrationis gignatur, explorare velimus, non sufficit, vires extrinsecus in corpus agentes contemplari, sed cum iis etiam conjungi debent vires ex ipso motu gyratorio natae, quibus axem supra affici ostendimus. Quae vires cum pendeant a positione axis gyrationis IO respectu axium principalium corporis, haud abs re erit, antequam ulterius progrediamur, in genere investigare, quomodo a viribus quibusque positio axis gyrationis respectu axium principalium corporis immutetur.

PROBLEMA. 63.

656. Data positione axis gyrationis respectu trium axium principalium corporis, isque a viribus sollicitantibus varietur, ut corpus elapso tempusculo minimo circa alium axem gyretur, definire positionem hujus axis variati respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Fig. 85. Consideretur iterum superficies sphaerica, in cujus centro sit corporis centrum inertiae I, sintque nunc radii IA, IB, IC axes principales corporis, corpusque circa axem IO gyretur celeritate angulari g, cujus positio cum detur respectu axium principalium, ponatur arcus AO $= \alpha$, BO $= \beta$, et CO $= \gamma$, ut sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Tum vero ponantur anguli BAO $= \lambda$, CBO $= \mu$, et ACO $= \nu$, erit ob quadrantes AB, BC, et CA

$\cos\beta = \sin\alpha \cos\lambda$; $\cos\gamma = \sin\beta \cos\mu$; $\cos\alpha = \sin\gamma \cos\nu$, unde fit

cos

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}; \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}; \quad \cos\nu = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\sin\lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}; \quad \sin\mu = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}; \quad \sin\nu = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}, \text{ ergo}$$

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}; \quad \text{tang}\,\mu = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}; \quad \text{tang}\,\nu = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

ideoque $\text{tang}\,\lambda\ \text{tang}\,\mu\ \text{tang}\,\nu = 1$: quae eſt relatio inter ternos angulos λ, μ, ν, ex quibus arcus α, β, γ ita definiuntur, ut ſit:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{tang}\,\nu}{\cos\lambda} = \frac{\cot\mu}{\sin\lambda}; \quad \text{tang}\,\beta = \frac{\text{tang}\,\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cot\nu}{\sin\mu}; \quad \text{tang}\,\gamma = \frac{\text{tang}\,\mu}{\cos\nu} = \frac{\cot\lambda}{\sin\nu}.$$

His relationibus notatis ex datis $BAO = \lambda$ et $AO = \alpha$ reliqua ſic definiuntur, ut ſit

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\lambda; \quad \cos\gamma = \sin\alpha\sin\lambda; \quad \text{tang}\,\mu = \frac{\cot\alpha}{\sin\lambda}; \quad \text{tang}\,\nu = \text{tang}\,\alpha\cos\lambda.$$

Quodſi jam ob vires ſollicitantes tempuſculo dt axis gyrationis IO abeat in Io, totum corpus, quaſi interea circa axem Io eſſet gyratum, conſiderari poteſt, quo motu puncta A, B, C, ſuas diſtantias a puncto o conſervabunt; ita ut elapſo tempuſculo dt, polus gyrationis o a polis principalibus A, B, C, habiturus ſit diſtantias Ao, Bo, Co. Quare ſi detur angulus elementaris $OAo = d\lambda$, et $Ao = \alpha + d\alpha$, variatio reliquorum per differentiationem conſuetam elicietur:

$$d\beta = \frac{d\lambda\sin\alpha\sin\lambda - d\alpha\cos\alpha\cos\lambda}{\sin\beta}$$

$$d\gamma = \frac{-d\lambda\sin\alpha\cos\lambda - d\alpha\cos\alpha\sin\lambda}{\sin\gamma}$$

$$d\mu = \frac{-d\alpha\sin\lambda - d\lambda\sin\alpha\cos\alpha\cos\lambda}{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\sin\lambda^2}; \quad d\nu = \frac{d\alpha\cos\lambda - d\lambda\sin\alpha\cos\alpha\sin\lambda}{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\lambda^2}.$$

COROLL. 1.

657. Si ab his differentialibus ad integralia progredi liceret, in corpore ad quodvis tempus ille axis, circa quem tum ſit gyraturum, ejusque poſitio reſpectu axium principalium aſſignari poſſet.

COROLL. 2.

658. Hic scilicet non ad ipsum motum corporis respicimus, sed tantum id agitur, ut variatio momentanea axis gyrationis respectu axium principalium cognoscatur, ideoque ipsa celeritas gyratoria hic in computum non est ingressa.

COROLL. 3.

659. Cum in praecedente problemate arculus Oo sit determinatus, hic erit $Oo = \sqrt{(d\alpha^2 + d\lambda^2 \int \alpha^2)}$, tum vero pro positione hujus arculi Oo respectu arcus AO seu Ao est $\tang AoO = \frac{d\lambda \int \alpha}{d\alpha}$. Seu $\sin AoO = \frac{d\lambda \int \alpha}{Oo}$ et $\cos AoO = \frac{d\alpha}{Oo}$, ita ut hinc habeamus elementa: $d\alpha = Oo \cdot \cos AoO$ et $d\lambda = \frac{Oo \cdot \int AoO}{\int \alpha}$.

SCHOLION.

660. Cognitis ergo viribus, quibus corpus, dum circa quempiam axem gyratur, sollicitatur, per caput praecedens is axis, circa quem quiescens gyrari inciperet, definiri: tum vero ope praecedentis problematis variatio in axe gyrationis facta explorari poterit. Verum nisi corpus primo circa axem quempiam principalem gyretur, praeter vires externas, quibus corpus forte sollicitatur, imprimis eae vires, quae ex ipso motu gyratorio, ejusque vi centrifuga nascuntur, perpendi debent. Quas vires etiamsi supra jam in genere assignavimus, tamen easdem nunc denuo respectu axium principalium, quatenus axis gyrationis ab iis discrepat, determinari oportet: quibus cognitis, cum facile sit eas cum viribus externis conjungere, eas deinceps solas contemplemur, et quantum positio axis gyrationis iis turbetur, accurate investigemus.

PROBLEMA 64.

661. Si corpus rigidum gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem, cujus positio respectu axium principalium detur, invenire vires hinc ad axem gyrationis turbandum natas.

SOLUTIO.

Fig. 86. Existente I centro inertiae sint IA, IB, et IC ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb et Mcc. Gyretur autem

autem corpus circa axem IO, celeritate angulari $= \varepsilon$, ex cujus quovis puncto O demittatur ad planum AIB perpendiculum OL, ductaque recta IL vocentur anguli AIL $= m$ et LIO $= n$, ita ut pro situ hujus axis IO respectu axium principalium sit cof AIO $=$ cof m cof n; cof BIO $=$ $f m$ cof n et cof CIO $=$ fin n. Iam sumtis primo axibus principalibus pro directricibus iis parallelae constituantur ternae coordinatae IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$; et in Z sumto corporis elemento dM erit ex natura axium principalium $\int xyd\mathrm{M} = 0$; $\int xzd\mathrm{M} = 0$, et $\int yzd\mathrm{M} = 0$, tum vero $\int(yy+zz)d\mathrm{M} = \mathrm{M}aa$; $\int(xx+zz)d\mathrm{M} = \mathrm{M}bb$; et $\int(xx+yy)d\mathrm{M}$ $= \mathrm{M}cc$ ideoque:

$$\int xxd\mathrm{M} = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}(bb+cc-aa);\ \int yyd\mathrm{M} = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}(aa+cc-bb);$$
$$\int zzd\mathrm{M} = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}(aa+bb-cc).$$

Porro in plano AOB ducta IP ad IL, et in plano LOC recta IQ ad IO normali, ut rectae IO, IP et IQ sint inter se normales, quas tanquam directrices adhibeamus. Hunc in finem ducatur primo YS ipsi IP in plano AIB parallela, erit IS $= x$ cof $m + y f m$; et YS $= y$ cof $m - x f m$: atque ex Z ipsi YS agatur parallela Zy, quae erit in planum LIO normalis, et Z$y = y$ cof $m - x$ fin m, item S$y =$ YZ $= z$. Denique ex y ad IO demittatur perpendiculum yx, ut jam desideratae coordinatae sint Ix $=$ X, $xy =$ Y et yZ $=$ Z fietque

$$\mathrm{X} = \mathrm{IS}\,\mathrm{cof}\,n + \mathrm{S}y\,f n = x\,\mathrm{cof}\,m\,\mathrm{cof}\,n + y\,f m\,\mathrm{cof}\,n + z\,f n$$
$$\mathrm{Y} = y\mathrm{S}\,\mathrm{cof}\,n - \mathrm{IS}\,f n = z\,\mathrm{cof}\,n - x\,\mathrm{cof}\,m\,f n - y\,f m\,f n$$
$$\mathrm{Z} = y\,\mathrm{cof}\,m - x\,f m.$$

Cum jam elementum dM in Z ob celeritatem angularem $= \varepsilon$ exerat vim centrifugam $= \dfrac{\varepsilon\varepsilon . x\mathrm{Z}d\mathrm{M}}{2g}$, nascetur inde vis secundum $xy = \dfrac{\varepsilon\varepsilon\mathrm{Y}d\mathrm{M}}{2g}$ et vis secundum directionem ipsi yZ parallelam in x applicata $= \dfrac{\varepsilon\varepsilon\mathrm{Z}d\mathrm{M}}{2g}$, quae vires ipsae cum se mutuo destruant ob $\int \mathrm{Y}d\mathrm{M} = 0$ et $\int \mathrm{Z}d\mathrm{M} = 0$, earum momenta tantum erunt spectanda. Sumta ergo IO $= f$, dabitur in O vis Oq ipsi IQ parallela omnibus viribus yZ aequivalens, si modo his viribus aequales et contrariae ipsi centro inertiae I applicentur. Cum igitur ob momenta sit

$$\text{vis } \mathrm{O}q\,.\,\mathrm{IO} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g}\int \mathrm{XY}d\mathrm{M} \text{ et}$$

$$\text{vis } \mathrm{O}p\,.\,\mathrm{IO} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{2g}\int \mathrm{XZ}d\mathrm{M} \text{ erit}$$

 vis

$$\text{vis } Oq = \frac{gg}{2fg} \int XYdM \text{ et vis } Op = \frac{gg}{2fg} \int XZdM.$$

At regrediendo ad coordinatas principales est

$$\int XYdM = \sin n \cos n \left(\int zzdM - \cos m^2 \int xxdM - \sin m^2 \int yydM\right) \text{ et}$$

$$\int XZdM = \sin m \cos m \cos n \left(\int yydM - \int xxdM\right)$$

ideoque per momenta inertiae data

$$\int XYdM = M \sin n \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc) \text{ et}$$

$$\int XZdM = M \sin m \cos m \cos n (aa - bb).$$

Consequenter ex motu gyratorio nascuntur hae vires

$$\text{vis } Op = \frac{Mgg \sin m \cos m \cos n (aa - bb)}{2fg} \text{ et}$$

$$\text{vis } Oq = \frac{Mgg \sin n \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

puncto O secundum directiones rectis OP et OQ parallelas applicatae, quibus autem aequales et contrariae in ipso centro inertiae I applicatae sunt intelligendae.

COROLL. 1.

662. Cum vis Oq sit ad axem gyrationis IO in O normalis, ea producta plano AOB in puncto M occurret, quod in IL producta erit situm, eritque $IM = \frac{f}{\cos n}$ et $OM = f \tang n$ ob IOM angulum rectum.

COROLL. 2.

663. Directio autem alterius vis Op est ad planum LIO normalis utpote rectae IP in plano AIB ad IL normali parallela: atque planum pOq continuatum ad planum AIB inclinatur angulo $= 90° - n$, idque intersecat recta ad IM normali.

COROLL. 3.

664. Quoniam hae vires ex motu gyratorio ipso natae sibi aequales et contrarias in centro inertiae applicatas habent, eae solum motum gyratorium perturbabunt, neque corpori ullum motum progressivum inducent, ita ut centrum inertiae in quiete sit permansurum.

PROBLEMA 65.

665. Inventis viribus ex motu gyratorio ipso natis ad eum perturbandum, invenire axem, circa quem hae vires corpus, si esset in quiete, gyraturae essent.

SO-

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, ut in problemate praecedente, ita ut IA, IB, IC sint axes corporis principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, sit IO axis, circa quem jam corpus gyratur celeritate $= \gamma$, et pro ejus situ anguli $AIL = m$, et $LIO = n$, existente recta OL ad planum AOB normali, ut posita $IO = f$, sit $IL = f \cos n$ et $OL = f \sin n$. Tum vero ex O ad IO ducatur normalis OM, erit $IM = \frac{f}{\cos n}$ et $OM = f \tang n$, ducta autem ad IM in plano AIB normali MA, erit $IA = \frac{f}{\cos m \cos n}$ et $MA = \frac{f \tang m}{\cos n}$. Nunc autem in O habentur vires Op et Oq, quarum Op ipsi AM parallela et Oq cum OM in directum est sita; suntque hae vires: Fig. 87.

$$\text{vis } Op = \frac{M\gamma\gamma \sin m \cos m \cos n (aa - bb)}{2fg}$$

$$\text{vis } Oq = \frac{M\gamma\gamma \sin n \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

quarum media directio planum AIB alicubi in V in recta MA secabit, ut sit $MO : MV = Oq : Op$, unde colligitur $MV = \frac{f \sin m \cos m (aa - bb)}{\cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$; hincque $\tang MIV = \frac{\sin m \cos m (aa - bb)}{aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc}$: ex quo concluditur $\tang AIV = \frac{(bb - cc) \sin m}{(aa - cc) \cos m}$, quem angulum supra vocavimus δ, at distantia $IV = \frac{f \sqrt{(a^4 \cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2cc (aa \cos m^2 + bb \sin m^2))}}{\cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$ quam supra vocavimus $= h$, ut sit $h = \frac{f (bb - cc) \sin m}{\cos n \sin \delta (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$ seu $h = \frac{f (aa - cc) \cos m}{\cos n \cos \delta (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$. Nunc igitur in puncto V illas vires applicatas concipere licet, quae sunt

$$\text{vis sec. } VM = \frac{M\gamma\gamma \sin m \cos m \cos n (aa - bb)}{2fg}$$

$$\text{vis sec. } VT = \frac{M\gamma\gamma \sin n \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

quarum

quarum haec secundum VR ipsi LO et VN ipsi ML parallelam resoluta dat

$$\text{vim sec. VR} = \frac{Mgg\sin n \cos n^2 (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

$$\text{et vim sec. VN} = \frac{Mgg\sin n^2 \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

quarum illa VR supra littera R est indicata. At quod supra erat $Q\cos\delta - P\sin\delta$, qua expressione vis ad IV in plano AIB normalis denotatur, hic est vis VM cos MIV − vis VN sin MIV, unde prodit

$$Q\cos\delta - P\sin\delta \; \frac{Mgg\sin m \cos m \cos n^3 (aa - bb)(aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg\sqrt{(a^4 \cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2cc(aa\cos m^2 + bb \sin m^2))}}$$

Cum porro sit $\text{tang}\,\delta = \frac{(bb - cc)\sin m}{(aa - cc)\cos m}$ erit

$$\cos\delta = \frac{(aa - cc)\cos m}{\sqrt{(a^4 \cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2cc(aa \cos m^2 + bb \sin m^2))}}$$

His definitis sit jam IF axis ille, circa quem istae vires corpus, si quiesceret, essent gyraturae, ductoque ex F in planum AIB perpendiculo FE, vocentur anguli AIE $= \eta$ et EIF $= \vartheta$, ac per probl. 60. consequimur:

$$\text{tang}\,\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta} = \frac{aa(aa - cc)\cos m}{bb(bb - cc)\sin m}, \text{ et}$$

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{Q\cos\delta - P\sin\delta}{Rcc\cos\delta} \cdot bb\sin\eta = \frac{\sin m \cos n(aa - bb)bb\sin\eta}{cc(aa - cc)\sin n}.$$

Denique tempusculo dt circa hunc axem IF angulus $d\omega$ generabitur, ut sit:

$$d\omega = \frac{ggdt^2 \sin n \cos n \sqrt{(a^4(aa - cc)^2 \cos m^2 + b^4(bb - cc)^2 \sin m^2)}}{2aabb\cos\vartheta}$$

$$\text{seu } d\omega = \frac{gg(aa - cc)dt^2 \cos m \sin n \cos n}{2bb\sin\eta\cos\vartheta} = \frac{gg(bb - cc)dt^2 \sin m \sin n \cos n}{2aa\cos\eta\cos\vartheta}.$$

COROLL. 1.

666. Si pro axe gyrationis proposita IO ponantur anguli OIA $= \alpha$; OIB $= \beta$; OIC $= \gamma$; at pro axe gyrationis elementaris IF anguli FIA $= \mathfrak{A}$; FIB $= \mathfrak{B}$; FIC $= \mathfrak{C}$; erit

$\cos\alpha = \cos m \cos n$; $\cos\beta = \sin m \cos n$; $\cos\gamma = \sin n$, atque

$\cos\mathfrak{A} = \cos\eta\cos\vartheta$; $\cos\mathfrak{B} = -\sin\eta\cos\vartheta$; $\cos\mathfrak{C} = \sin\vartheta$.

CO-

COROLL. 2.

667. Deinde ob $\tang \eta = \frac{aa(aa - cc)\cos\alpha}{bb(bb - cc)\cos\beta}$, si ponatur brevitatis gratia $\surd(a^4(aa - cc)^2 \cos\alpha^2 + b^4(bb - cc)^2 \cos\beta^2) = W$ erit $\sin \eta = \frac{aa(aa - cc)\cos\alpha}{W}$ et $\cos \eta = \frac{bb(bb - cc)\cos\beta}{W}$. Porro autem posito

$$\surd(a^4b^4(aa - bb)^2 \cos\alpha^2 \cos\beta^2 + a^4c^4(aa - cc)^2 \cos\alpha^2 \cos\gamma^2 + b^4c^4(bb - cc)^2 \cos\beta^2 \cos\gamma^2) = \Omega$$

habebitur:

$$\cos\mathfrak{A} = \frac{bbcc(bb - cc)\cos\beta \cos\gamma}{\Omega}; \quad \cos\mathfrak{B} = \frac{aacc(cc - aa)\cos\alpha \cos\gamma}{\Omega}$$

$$\cos\mathfrak{C} = \frac{aabb(aa - bb)\cos\alpha \cos\beta}{\Omega} \text{ et } d\omega = \frac{gg\Omega dt^2}{2aabbcc}.$$

SCHOLION.

668. Quod ad sensum attinet, in quem gyratio circa axem IF fiet, quoniam angulus elementaris $d\omega = \frac{gg\Omega dt^2}{2aabbcc}$ semper est positivus, notandum est, in indagatione hujus valoris vim VR ut positivam esse spectatam, unde secundum figuram punctum E in sensum Ee versus A motu gyratorio feretur. Etsi enim haec ratio tantum in figura, ubi anguli m, n, η, ϑ sunt positivi et recto minores, locum habet, tamen hinc ratio sensus recte concludi potest; quo semel in calculum introducto deinceps generatim veritati inhaerebimus. Ceterum evidens est, si axis IO in quempiam principalium cadat, fore $d\omega = 0$; namque si $\alpha = 0$, fit $\beta = \gamma = 90°$, ideoque $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ quo casu utique quantitas Ω evanescit: simul vero perspicuum est, nullo alio casu hanc perturbationem $d\omega$ evanescere posse, ideoque plures tribus non dari axes gyrationis liberos, nisi forte duo momenta principalia fuerint aequalia.

PROBLEMA. 66.

669. Si corpus gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem, ab axibus principalibus diversum, definire variationem momentaneam, quam cum ipse axis gyrationis tum celeritas angularis patietur.

SOLUTIO.

Fig. 88. Transferantur omnia, quae in praecedente problemate sunt inventa ad superficiem sphaericam centro inertiae I descriptam, in qua A, B, C sint poli axium principalium, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Tum vero sit O polus axis illius, circa quem corpus jam gyratur celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC. Ex C per O ducto circulo maximo COM qui est quadrans, erunt arcus $AM = m$ et $MO = n$: tum in quadrante BA producto capiatur $AE = \eta$, et ducto quadrante CE arcus $ES = \vartheta$, ut sit $\tang \eta = \frac{aa(aa-cc)\cos m}{bb(bb-cc)\sin m}$ seu $\frac{bb \sin m \, \sin\eta}{aa-cc} = \frac{aa \cos m \cos \eta}{bb-cc}$ atque $\tang \vartheta = \frac{bb \sin m \sin \eta . (aa-bb)\cos n}{cc(aa-cc)\sin n}$ $= \frac{aa \cos m \cos \eta . (aa-bb)\cos n}{cc(bb-cc)\sin n}$. His ita definitis ob vires corporis centrifugas corpus conabitur circa polum S gyrari in sensum Ee, ita ut tempusculo dt descripturum esset angulum $d\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon(aa-cc)dt^2 \cos m \sin n \cos n}{2bb\sin\eta\cos\vartheta} =$ $\frac{\varepsilon\varepsilon(bb-cc)dt^2 \sin m \sin n \cos n}{2aa\cos\eta\cos\vartheta}$ seu $d\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon(aa-bb)dt^2 \sin m \cos m \cos n^2}{2cc\sin\vartheta}$.

Ducatur ergo arcus circuli maximi OS, qui sit $= s$, quem deinceps determinemus, atque in probl. 62. erit $q = \frac{\varepsilon\varepsilon(aa-bb)\sin m \cos m \cos n^2}{2cc\sin\vartheta}$, hincque ob motum gyratorium elementarem corpus gyrabitur circa polum o, ut sit arculus $Oo = \frac{\varepsilon(aa-bb)dt \sin m \cos m \cos n^2 \sin s}{cc\sin\vartheta}$: celeritas autem angularis ε augmentum accipiet $d\varepsilon$ ut sit $d\varepsilon =$ $\frac{\varepsilon\varepsilon(aa-bb)dt \sin m \cos m \cos n^2 \cos s}{cc\sin\vartheta}$. Nunc igitur primo quaeri debet positio arcus OS, seu angulus COS, quo ad arcum CO inclinatur: quem in finem consideretur triangulum OCS, in quo est $OC = 90° - n$; $CS = 90° - \vartheta$ et angulus $OCS = m + \eta$, unde reperitur:

$$\cot COS = \frac{\cos n \tang \vartheta}{\sin(m+\eta)} - \frac{\sin n \cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Est vero $\tang(m+\eta) = \frac{aa(aa-cc)\cos m^2 + bb(bb-cc)\sin m^2}{(aa-bb)(cc-aa-bb)\sin m \cos m}$, atque

cos$n$

$$\frac{\cos n \operatorname{tang} \vartheta}{\sin(m+\eta)} = \frac{aabb(aa-bb)\sin m \cos m \cos n^2}{cc\sin n(bb(bb-cc)\sin m^2 + aa(aa-cc)\cos m^2)}$$

unde fit

$$\operatorname{tang} COS = \frac{cc\sin n(aa(aa-cc)\cos m^2 + bb(bb-cc)\sin m^2)}{(aa-bb)\sin m \cos m(aabb\cos n^2 + cc(aa+bb)\sin n^2 - c^4\sin n^2}.$$

Porro ex eodem triangulo OCS colligitur,

$$\cos s = \cos(m+\eta)\cos n \cos\vartheta + \sin n \sin\vartheta = \sin\vartheta\left(\sin n + \frac{\cos n \cos(m+\eta)}{\operatorname{tang}\vartheta}\right)$$

seu $\cos s = \frac{\sin n \sin\vartheta(aabb - (aa+bb)cc + c^4)}{aabb} = \frac{(aa-cc)(bb-cc)\sin n \sin\vartheta}{aabb}$

unde fit $d g = \frac{gg(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\sin m \cos m \sin n \cos n^2}{aabbcc}.dt.$

Denique positis $OA = \alpha$; $OB = \beta$, $OC = \gamma$ erit arculus $Oo = \frac{gdt}{aabbcc}$

$$\surd\left(\begin{matrix}a^4b^4(aa-bb)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2 + a^4c^4(aa-cc)^2\cos\alpha^2\cos\gamma^2 + b^4c^4(bb-cc)^2\cos\beta^2\cos\gamma^2 \\ -(aa-bb)^2(aa-cc)^2(bb-cc)^2\cos\alpha^2\cos\beta^2\cos\gamma^2\end{matrix}\right)$$

et $d g = \frac{gg(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}.dt.$

Verum si ex o ad CO perpendiculum ducatur op, per regulas trigonometriae sphaericae, arculi elementares Op et op ita rationaliter exprimuntur ut sit:

$$Op = \frac{g(aa-bb)dt\cos\alpha\cos\beta(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}{aabbcc\sin\gamma}$$

$$op = \frac{gdt\cos\gamma(aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\beta^2)}{aabb\sin\gamma},$$

COROLL. 1.

670. Cum sit $d g = \frac{gg(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}.$ dt patet si trium momentorum principalium duo fuerint inter se aequalia, tum celeritatem angularem plane non immutari.

COROLL. 2.

671. Introductis distantiis α, β, γ poli O a polis principalibus A, B, C erit

$$\operatorname{tang} COS = \frac{cc \cos\gamma\,(aa\,(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb\,(bb-cc)\cos\beta^2)}{(aa-bb)\cos\alpha\cos\beta\,(aabb-(aa-cc)\,(bb-cc)\cos\gamma^2)}$$

ducto autem arcu AO erit $\operatorname{tang} AOC = \frac{-\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}$, unde concluditur

$$\operatorname{tang} AOS = \frac{aa\cos\alpha\,(bb\,(bb-aa)\cos\beta^2 + cc\,(cc-aa)\cos\gamma^2)}{(bb-cc)\cos\beta\cos\gamma\,((bb-aa)\,(cc-aa)\cos\alpha^2 - bbcc)}.$$

COROLL. 3.

672. Haec formula pro angulo AOS analoga est illi pro angulo COS, indeque oritur, si litterae a, b, c, item α, β, γ in ordine uno loco promoveantur: hoc autem modo signum prodiret negativum, id quod rei naturae est consentaneum, cum angulus AOS in sensum contrarium cadat respectu prioris.

COROLL. 4.

673. Si arcus OS quadrantem AC secet in puncto R colligitur:

$$\operatorname{tang} AR = \frac{aa\cos\alpha\,(bb\,(aa-bb)\cos\beta^2 + cc\,(aa-cc)\cos\gamma^2)}{cc\cos\gamma\,(aa\,(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb\,(bb-cc)\cos\beta^2)}$$

ac si idem arcus SO productus occurrat quadranti BA in Q erit per analogiam:

$$\operatorname{tang} BQ = \frac{bb\cos\beta\,(cc\,(bb-cc)\cos\gamma^2 + aa\,(bb-aa)\cos\alpha^2)}{aa\cos\alpha\,(bb\,(bb-aa)\cos\beta^2 + cc\,(cc-aa)\cos\gamma^2)}$$

$= \cot AQ.$

COROLL. 5.

674. Cum tempusculo dt arcus $CO = \gamma$ minuatur particula Op, erit per differentialia

$$aa\,bb\,cc\,d\gamma\,\sin\gamma = 8\,(bb-aa)\,dt\cos\alpha\cos\beta\,(aa\,bb-(aa-cc)\,(bb-cc)\cos\gamma^2)$$

hincque per analogiam:

$$aa\,bb\,cc\,d\beta\,\sin\beta = 8\,(aa-cc)\,dt\cos\gamma\cos\alpha\,(aa\,cc-(cc-bb)\,(aa-bb)\cos\beta^2)$$

$$aa\,bb\,cc\,d\alpha\,\sin\alpha = 8\,(cc-bb)\,dt\cos\beta\cos\gamma\,(bb\,cc-(bb-aa)\,(cc-aa)\cos\alpha^2).$$

SCHOLION.

675. Assumsimus in solutione, quod probe est notandum, corpus circa axem IO in sensum ABC gyrari, ad quem ergo casum formulae inven-

inventae sunt accommodatae: sin autem corpus gyraretur in sensum contrarium, formulae facillime eo referentur, statuendo celeritatem gyratoriam ε negativam. Atque sic problema hoc difficillimum, quo variatio momentanea quaeritur, dum corpus circa axem non-principalem gyretur, satis commode resolvimus, cum formulae postremae, ad quas tandem solutio est perducta, non adeo sint intricatae, ut simpliciores expectare licuisset. Neque etiam suspicio ullius erroris in calculo commissi locum habet, cum formula qua incrementum celeritatis angularis $d\varepsilon$ exprimitur, ad omnes tres axes principales aeque referatur, tum derivatio anguli AOS ex angulo COS rem firmissime evincit: ac tandem aequationes in postremo coroll. exhibitae hanc proprietatem habere deprehenduntur, ut sit $d\alpha \int \alpha \cos\alpha + d\zeta \int \zeta \cos\zeta + d\gamma \int \gamma \cos\gamma = 0$, uti conditio principalis $\cos\alpha^2 + \cos\zeta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ exigit. Ternae autem postremae aequationes, cum ea quae differentiale $d\varepsilon$ definit, plenam problematis solutionem continet, ubi quidem quaelibet trium illarum omitti potest. Si corpus insuper a viribus externis sollicitaretur, solutio non multo difficilior evaderet, quemadmodum in sequente problemate ostendetur.

PROBLEMA 67.

576. Si corpus rigidum, dum circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire variationem momentaneam tam in ipso axe quam in celeritate angulari inde ortam.

SOLUTIO.

Sit IO axis, circa quem corpus nunc gyretur celeritate angulari $= \varepsilon$, in sensum ABC, ac primo dispiciatur ejus situs respectu axium principalium IA, IB, IC, quorum respectu momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc, positisque arcubus $OA = \alpha$, $OB = \zeta$, $OC = \gamma$, per problema praecedens quaeratur, quantum tempusculo dt tum axis gyrationis IO, quam celeritas angularis ob solum motum gyratorium mutari debeat. Scilicet si polus gyrationis ex O abeat in o, vidimus fore incrementum distantiae $CO = \gamma$: Fig. 88.

$$Co - CO = \frac{\varepsilon(aa-bb)\,dt \cos\alpha \cos\zeta(aabb - (aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}{aabb\,cc \int \gamma}$$

atque incrementum anguli BCO

$$OCo = \frac{g\,dt \cos\gamma (aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\beta^2)}{aabb \sin\gamma^2}$$

quibus elementis situs puncti o sine ambiguitate definitur. Praeter hanc autem axis gyrationis mutationem celeritas angularis g capiet incrementum $= \frac{gg(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{aabbcc} dt$. Deinde perpendantur vires sollicitantes, utrum corpori motum progressivum imprimant: cujus rei facillimum est judicium, dum omnes vires secundum suas quasque directiones ipsi centro inertiae applicatae concipiantur: si enim se mutuo in aequilibrio teneant, corpori nullus motus progressivus imprimetur: sin autem detur vis illis aequivalens, ab hac motus progressivus in corpore generabitur, ex primis principiis facile definiendus. Tum isti vi aequivalenti aequalis et contraria ipsi centro inertiae applicetur, ut jam hoc centrum in quiete teneatur, atque hac vi cum iis, quibus corpus actu sollicitatur, conjuncta, omnes revocentur ad duas, quarum altera in centro inertiae altera in alio quodam puncto sit applicata, quae duae vires erunt aequales sed contrariae. Porro ex praecedente capite quaeratur axis circa quem corpus ab istis viribus converti incipiet simulque angulus conversionis momentaneae, unde per probl. 62. sine ullo respectu ad mutationem jam inventam habito, quoniam haec est infinite parva, quasi corpus adhuc circa axem Oo gyraretur, quaeratur variatio in axe et celeritate angulari inde orta, quarum illa ad incrementa vel decrementa tam in arcu CO quam in angulo BCO nata reducatur. Denique haec terna elementa cum iis, quae jam ante ex motu gyratorio sunt definita, conjungatur, sicque obtinebitur vera variatio tam in axe IO quam in celeritate angulari ab utraque causa simul producta.

SCHOLION.

677. Dum virium sollicitantium effectus exploratur, variatio axis inde orta eodem modo per angulum elementarem OCo et differentiam arcuum CO et Co exprimi potest, quo hic usi sumus. Scilicet quaeratur primo axis, circa quem corpus, si quiesceret, a viribus verteretur, qui sit IS, sitque qdt^2 angulus conversionis tempusculo dt productus circa S in sensum $O\omega$, ac pro puncto S ponatur arcus $AE = \eta$ et $ES = \vartheta$, qui valores a praecedentibus, ex ipso motu gyratorio ortis probe sunt distinguendi. Cum ergo sit $AM = ACM = m$, ut sit $\cos m = \frac{\cos\alpha}{\int\gamma}$, et

et $\sin m = \frac{\cos \zeta}{\sin \gamma}$, erit $MCE = m + \eta$, et ex triangulo OCS reperitur:

$$\cos OS = \cos s = \cos(m+\eta) \sin\gamma \cos\vartheta + \cos\gamma \sin\vartheta \text{ et}$$

$$\cot COS = \frac{\sin\gamma \tan\vartheta}{\sin(m+\eta)} - \frac{\cos\gamma \cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Nunc autem ex probl. 62. polus gyrationis O transfertur in o ut sit $Oo = \frac{2qd\zeta \sin s}{g}$ et incrementum celeritatis angularis

$$2qdt \cos s = 2qdt (\sin\gamma \cos\vartheta \cos(m+\eta) + \cos\gamma \sin\vartheta).$$

Deinde ex Oo elicitur

$$Op = Oo \cos COS = \frac{2qdt \sin s}{g} \cos COS \text{ et}$$

$$op = Oo \sin COS = \frac{2qdt \sin s}{g} \sin COS = \frac{2qdt}{g} \cos\vartheta \sin(m+\eta)$$

ideoque angulus $OCo = \frac{2qdt \cos\vartheta \sin(m+\eta)}{g \sin\gamma}$.

Hinc vero porro deducitur

$$CO - Co = Op = op \cot COS = \frac{2qdt}{g} (\sin\gamma \sin\vartheta - \cos\gamma \cos\vartheta (m+\eta)).$$

Tantum ergo superest, ut haec elementa cum illis, quae ex motu gyratorio sunt eruta combinentur, ut obtineatur axis gyrationis variatus cum incremento vel decremento celeritatis angularis.

PROBLEMA. 68.

678. Si ad aliquod tempus detur situs corporis rigidi circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transeuntem gyrantis, atque tam axis gyrationis quam celeritas angularis utcunque varietur, invenire mutationem momentaneam in corporis situ ortam.

SOLUTIO.

Cum centrum inertiae corporis quiescat, situs corporis referatur ad sphaeram fixam eodem centro descriptam, intra quam corpus motum suum absolvat. In hac sphaera capiatur circulus magnus VXZY in eoque punctum fixum Z: atque ad datum tempus $= t$ axes corporis principa- Tab. XII. Fig. 89.

cipales in superficie sphaerica respondeant punctis A, B, C, ut AB, BC, CA sint quadrantes: ad quorum situm symbolis repraesentandum sint arcus circulorum maximorum $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, erit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$: ac ponantur anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$, erit ex sphaericis

$$\cos(\mu - \lambda) = -\cot l \cot m;\ \cos(\nu - \mu) = -\cot m \cot n;\ \cos(\nu - \lambda) = -\cot l \cot n$$

ergo $\cos(\mu - \lambda)\cos(\nu - \lambda) = \cot l^2 \cot m \cot n = -\cot l^2 \cos(\nu - \mu)$, unde fit

$$\cot l^2 = \frac{-\cos(\mu - \lambda)\cos(\nu - \lambda)}{\cos(\nu - \mu)};\ \cot m^2 = \frac{-\cos(\lambda - \mu)\cos(\nu - \mu)}{\cos(\nu - \lambda)},$$

$$\cot n^2 = \frac{-\cos(\lambda - \nu)\cos(\mu - \nu)}{\cos(\mu - \lambda)}.$$

Cum vero sit $\cos(\nu - \mu) - \cos(\mu - \lambda)\cos(\nu - \lambda) = \sin(\mu - \lambda)\sin(\nu - \lambda)$ erit

$$\cos l^2 = -\cot(\mu - \lambda)\cot(\nu - \lambda);\ \cos m^2 = -\cot(\lambda - \mu)\cot(\nu - \mu);$$
$$\cos n^2 = -\cot(\lambda - \nu)\cot(\mu - \nu).$$

Hac relatione inter quantitates l, m, n, λ, μ, ν, quae tempusculo dt suis differentialibus crescere sunt censendae, notata, sit nunc O polus gyrationis arcusque $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$, ut sit:

$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$: erit $\cos BAO = \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, et $\sin BAO = \dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$, at in triangulo ZAB est $\cos ZAB = \dfrac{\cos m}{\sin l}$ et $\sin ZAB = -\cos ZAC = \dfrac{-\cos n}{\sin l}$, ita ut sit pro triangulo ZAO

$$\sin ZAO = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\sin l};\ \cos ZAO = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

unde colligitur $\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$,

$$\text{et } \cot AZO = \frac{\cos\alpha - \cos l(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)}{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n},$$

hincque ad quodvis tempus polus gyrationis O innotescit.

Deinde posito celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, tempusculo dt punctum A circa O describit arculum $A a = \varepsilon dt \sin\alpha$ quare ducta $a\alpha$ ad ZA normali erit

$$A\alpha = \varepsilon dt.\frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin l};\ a\alpha = \varepsilon dt.\frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin l}$$

unde differentialia quantitatum l et λ deducuntur,

dl sin *l*

$$dl \sin l = gdt(\cos\zeta \cos n - \cos\gamma \cos m), \text{ et}$$
$$-d\lambda \int l^2 = gdt(\cos\zeta \cos m + \cos\gamma \cos n)$$

similique modo reperietur:

$$dm \sin m = gdt(\cos\gamma \cos l - \cos\alpha \cos n); \; -d\mu \sin m^2 = gdt(\cos\gamma \cos n + \cos\alpha \cos l)$$
$$dn \sin n = gdt(\cos\alpha \cos m - \cos\zeta \cos l); \; -d\nu \int n^2 = gdt(\cos\alpha \cos l + \cos\zeta \cos m).$$

Quocirca si ad quodvis tempus t dentur quantitates α, ζ, γ, et g, ideoque earum differentialia tempusculo dt nata, hinc colliguntur variationes eodem tempusculo in arcubus l, m, n. et angulis λ, μ, ν productae: Praeterea vero variatio in polo gyrationis O facta facile concluditur, quia tantum opus est, ut arcus ZO et angulus AZO differentientur, ponendo solum arcus α, ζ, γ variabiles, quia hoc modo polus O in situm sequentem o transfertur. Erit ergo $(Zo - ZO)\sin ZO = d\alpha \int \alpha \cos l + d\zeta \int \zeta \cos m + d\gamma \int \gamma \cos n$ et cum sit

$$\cot AZO(\cos\gamma \cos m - \cos\zeta \cos n) = \cos\alpha - \cos l \cos ZO \text{ erit}$$
$$\frac{OZo}{\sin AZO^2}(\cos\gamma \cos m - \cos\zeta \cos n) + \cot AZO(d\gamma \int\gamma \cos m - d\zeta \int\zeta \cos n) = d\alpha \int\alpha \int l^2 - d\zeta \int\zeta \cos l \cos m - d\gamma \int\gamma \cos l \cos n$$

hincque reducendo: $\dfrac{OZo}{\int AZO^2} =$

$$\frac{\int l^2(d\alpha \int\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\zeta\cos n) + d\zeta \int\zeta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma \int\gamma(\cos\zeta\cos l - \cos\alpha\cos m))}{(\cos\gamma \cos m - \cos\zeta \cos n)^2}$$

ac denique angulus elementaris $OZo =$

$$\frac{d\alpha \int\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\zeta\cos n) + d\zeta \int\zeta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma \int\gamma(\cos\zeta\cos l - \cos\alpha\cos m)}{1 - (\cos\alpha \cos l + \cos\zeta \cos m + \cos\gamma \cos n)^2}$$

in quam formulam bis ternae litterae α, ζ, γ, et l, m, n aequaliter ingrediuntur, ut natura rei postulat.

COROLL. 1.

679. Si ex O in Zo arculus Op perpendiculariter ducatur erit

$$po = \frac{d\alpha \int\alpha \cos l + d\zeta \int\zeta \cos m + d\gamma \sin\gamma \cos n}{\sin ZO} \text{ et } Op =$$
$$\frac{d\alpha \int\alpha(\cos\gamma\cos m - \cos\zeta\cos n) + d\zeta \int\zeta(\cos\alpha\cos n - \cos\gamma\cos l) + d\gamma \int\gamma(\cos\zeta\cos l - \cos\alpha\cos m)}{\sin ZO}$$

COROLL. 2.

680. Porro ex $\sin BAO = \dfrac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$ et $\cos BAO = \dfrac{\cos\zeta}{\int\alpha}$ colligitur

 angu-

angulus $OAo = \frac{-d\alpha \cos\alpha \cos\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{\sin\alpha \cos\zeta}$ hincque elementum Oo $= \frac{\sqrt{((d\alpha^2 + d\gamma^2)\sin\alpha^2 \sin\gamma^2 + 2 d\alpha d\gamma \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma \cos\gamma)}}{\cos\zeta}$, quod cum aeque referatur ad α, ζ, γ ob $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\zeta \sin\zeta \cos\zeta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$ reducitur ad $Oo = \sqrt{(d\alpha^2 \sin\alpha^2 + d\zeta^2 \sin\zeta^2 + d\gamma^2 \sin\gamma^2)}$.

COROLL. 3.

681. Ponamus $ZO = v$ et cum sit $\cos v = \cos\alpha \cos l + \cos\zeta \cos m + \cos\gamma \cos n$ erit $\operatorname{tang} AZO = \frac{\cos\gamma \cos m - \cos\zeta \cos n}{\cos\alpha - \cos l \cos v}$, et ob analogiam, quia B ad alteram partem ipsius ZO in figura cadit $-\operatorname{tang} BZO = \frac{\cos\alpha \cos n - \cos\gamma \cos l}{\cos\zeta - \cos m \cos v}$ unde fit $\operatorname{tang} AZB = \operatorname{tang}(\mu - \lambda) = \frac{\cos n}{\cos l \cos m}$; qui valor cum supra invento $\cos(\lambda - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m}$ egregie conspirat, eritque $\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$.

COROLL. 4.

682. Hinc ergo pro differentiis ternorum angulorum λ, μ, ν, has adipiscimur determinationes.

$$\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m};\ \sin(\nu - \mu) = \frac{-\cos l}{\sin m \sin n};\ \sin(\lambda - \nu) = \frac{-\cos m}{\sin l \sin n}$$

$$\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m};\ \cos(\nu - \mu) = \frac{-\cos m \cos n}{\sin m \sin n};\ \cos(\lambda - \nu) = \frac{-\cos l \cos n}{\sin l \sin n}.$$

SCHOLION.

683. Quae hactenus de mutatione momentanea, quam motus gyratorius tam per se quam ob vires sollicitantes subit exposuimus, fundamentum constituunt universae Theoriae de motu corporum rigidorum, quandoquidem ex cognita mutatione elementari ad ipsam motus determinationem transitus per calculum integralem patet. Aggrediamur ergo motum liberum hujusmodi corporum, quo sive proprio quasi instinctui sive viribus

viribus sollicitantibus libere obsequi possunt, ac primo quidem vires sollicitantes externas removeamus, corpora sibi tantum relicta contemplaturi, ut extrinsecus nihil accedat, quod ad motum quicquam conferat. Quoniam autem indoles axium principalium, quibus corpus est praeditum, hic imprimis in computum ingreditur, inde naturale quasi discrimen in corporibus constitui conveniet, prout momenta inertiae eorum respectu fuerint comparata. Tres igitur corporum classes constituamus, ad quarum primam ea referamus corpora, quorum momenta respectu axium principalium sint inter se aequalia; ad secundum vero classem ea corpora, in quibus duo momenta respectu axium principalium sint aequalia, tertium vero illis inaequale. Tertia vero classis in genere omnia ea corpora complectatur, quorum momenta respectu axium principalium inter se sint inaequalia.

CAPUT XI.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM TERNIS AXIBUS PRINCIPALIBUS PARIBUS PRAEDITORUM ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

DEFINITIO. 11.

684. Corpus rigidum *tres axes principales pares* habere dicitur, quando ejus momenta inertiae respectu axium principalium inter se sunt aequalia.

COROLL. 1.

685. In talibus ergo corporibus omnes rectae per ejus centrum inertiae ductae vicem axium principalium gerunt, eorumque respectu momenta inertiae inter se erunt aequalia.

COROLL. 2.

686. Quaecunque igitur ternae rectae se mutuo in centro inertiae normaliter secantes pro directricibus assumantur, si situs cujusvis corporis elementi dM per coordinatas illis parallelas x, y, et z definiatur, erit per totum corpus $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$ et $\int yzdM = 0$.

COROLL. 3.

687. Quodsi tale corpus circa rectam quamvis per centrum inertiae transeuntem acceperit motum gyratorium, eum ob suam inertiam perpetuo conservabit, ut ea recta maneat immota; nisi a viribus externis perturbetur.

SCHOLION 1.

688. Dari hujusmodi corpora, quorum momenta respectu axium principalium sint inter se aequalia, eo minus dubitare licet, cum in superioribus, ubi corpora homogenea sumus contemplati, plures corporum species hac proprietate gaudentes assignaverimus. Inter quas primum locum tenet globus ex materia homogenea confectus, tum vero eo referenda sunt corpora quinque regularia; porro etiam dantur cylindri, coni et coni truncati, qui eadem proprietate sunt praediti. Atque in genere si corpora non constent ex materia homogenea, innumerabilia exhiberi poterunt genera cujusvis figurae, in quibus aequalitas inter momenta inertiae respectu axium principalium locum obtineat. Atque de hujusmodi corporibus tantum in hoc capite agetur, motusque, cujus sunt capacia dum a nullis viribus externis urgentur, definietur. Character ergo essentialis hujusmodi corporum in hoc consistit: ut positis ternis coordinatis orthogonalibus x, y, z ad centrum inertiae relatis primo sit ut jam notavimus $\int xydM = \int xzdM = \int yzdM = 0$ tum vero $\int xxdM = \int yydM = \int zzdM$. Sicque momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti erit $= 2\int xxdM$. Hoc criterio quasi primum corporum genus constituitur, atque in cognitione mechanica nomine *corporum regularium* commode insigniri posset, cum omnes planae rectae per centrum inertiae ductae pari proprietate sint praeditae.

SCHOLION 2.

689. Etsi in hoc capite tantum de motu corporum ternos axes principales pares habentium tanquam de casu simplicissimo tractare constitui; tamen a proprietate, quae etiam ad reliqua corporum genera pateat, exordiri conveniet. Scilicet quomodocunque corporis rigidi motus fuerit perturbatus, is semper pro quovis temporis puncto resolvi potest in binos motus, quorum alter sit progressivus alter gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae ductum. Quae propositio cum fundamentum motus omnium corporum rigidorum contineat, ejus demonstrationem in sequente Theoremate tradamus.

THEO-

THEOREMA 9.

690. Quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motus quovis momento est compositus seu mixtus ex motu progressivo et ex gyratorio, circa axem aliquem per ejus centrum inertiae transeuntem.

DEMONSTRATIO.

Si corporis centrum inertiae moveatur, in quo motus progressivus consistit; quippe qui perpetuo cum motu centri inertiae congruit, hunc mente saltem tollendo, dum spatium cum corpore pari celeritate in oppositum ferri concipiatur, de motu qui adhuc in corpore inest, demonstrandum est, eum esse gyratorium circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem, qui sublato motu progressivo quiescat saltem per tempus infinite parvum. Hoc autem modo centrum inertiae corporis in quietem redigitur, et quomodocunque corpus circa hoc centrum moveatur, praeter id semper quaepiam linea recta quiescet, quae propterea erit axis gyrationis, id quod sequenti modo ostendo. Circa corpus concipiatur superficies sphaerica centrum suum in ejus centro inertiae habens, quae ut quiescens consideretur, ad quam singula corporis puncta per rectas ex centro ad superficiem ductas referantur. Centro igitur quiescente punctum corporis ad P relatum tempusculo dt transferatur in p, ductoque per P circulo maximo OPB ad spatiolum Pp normali, in eo capiatur aliud quodvis punctum Q, quod interea transferatur in q, ita ut totus arcus interceptus PQ in pq pervenisse sit censendus, unde cum omnia corporis puncta perpetuo easdem inter se distantias servent, erit $pq = PQ$. Quia autem arculi Pp et Qq sunt infinite parvi, et angulus pPQ rectus arcus, illi aequales esse nequeunt, nisi etiam arculus qQ ad PQ sit normalis. Continuentur ambo arcus PQ et pq, donec sibi occurrant in O et cum sit $OP = Op$ et $OQ = Oq$, motu illo totus arcus OPQ in Opq erit translatus, ideoque punctum O in loco suo immotum perstiterit necesse est. Quare ducta ex centro per hoc punctum O recta, eam totam interea in quiete perseverasse manifestum est, quae igitur erit axis gyrationis. Ex quo perspicitur corpus circa centrum inertiae quiescens commoveri non posse, quin simul tota quaedam linea recta per id centrum ducta maneat immota, ideoque motum esse gyratorium. Sin autem centrum inertiae ipsum moveatur, universus corporis motus erit compositus seu mixtus ex motu progressivo et gyratorio circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transeuntem. Fig. 90.

COROLL. 1.

691. Quomodocunque ergo corpus rigidum moveatur, ad ejus motum cognoscendum, primo consideretur ejus centrum inertiae, cujus motus dabit motum progressivum, hoc deinde sublato quaeratur punctum O, unde axis gyrationis innotescet.

COROLL. 2.

692. Ad hoc autem punctum O inveniendum, posito arcu $OP = v$, ob angulum $O = \frac{Pp}{\sin v} = \frac{Qq}{\sin(v+PQ)}$, erit $Qq.\sin v = Pp.\cos PQ.\sin v + Pp\sin PQ.\cos v$, hincque, $\tang v = \frac{Pp.\sin PQ}{Qq - Pp.\cos PQ}$ unde patet punctum O semper realiter determinari.

COROLL. 3.

693. Ex motibus punctorum P et Q per spatiola Pp et Qq etiam facile definitur celeritas angularis circa axem gyrationis, quae est $= \frac{\text{ang}.O}{dt} = \frac{Pp}{dt.\sin v} = \frac{\sqrt{(Pp^2 - 2Pp.Qq.\cos PQ + Qq^2)}}{dt\sin PQ}$ ideoque nulla esse nequit, nisi ambo spatiola Pp et Qq evanescant.

SCHOLION.

694. Etsi haec demonstratio ex sphaericis maxime est evidens, tamen ejus vim eo magis perpendi convenit, quod non defuerint viri alioquin perspicacissimi, quibus adeo visum est fieri posse, ut omnia puncta superficiei sphaericae centro quiescente aequalibus celeritatibus circumferantur. Hoc scilicet obtineri posse sunt arbitrati, si sphaera dum circa unum quempiam axem gyratur, simul circa alium axem ad illum normalem pari velocitate circumagatur. Nunc autem hoc demonstratione allata evictum est, etiamsi sphaera non solum circa duos axes sed etiam tres pluresve simul circumagatur, ejus motum tamen semper ita fore comparatum, ut quovis momento tota quaedam recta in quiete permaneat. Nulla enim vis demonstrationi infertur, si quis objiciat puncta P et Q non simplici motu, ut hic assumsimus, sed composito circa aliquot axes simul ferri; quomodocunque hic motus fuerit compositus, tamen haec puncta, P et Q post tempusculum dt in alia certa puncta p et q perveniant necesse est, ut arcus pq aequalis sit arcui PQ, et quoniam arcum PQ ad spatiolum Pp normalem assumsimus, ita etiam ad Qq normalis esse debet. Ac si quis adhuc dubitet, num punctum O, in quo concursum arcuum PQ et

et pq productorum constituimus, in eodem loco permaneat, ei saltem concedendum est, id adhuc in circulo maximo Opq repertum iri, quoniam ante cum punctis P et Q in eodem circulo maximo erat situm: pervenerit ergo in o, et arcus op aequalis esse deberet arcui OP; verum arcus Op aequalis est arcui OP, ex quo punctum o in O cadat necesse est.

PROBLEMA. 69.

695. Dato motu duorum corporis rigidi punctorum, cujus centrum inertiae quiescit, invenire axem per centrum inertiae transeuntem, circa quem hoc instanti gyratur.

SOLUTIO.

Relatis ut ante, omnibus corporis punctis ad superficiem sphaericam quiescentem ABCD circa centrum inertiae descriptam, moveatur tempusculo dt punctum P per spatiolum $Pp = dp$, et aliud quodvis punctum R per spatiolum $Rr = dr$; ponaturque arcus circuli maximi $PR = q$. Vocentur anguli $RPp = m$ et $SRr = n$, inter quos autem jam certa quaedam relatio intercedere debet, ut arcus pr aequalis fiat arcui $PR = q$. Sit jam O polus gyrationis, indeque ad P et R ductis quasi meridianis OP et OR, erunt anguli $OPR = 90 + m$ et $ORP = 90° - n$, quoniam arcus OP et OR ad spatiola Pp et Rr sunt normales. Hinc datis in triangulo sphaerico POR latere $PR = q$, cum angulis $OPR = 90 + m$ et $ORP = 90° - n$, reperitur. Fig. 90.

$$\cot OP = \frac{\sin OPR}{\sin PR \,.\, \mathrm{tang}\, ORP} + \frac{\cos PR \cos OPR}{\sin PR} = \frac{\cos m \sin n}{\cos n \sin q} = \frac{\sin m \cos q}{\sin q}$$

$$\cot OR = \frac{\sin ORP}{\sin PR \,.\, \mathrm{tang}\, OPR} + \frac{\cos PR \cos ORP}{\sin PR} = \frac{-\sin m \cos n}{\cos m \sin q} + \frac{\sin n \cos q}{\sin q}$$

five

$$\mathrm{tang}\, OP = \frac{\cos n \sin q}{\cos m \sin n - \sin m \cos n \cos q}; \quad \mathrm{tang}\, OR = \frac{\cos m \sin q}{-\sin m \cos n + \cos m \sin n \cos q}$$

unde punctum O innotescit. Tum vero cum sit

$$Pp : Rr = \sin OP : \sin OR = \sin ORP : \sin OPR$$

erit $dp : dr = \cos n : \cos m$ seu $dp \cos m = dr \cos n$, unde relatio inter spatiola dp, dr et angulos m et n colligitur. Denique pro ipsa celeritate angulari, ea aequalis est angulo POp per dt diviso, hoc est $= \frac{Pp}{dt \sin OP}$, qui valor abit in

$$\frac{dp \sqrt{(\cos m^2 \sin n^2 + \cos n^2 \sin q^2 + \sin m^2 \cos n^2 \cos q^2 - 2 \sin m \cos m \sin n \cos n \cos q)}}{dt \cos n \sin q}.$$

CO-

COROLL. 1.

696. Cum ejusmodi relatio inter spatiola dp, dr et angulos m, n intercedere debeat, ut sit $dp \cos m = dr \cos n$, haec relatio ita in figura repraesentari potest, ut demissis ex p et r in arcum PR perpendiculis $p\pi$ et $r\varrho$ fiat $P\pi = R\varrho$.

COROLL. 2.

697. Haec proprietas autem per se est manifesta; cum enim arcus pr aequalis sit arcui $\pi\varrho$, arcui PR aequalis esse nequit, nisi sit $P\pi = R\varrho$. Celeritas autem angularis ita commodius exprimitur, ut sit $= \frac{dp\sqrt{(1-(\sin m \sin n + \cos m \cos n \cos q)^2)}}{dt \cos n \sin q}$.

COROLL. 3.

698. Si puncta P et R semicirculo distent, ut sit $\sin q = 0$ et $\cos q = -1$, necessario debet esse $\cos m \sin n + \sin m \cos n = 0$, seu $\tang m = -\tang n$ et $m = -n$, ideoque $dp = dr$. Puncta enim opposita sphaerae alium motum nisi aequalem habere nequeunt; hoc autem casu circa axem gyrationis nihil determinatur.

COROLL. 4.

699. Cognito autem motu duorum punctorum sibi non oppositorum, situs axis gyrationis cum celeritate angulari innotescet, unde deinceps motus omnium corporis punctorum definiri potest.

SCHOLION.

700. Haec, ut jam monui, non solum ad corpora, in quibus tres axes principales pares existunt, pertinent, sed in genere ad omnia corpora rigida; quae quomodocunque agitentur dum eorum centrum inertiae fixum manet, quovis temporis momento eorum motus est gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem. Sin autem centrum inertiae non maneat fixum, quovis temporis momento motus erit compositus ex tali motu gyratorio et motu progressivo: neque alius motus in corpora rigida cadere potest. Quare ad motum corporis rigidi perfecte cognoscendum, duplicem motum investigari oportet, alterum ejus centri inertiae, qui est motus progressivus, alterum vero gyratorium, cujus cognitio postulat, ut ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari assignare valeamus. Ac si axis quidem gyrationis perpetuo maneat idem, determinatio motus per principia

pia ante hac passim exposita nihil habet difficultatis; sin autem ipse gyrationis axis continuo varietur, haec principia minime sufficiunt, sed confugiendum erit ad ea, quae in capitibus praecedentibus fusius sunt explicata. In hoc tamen capite, ubi de motu corporum ternis axibus paribus praeditorum et a nullis viribus sollicitatorum agimus, istis subsidiis non indigemus, sed per vulgaria principia totum negotium unica propositione expedire poterimus.

PROBLEMA. 70.

701. Si corpus rigidum tribus axibus paribus praeditum quomodocunque projiciatur, neque deinceps ab ullis viribus sollicitetur, definire motum quo progreditur.

SOLUTIO.

Motus corpori primum impressus resolvatur in progressivum et gyratorium circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem, quorum utrumque seorsim considerare licet. Ac primo quidem motus progressivus ita continuabitur, ut centrum inertiae uniformiter in directum progrediatur, quae proprietas omni motui progressivo est communis, etiamsi corpus non ad hoc genus referatur. Quod autem ad motum gyratorium corpori primum impressum attinet, hic indoles hujus generis corporum imprimis solutionem suppeditat, cum enim axis gyrationis, quicunque fuerit, proprietate axium principalium gaudeat, motus gyratorius initio impressus ita perpetuabitur, ut axis gyrationis constanter in quiete perseveraret, si nullus motus progressivus adesset; hoc autem accedente axis gyrationis motu sibi parallelo cum centro inertiae uniformiter in directum promovebitur, atque interea motus gyratorius aequabiliter absolvetur.

COROLL. 1.

702. Quicunque ergo motus tam progressivus quam gyratorius corpori initio imprimatur, centrum inertiae cum axe gyrationis ita uniformiter in directum progredietur, ut axis sibi perpetuo maneat parallelus, corpusque circa eum uniformiter gyrari pergat.

COROLL. 2.

703. Etiamsi corpus non ad hoc genus pertineat, tamen si ei initio praeter motum progressivum motus gyratorius circa quempiam axem principalem imprimatur, uterque motus perinde continuabitur.

COROLL. 3.

704. Quin etiam si insuper vires externae accedant, quarum media directio per centrum inertiae transeat, iis solus motus progressivus perinde afficietur, ac si tota corporis massa in isto centro esset collecta; motus autem gyratorius manebit uniformis, et axis gyrationis constanter situm sibi parallelum conservabit.

SCHOLION.

705. Cum etiamnum vires sollicitantes removeamus et in solam motus impressi continuationem inquiramus, motus omnium corporum primi generis perfecte definivimus, ut nihil amplius desiderari possit: pro reliquis autem corporibus jam partem aliquam expedivimus, quando scilicet motus gyratorius primum impressus fit circa axem principalem, quae quidem determinatio per cognita jam pridem subsidia mechanica absolvi potuit. In aliis ergo corporum generibus difficultas tum demum occurrit, quando corpori primum motus gyratorius non circa quempiam axem principalem imprimitur: ad quod negotium pertractandum primum peculiare genus constituam eorum corporum, in quibus duo dantur momenta inertiae respectu axium principalium aequalia. Quod genus, praeterquam quod calculus haud mediocriter contrahitur, hoc commodi habet, ut in eo adhuc infiniti dentur axes principales, ita ut infinitis modis ejusmodi motus, qualem jam definivimus, existere possit; cum contra in tertio genere, in quo momenta principalia inter se sunt inaequalia, praeter tres axes determinatos nullus alius detur, circa quem corpus libere gyrari queat. In his igitur generibus id nobis est propositum, ut quicunque motus talibus corporibus fuerit impressus, ejus continuationem investigemus: ubi ad quodvis tempus primo positio axis gyrationis ratione axium principalium corporis cum celeritate angulari, deinde vero situs ipsorum axium principalium ratione spatii absoluti determinari debebit, qui modus hoc arduum argumentum tractandi maxime videtur idoneus, tam ad calculum evolvendum, quam ad ipsam cognitionem nostram illustrandam. Ad utrumque autem in praecedentibus capitibus necessaria adminicula exposuimus.

CAPUT

CAPUT XII.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM DUABUS AXIBUS PRINCIPALIBUS PARIBUS PRAEDITORUM ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

DEFINITIO. 12.

706. Corpus rigidum *duos axes principales pares habere* dicitur, quando inter ejus momenta inertiae respectu axium principalium duo sunt aequalia.

COROLL. 1.

707. Hujus generis ergo corpora innumerabiles habent axes principales; statim enim ac duo axes principales aequalia habent momenta inertiae, omnes rectae in eorum plano per centrum inertiae ductae aeque pro axibus principalibus haberi possunt, eodemque momento inertiae sunt praeditae.

COROLL. 2.

708. Hic igitur axis ille principalis, cujus momentum inertiae reliquis est inaequale, erit singularis, atque omnes rectae per centrum inertiae ad eum normaliter ductae paria habebunt momenta inertiae, et tanquam axes principales spectari poterunt.

COROLL. 3.

709. Cognito itaque axe singulari, positio binorum reliquorum non determinatur, sed eorum loco pro lubitu binae rectae quaecunque tam inter se quam ad illum normales accipi possunt, dummodo per centrum inertiae transeant.

SCHOLION.

710. Cum igitur supra in genere pro axibus principalibus IA, IB, IC posuerimus momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, horum duo in isthoc capite aequalia statuamus, Sit igitur primus axis IA singularis, reliquorumque momenta inertiae inter se aequalia, ut sit $bb = cc$; ex quo

quo formulae supra inventae mirifice contrahentur. Etsi autem hoc casu situs binorum axium IB et IC non determinatur, tamen eos tanquam determinatos spectabimus, ut eorum ope situs corporis ad quodvis tempus facilius assignari possit. Hujus autem generis utique infinita dantur corpora, atque inter homogenea imprimis huc pertinent cylindri, coni, atque in genere omnia corpora rotunda, quae conversione figurae cujuscunque circa quempiam axem fixum nascuntur; ita ut hoc genus fere omnia corpora, quae quidem a geometris considerari solent, in se complectatur. Quemadmodum ergo haec corpora ratione motus se sint habitura, dum a nullis viribus sollicitantur, in hoc capite investigabimus, ac primo quidem ad quodvis tempus in positionem axis gyrationis ratione axium principalium inquiramus, nondum solliciti quemnam motum hi ipsi axes sint habituri, quem deinceps definire conabimur.

PROBLEMA. 71.

711. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito motus quicunque gyratorius initio fuerit impressus, neque ullae adsint vires externae, ad quodvis tempus positionem axis gyrationis ratione axium principalium assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Centro inertiae corporis I in centro sphaerae, ad cujus superficiem omnia reducamus, constituto sint IA, IB, IC axes corporis principales, ac respectu primi IA momentum inertiae $= Maa$, respectu binorum reliquorum autem IB et IC sint momenta inertiae inter se aequalia $= Mcc$, ut sit $bb = cc$. Nunc autem elapso ab initio tempore $= t$, corpus gyretur circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut situs puncti O respectu punctorum A, B, C definiri debeat. Ponantur ergo arcus circulorum maximorum OA $= \alpha$, OB $= \beta$, et OC $= \gamma$, qui tanquam variabiles sunt tractandi, atque problema 66. ad hunc casum quo $bb = cc$ translatum dabit primo $d\varepsilon = 0$, unde patet celeritatem angularem manere invariabilem, ideoque adhuc esse aequalem ei, quae initio corpori fuerit impressa. Quare si haec prima celeritas angularis ponatur $= e$ erit $\varepsilon = e$. Deinde vero ex §. 674. habebimus has aequationes.

I. $aac^4 d\alpha \sin\alpha = 0$

II. $aac^4 d\beta \sin\beta = eaacc\,(aa - cc)\,dt \cos\alpha \cos\gamma$

III. $aac^4 d\gamma \sin\gamma = eaacc\,(cc - aa)\,dt \cos\alpha \cos\beta$

cx

ex quarum prima discimus, arcum AO $= \alpha$ esse constantem, ideoque aequalem illi, quo initio axis gyrationis distabat ab axe singulari IA. Cum igitur sit $\cos\gamma = \sqrt{(\sin\alpha^2 - \cos\zeta^2)}$, reliquarum aequationum altera praebet:

$$\frac{d\zeta \sin\zeta}{\sqrt{(\sin\alpha^2 - \cos\zeta^2)}} = \frac{\varepsilon(aa - cc)\, dt \cos\alpha}{cc}$$

cujus integrale est $A \cos. \frac{\cos\zeta}{\sin\alpha} = C + \frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\alpha}{cc}$, ideoque

$$\cos\zeta = \sin\alpha \cos\left(C + \frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\alpha}{cc}\right) \text{ et}$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\left(C + \frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\alpha}{cc}\right).$$

Quare si initio ubi $t = o$, fuerit $AO = \mathfrak{A}$, $BO = \mathfrak{B}$, et $CO = \mathfrak{C}$, erit $\alpha = \mathfrak{A}$, et $\cos\mathfrak{B} = \sin\mathfrak{A} \cos C$, unde fit constans $\cos C = \frac{\cos\mathfrak{B}}{\sin\mathfrak{A}}$ et $\sin C = \frac{\cos\mathfrak{C}}{\sin\mathfrak{A}}$. Quocirca habebimus

$$\cos\zeta = \cos\mathfrak{B} \cos\frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\mathfrak{A}}{cc} - \cos\mathfrak{C} \sin\frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\mathfrak{A}}{cc}.$$

$$\cos\gamma = \cos\mathfrak{B} \sin\frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\mathfrak{A}}{cc} + \cos\mathfrak{C} \cos\frac{\varepsilon(aa - cc)t \cos\mathfrak{A}}{cc}$$

unde si initio motus cognoverimus situm axis gyrationis respectu axium principalium, seu arcus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{C}$, pro quovis tempore elapso t situm axis gyrationis respectu eorundem axium principalium seu arcus α, ζ, γ assignare valemus.

COROLL. 1.

712. Si igitur initio corpori impressus fuerit motus gyratorius circa axem IE, ad axes principales IA, IB, IC inclinatum angulis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC; quomodocunque deinceps axis gyrationis varietur, celeritas angularis perpetuo manebit eadem $= \varepsilon$; et axis gyrationis IO eodem angulo $\mathfrak{A}$ ad axem principalem singularem IA inclinabitur.

COROLL. 2.

713. Tum vero si momentum inertiae respectu axis singularis IA sit $= Maa$, respectu binorum reliquorum autem $= Mcc$ pro tempore elapso

elapso $= t$, quia e angulum denotat, ponatur angulus $\frac{e(aa-cc)t \cos\mathfrak{A}}{cc}$ $= T$, qui cum tempore t uniformiter crescit; atque hoc tempore corpus gyrabitur circa axem IO, ut sit $AO = AE = \mathfrak{A}$ et $\cos BO = \cos\mathfrak{B}\cos T - \cos\mathfrak{C}\sin T$; $\cos CO = \cos\mathfrak{B}\sin T + \cos\mathfrak{C}\cos T$.

COROLL. 3.

714. Quia arcus AO perpetuo manet aeque magnus $= \mathfrak{A}$, situs puncti O commodissime ex angulo BAO innotescet, et cum sit $\cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin\mathfrak{A}}$ et $\sin BAO = \frac{\cos CO}{\sin\mathfrak{A}}$ erit

$$\cos BAO = \frac{\cos\mathfrak{B}\cos T - \cos\mathfrak{C}\sin T}{\sin\mathfrak{A}} \text{ et } \sin BAO = \frac{\cos\mathfrak{B}\sin T + \cos\mathfrak{C}\cos T}{\sin\mathfrak{A}},$$

COROLL. 4.

715. Si fuerit $cc = aa$, qui est casus ante tractatus quo omnia tria momenta inertiae sunt inter se aequalia, erit $T = 0$, et $BO = \mathfrak{B}$, item $CO = \mathfrak{C}$, polus scilicet gyrationis O respectu axium principalium maneret immotus, uti jam ante invenimus.

SCHOLION.

716. Formulae hae multo simpliciores reddi possunt, sed rei dignitas mereretur, ut id potius singulari propositione quam in transitu prosequamur.

PROBLEMA 72.

717. Iisdem positis, quae in praecedente problemate sunt constituta, definire promotionem poli gyrationis O respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Fig. 91. Maneant omnia uti in praecedente solutione, et cum poli pares B et C in circulo PC pro lubitu accipi queant, quadrans AB ita constituatur, ut per polum E, circa quem corpus primum gyrari incipit, transeat. Cum igitur hic polus gyrationis perpetuo eandem a polo principali A servet distantiam, ejus motus fiet per circulum minorem EFG centro A descriptum, cujus distantia sit arcus $AE = \alpha$, quem supra per $\mathfrak{A}$ indicavimus. Erit ergo $BE = \mathfrak{B} = 90° - \alpha$, et $CE = \mathfrak{C} = 90°$.

90°. Quare si elapso tempore $= t$, polus gyrationis ex E pervenerit in O, ob $\cos \mathfrak{C} = 0$, erit

$$\cos BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \cos T}{\sin \alpha} = \cos T, \text{ et } \sin BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \sin T}{\sin \alpha} = \sin T,$$

ideoque ipse angulus $BAO = T$. At angulus T ita ex tempore t definitur, ut sit $T = \frac{\varepsilon (aa - cc) t \cos \alpha}{cc} = BAO$, unde hanc egregiam solutionem consequimur. Si momentum inertiae respectu axis principalis singularis IA fuerit $= Maa$, et respectu binorum reliquorum parium IB et $IC = Mcc$, corpus autem initio circa axem IE in sensum BCA celeritate angulari $= \varepsilon$ gyrari coeperit; tum respectu axium principalium, quos quasi in quiete spectamus, polus gyrationis per circulum minorem EFG circa polum A descriptum uniformiter proferetur, ita ut elapso tempore $= t$ conficiat angulum $EAO = \frac{\varepsilon (aa - cc) t \cos AE}{cc}$, motusque fiat in sensum BC conformem motui gyratorio, si quidem fuerit $aa > cc$; in contrarium autem si $aa < cc$.

COROLL. 1.

718. Polus gyrationis his casibus quiescet. 1°. si $AE = 0$, seu corpus circa axem principalem IA gyrari inceperit. 2°. si $AE = 90°$ seu si corpus circa quemcunque axem ad IA normalem gyrari inceperit: ac 3°. si $aa = cc$, hoc est si corpus habuerit omnes tres axes principales pares.

COROLL. 2.

719. Si fuerit $aa > cc$, polus gyrationis E circa A in eundem sensum BC in quem fit gyratio circumferetur celeritate angulari $= \frac{\varepsilon (aa - cc) \cos AE}{cc}$, sin autem fuerit $aa < cc$, in sensum contrarium circumferetur celeritate angulari $= \frac{\varepsilon (cc - aa) \cos AE}{cc}$.

COROLL. 3.

720. Ipse autem arcus circuli minoris EO, per quem axis gyrationis tempore t procedit, est $= \frac{\varepsilon (aa - cc) t \sin AE \cos AE}{cc}$

=

$= \frac{e(aa - cc)\, t \sin 2AE}{cc}$, quod ergo spatium ceteris paribus est maximum, si $AE = \frac{1}{2} AB = 45°$, hoc est si axis gyrationis aequaliter distet ab axibus principalibus.

COROLL. 4.

721. Posita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, polus gyrationis totam circumferentiam EFGE percurret tempore $= \frac{2\pi cc}{e(aa - cc)\cos AE}$ min. sec. huncque motum perpetuo uniformem conservabit.

SCHOLION.

722. Hic nondum de ipso corporis motu agimus, sed quod probe est notandum, corpus, quasi quiesceret, vel aliud ipsi aequale in quiete contemplamur, in eoque ad quodvis tempus axem gyrationis IO definire docuimus, circa quem corpus motum tum sit gyraturum, neque hic sumus solliciti, quemnam situm hic axis gyrationis tum respectu spatii absoluti sit habiturus. Nunc igitur istam completam motus cognitionem aggrediamur.

PROBLEMA. 73.

723. Si corpori rigido duobus axibus principalibus praedito impressus fuerit initio motus gyratorius quicunque, ad datum tempus tam situm axium principalium quam axis gyrationis respectu spatii absoluti assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Sphaera ex centro inertiae corpori circumscripta cingatur superficie sphaerica immobili ZXVY, atque elapso tempore t sphaera mobilis cum corpore eum teneat situm, ut axium ternorum principalium poli sint in A, B, C, respectu quorum primi IA momentum inertiae sit $= Maa$, respectu autem binorum reliquorum $= Mcc$. Ductis inde ad punctum quoddam fixum Z arcubus AZ, BZ et CZ; ponamus ut in probl. 68. $AZ = l$, $BZ = m$, et $CZ = n$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, tum vero sint anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$, et quia motus gyratorius, uti jam ostendimus, manet aequabilis, sit ejus celeritas angularis $= e$ in sensum ABC directa. Porro quoniam axis gyratio-

gyrationis perpetuo ab axe IA aeque maneat remotus. Sit arcus AO = α, et aequalis initiali AE, ubi assumamus initio polum gyrationis E in ipso arcus AB positum fuisse. Ex praecedentibus ergo si ponamus $\frac{\varepsilon(aa-cc)t\cos\alpha}{cc} = T$, erit nunc elapso tempore $= t$ angulus BAO $= T$: unde si ponamus arcus BO $= \beta$ et CO $= \gamma$, erit $\cos\beta = \sin\alpha\cos T$ et $\cos\gamma = \sin\alpha\sin T$ ob BAC angulum rectum. His positis ob $g = e$ ex §. 678. habemus has aequationes.

$dl\sin l = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos n\cos T - \cos m\sin T)$; $-d\lambda\sin l^2 = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos m\cos T + \cos n\sin T)$

$dm\sin m = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\sin T - \cos n\cot\alpha)$; $-d\mu\sin m^2 = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos n\sin T + \cos l\cot\alpha)$

$dn\sin n = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos m\cot\alpha - \cos l\cos T)$; $d\nu\sin n^2 = \varepsilon dt\sin\alpha\cos l\cot\alpha + \cos m\cos T)$

quae quo facilius ad integrationem perduci queant, consideremus arcum ZO $= v$, et cum sit $\cos v = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha(\cos m\cos T + \cos n\,\mathit{f}T)$ erit differentiando

$$dv\sin v = dl\sin l\cos\alpha + dm\,\mathit{f}m\sin\alpha\cos T + dn\sin n\sin\alpha\sin T + dT\sin\alpha\cos m\sin T - dT\sin\alpha\cos n\cos T$$

substitutis autem pro $dl\mathit{f}l$, $dm\mathit{f}m$, $dn\mathit{f}n$ illis valoribus fit

$$dv\mathit{f}v = -dT\sin\alpha(\cos n\cos T - \cos m\,\mathit{f}T) = -dT\sin\alpha.\frac{dl\mathit{f}l}{\varepsilon dt\sin\alpha}.$$

Cum igitur sit $dT = \frac{\varepsilon(aa-cc)dt\cos\alpha}{cc}$ oritur

$$dv\mathit{f}v = \frac{-(aa-cc)\cos\alpha}{cc}.dl\mathit{f}l \text{ et integrando}$$

$$\cos v = C - \frac{(aa-cc)\cos\alpha\cos l}{cc} = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha(\cos m\cos T + \cos n\,\mathit{f}T)$$

ut ergo jam una habeatur aequatio integralis

$$C = \frac{aa}{cc}\cos\alpha\cos l + \sin\alpha\cos m\cos T + \sin\alpha\cos n\sin T.$$

Hinc autem concludere licet integrationem particularem, ponendo arcum l constantem, et $\cos m = \sin l\cos T$ atque $\cos n = \sin l\sin T$, ut fiat $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. simulque primae aequationi $dl\mathit{f}l = 0$ satisfiat, reliquae vero dabunt:

$$dm\mathit{f}m = dT\,\mathit{f}l\,\mathit{f}T = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\,\mathit{f}T - \cot\alpha\,\mathit{f}l\,\mathit{f}T)$$

$$dn\mathit{f}n = -dT\,\mathit{f}l\cos T = \varepsilon dt\sin\alpha(\cot\alpha\,\mathit{f}l\cos T - \cos l\cos T)$$

ex quarum utraque prodit $dT \int l = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l - \cot\alpha \int l) = \frac{\varepsilon(aa-cc)\,dt\cos\alpha \int l}{cc}$, seu $\sin\alpha \cos l - \cos\alpha \sin l = \frac{(aa-cc)\cos\alpha \int l}{cc}$, hincque $\tang l = \frac{cc \tang\alpha}{aa}$, simul autem arcus ZO $= v$ fiet constans, nempe $\cos v = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha \int l$ consequenter ZO $= v = \alpha - l$ et $\tang AZO = 0$, ita ut puncta A, Z et O semper sint in eodem circulo maximo. Denique vero pro situ arcus ZA habebitur $- d\lambda \int l^2 = \varepsilon dt \sin\alpha \int l$; hincque $\lambda = \frac{-\varepsilon t \sin\alpha}{\sin l}$. Cognito autem angulo XZA $= \lambda$ reliqui XZB $= \mu$ et XZC $= \nu$ ex his formulis definientur:

$$\sin(\mu-\lambda) = \frac{-\cos n}{\int l \int m};\ \sin(\nu-\lambda) = \frac{\cos m}{\int l \int n};\ \text{seu}$$

$$\cos(\mu-\lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\int l \int m};\ \cos(\nu-\lambda) = \frac{-\cos l \cos n}{\int l \int n}$$

seu $\tang(\mu-\lambda) = \frac{\cos n}{\cos l \cos m} = \frac{\tang T}{\cos l}$ et $\tang(\nu-\lambda) = \frac{-\cot T}{\cos l}$.

Cum autem haec solutio sit particularis, generalem sequenti modo eliciemus.

SOLUTIO GENERALIS.

Ponamus $\cos m = \sin l \cos\Theta$ et $\cos n = \sin l \sin\Theta$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. eritque

$$dl \sin l = \varepsilon dt \sin\alpha (\int l \sin\Theta \cos T - \int l \cos\Theta \int T)$$

sive $dl = \varepsilon dt \sin\alpha \sin(\Theta - T)$, tum vero habebitur

$dm \sin m = d\Theta \int l \sin\Theta - dl \cos l \cos\Theta = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l \int T - \cot\alpha \int l \sin\Theta)$

ideoque

$d\Theta \sin l \sin\Theta = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l \cos\Theta \sin(\Theta - T) + \cos l \int T - \cot\alpha \int l \sin\Theta)$

at ob $T = \Theta - (\Theta - T)$ est $\sin T = \sin\Theta \cos(\Theta - T) - \cos\Theta \sin(\Theta - T)$

unde per $\sin\Theta$ dividendo erit

$$d\Theta \sin l = \varepsilon dt \sin\alpha (\cos l \cos(\Theta - T) - \cot\alpha \sin l).$$

Statuamus jam $\Theta - T = \varphi$, erit $d\Theta = d\varphi + \frac{\varepsilon(aa-cc)\,dt\cos\alpha}{cc}$, et

$$d\varphi \sin l + \frac{\varepsilon(aa-cc)\,dt\cos\alpha \sin l}{cc} = \varepsilon dt \sin\alpha \cos l \cos\varphi - \varepsilon dt \cos\alpha \int l$$

 seu

$$\text{seu } d\phi \sin l = \varepsilon dt \sin\alpha \cos l \cos\phi - \frac{\varepsilon aadt \cos\alpha \sin l}{cc}$$

quae aequatio cum praecedente $dl = \varepsilon dt \sin\alpha \sin\phi$ est conjungenda et resolvenda, quae quidem continent tres variabiles l, t, et ϕ, quarum media ob $\varepsilon dt = \frac{dl}{\sin\alpha \sin\phi}$ facile eliminatur; oritur enim

$$d\phi \, sl = \frac{dl \cos l \cos\phi}{\sin\phi} - \frac{aadl \cos\alpha \sin l}{cc \sin\alpha \sin\phi} \text{ seu}$$

$$\frac{aadl \cos\alpha \sin l}{cc \sin\alpha} = dl \cos l \cos\phi - d\phi \sin l \sin\phi$$

cujus integrale est:

$$C - \sin l \cos\phi = C - \frac{aa \cos\alpha \cos l}{cc \sin\alpha}.$$

Statuamus brevitatis gratia $\frac{aa \cos\alpha}{cc \sin\alpha} = D$, ut sit

$$\cos\phi = \frac{C - D\cos l}{\sin l}, \text{ et } \sin\phi = \frac{1}{\sin l} \sqrt{(1 - CC + 2CD \cos l - (1 + DD) \cos l^2)}$$

quo valore in altera aequatione substituto oritur

$$\varepsilon dt = \frac{dl \sin l}{\sin\alpha \sqrt{(1 - CC + 2CD \cos l - (1 + DD) \cos l^2)}}$$

cujus integrale est

$$\varepsilon t + E = \frac{1}{\sin\alpha \sqrt{(1 + DD)}} \text{ A sin } \frac{CD - (1 + DD) \cos l}{\sqrt{(1 - CC + DD)}}$$

$$\text{seu } \frac{CD - (1 + DD) \cos l}{\sqrt{(1 - CC + DD)}} = \sin((\varepsilon t + E) \sin\alpha \sqrt{(1 + DD)})$$

unde ad quodvis tempus arcus $ZA = l$, indeque angulus $\phi = \Theta - T$, hincque angulus $\Theta = \phi + T$ innotescit, quo invento erit $\cos m = \sin l \cos\Theta$ et $\cos n = \sin l \sin\Theta$. Porro fiet $\cos ZO = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha \sin l \cos\phi = \cos\alpha \cos l + C \sin\alpha - D \sin\alpha \cos l$, seu $\cos ZO = C \sin\alpha - \frac{(aa - cc)\cos\alpha \cos l}{cc}$. Denique pro angulo $XZA = \lambda$ obtinemus:

$$-d\lambda \sin l^2 = \varepsilon dt \sin\alpha \, sl \cos\phi, \text{ seu } d\lambda = \frac{-\varepsilon dt \sin\alpha (C - D\cos l)}{\sin l^2}$$

ubi si loco εdt superior valor substituatur provenit

$$d\lambda = \frac{-dl(C - D\cos l)}{\int l \sqrt{(1 - CC + 2CD\cos l - (1+DD)\cos l^2)}}$$

cujus integrale elicitur

$$\lambda = E + A \sin \frac{-D + C\cos l}{\sin l}$$

sicque omnia in genere sunt determinata.

COROLL. 1.

724. Ex solutione generali nascitur solutio particularis prius eruta, si ponatur constans $C = \sqrt{(1 + DD)}$; tum enim in aequatione $\epsilon t + E = \frac{\epsilon}{\sin\alpha\sqrt{(1+DD)}} A \sin \frac{CD - (1+DD)\cos l}{\sqrt{(1 - CC + DD)}}$, ob denominatorem $\sqrt{(1 - CC + DD)} = 0$, etiam numerator $CD - (1 + DD)\cos l$ evanescere debet, unde fit $\cos l = \frac{D}{\sqrt{(1+DD)}}$ et $\sin l = \frac{1}{\sqrt{(1+DD)}}$, ideoque $\tang l = \frac{1}{D} = \frac{cc}{da} \tang\alpha$.

COROLL. 2.

725. Sumta autem constante $C = \sqrt{(1 + DD)}$ fit $\cos\phi = \frac{\sqrt{(1+DD)} - D\cos l}{\int l} = 1$, ideoque $\phi = 0$ et $\Theta = T$, unde colligitur $\cos m = \sin l \cos T$ et $\cos n = \int l \int T$, ac denique $\lambda = E + A \sin \frac{-D + \cos l\sqrt{(1+DD)}}{\int l} = E + A \int 0$. Verum ob $\phi = 0$, ad hoc incommodum evitandum, sumatur aequatio $d\lambda \int l = -\epsilon dt \sin\alpha$, unde fit ut ante $\lambda = E - \frac{\epsilon t \sin\alpha}{\int l}$.

SCHOLION.

726. Solutio generalis ideo tot involvit constantes arbitrarias, ut ubicunque punctum fixum Z in sphaera immobili accipiatur, ad id possit accommodari. Cum autem punctum Z ab arbitrio nostro pendeat, id semper ita accipere licebit, ut pro eo solutio particularis locum sit habitura: quae cum sit simplicissima maxime nobis perspicuam cognitionem motus largietur, cum idem motus, si ad alia puncta fixa referretur, vehementer perturbatus videri debeat. Quare punctum hoc fixum Z non pro lubitu sed ita assumamus, ut solutio illa particularis locum inveniat.

PRO-

PROBLEMA 74.

727. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito impressus fuerit initio motus gyratorius circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem motus hujus continuationem determinare.

SOLUTIO.

In centro ſphaerae immobilis concipiatur centrum inertiae corporis, quod etiam quieſcit; atque initio axes corporis principales fuerint in A, B, C; quorum primi IA reſpectu momentum inertiae ſit $= Maa$, reſpectu vero binorum reliquorum $= Mcc$: tum autem acceperit corpus motum gyratorium circa axem IE in ſenſum BCA, celeritate angulari $= \varepsilon$ ſitque arcus AE $= \alpha$. Quo nunc hujus motus impreſſi continuationem inveſtigemus, ſolutione particulari utentes, in arcu AB, quem in ſphaera immobili tanquam meridianum fixum ſpectemus, capiatur AZ ita ut ſit $\operatorname{tang} AZ = \frac{cc \operatorname{tang} \alpha}{aa}$ ſumaturque Z pro puncto illo fixo, ad quod deinceps ſitum corporis perpetuo referamus, ponamus autem AZ $= l$, ut ſit ZE $= \alpha - l$. Iam elapſo tempore $= t$ pervenerint poli axium principalium in A′, B′, C′; et vidimus fore adhuc ZA′ $=$ ZA $= l$, et in eodem arcu A′Z reperiri punctum O, circa quod tanquam polum corpus nunc gyretur celeritate angulari $= \varepsilon$ in ſenſum B′C′A′. Ex praecedentibus autem, ubi angulum XZA poſuimus $= \lambda$, quoniam ejus negativum hic angulum AZA′ denotat, qui initio erat $= 0$, erit hic angulus AZA′ $= \frac{\varepsilon t \sin \alpha}{\sin l}$: unde ad quodvis tempus poſitio axis principalis IA′ cognoſcitur. Sint bini reliqui in B′ et C′, atque §. 717. invenimus, fore angulum B′A′O $= \frac{\varepsilon (aa - cc) t \cos \alpha}{cc}$: quare invento puncto A′ capiatur angulus ZA′B′ $= \frac{\varepsilon (aa - cc) t \cos \alpha}{cc}$, et ſumto arcu A′B′ quadrante, erit B′ alter duorum reliquorum polorum principalium, unde ſponte tertius C′ patet. Fig. 92.

COROLL. 1.

728. Axis ergo principalis IA uniformiter gyratur circa lineam IZ fixam, ſed non ad corpus pertinentem; ita ut ſit arcus AZ $=$ A′Z $= l$ exiſten-

existente $\tang l = \frac{cc \tang \alpha}{aa}$, et tempore t absolvatur angulus $AZA' = \frac{et \sin \alpha}{\int l}$: cujus ergo motus celeritas angularis in sensum AA' seu BCA erit $= \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\int l}$.

COROLL. 2.

729. Interea autem arcus in corpore AB, qui initio in AZ cadebat, ita circa ZA dum tempore t in ZA' procedit, gyratur ut conficiat angulum $ZA'B' = \frac{\varepsilon(aa - cc)\, t \cos \alpha}{tc}$, cujus ergo motus celeritas angularis est $= \frac{\varepsilon(aa - cc) \cos \alpha}{cc}$.

COROLL. 3.

730. Motus ergo corporis potest repraesentari tanquam compositus ex duplici gyratorio. Primo scilicet corpus gyrabitur circa suum polum principalem singularem A celeritate angulari $= \frac{\varepsilon(aa - cc) \cos \alpha}{cc}$ in sensum CB; tum vero interea ipse hic polus A gyrabitur circa punctum Z in spatio absoluto fixum celeritate angulari $= \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\int l}$.

COROLL. 4.

731. Posito arcu $ZA = l$, sit celeritas angularis, qua punctum A circa punctum fixum Z gyratur $= \zeta$, in sensum AA', quae duo elementa ut data considerentur, erit $\tang \alpha = \frac{aa}{cc} \tang l$ et $\varepsilon = \frac{\zeta \sin l}{\sin \alpha}$. Hinc celeritas angularis, qua interea arcus AB circa A gyratur in sensum contrarium, erit $= \frac{\zeta(aa - cc) \sin l}{cc \tang \alpha} = \frac{\zeta(aa - cc) \cos l}{aa}$.

SCHOLION 1.

732. Hic corporis motus commodissime eodem modo repraesentari potest, quo motum vertiginis terrae concipimus, quatenus axis seu poli

poli circulos progrediuntur. Corpus nempe tanquam terra spectetur, cujus alter polus sit A, in coelo autem punctum Z polus eclipticae, a quo polus terrae constanter eandem servet distantiam $ZA = l$, et circa quem gyretur celeritate angulari $= \zeta$ in sensum AA', qui motus respondet processui poli terrestris in coelo. Interea autem dum arcus AB vel $A'B'$ gyratur circa A vel A', ab arcu ZA recedens in sensum CB celeritate angulari $= \frac{\zeta(aa - cc).\cos l}{aa}$, hic motus respondebit motui diurno terrae. Revera autem talis motus maxime discrepat a motu vertiginis terrae, cum hic motus meridiani AB circa polum A sit admodum lentus respectu motus angularis poli A circa punctum fixum Z, cum contra in terra motus diurnus sit velocissimus prae motu poli circa polum eclipticae. Quod si ergo motus polorum terrae circa polos eclipticae esset velocissimus, contra vero motus vertiginis circa polos terrae tardissimus, causam hujus motus neutiquam in viribus externis quaeri conveniret, cum terra per se ob inertiam tali motu cieri posset. Nunc autem cum contrarium eveniat, hujus phoenomeni causa manifesto in viribus externis, quibus terra sollicitatur, est sita.

SCHOLION. 2.

733. Memoratu hic omnino dignum est, quod motus corporis, qui revera circa axem variabilem $I\Theta$ fiebat, quasi sponte reductus fuerit ad binos motus gyratorios, qui autem probe a se invicem sunt distinguendi, dum alter fit circa axem verum et in corpore existentem, alter vero circa axem quasi extra corpus existentem et ad spatium absolutum relatum. Ad quem motum clarius menti exponendum, corpus PRQS hasta APQa transfixum concipiatur, quae per ejus centrum inertiae I transeat, ejusque axem principalem singularem referat: tum vero hasta terminis suis A et a ita annulo $ZAza$ inseratur, ut corpus libere circa eam gyrari queat: annulus autem in punctis oppositis Z et z habeat cardines, qui extrinsecus ita firmiter retineantur, ut annulus circa eos pariter libere circumferri possit. Quod si jam corpus PRQS circa hastam Aa in gyrum agatur simulque annulus $AzaZ$ circa cardines Z et z circumferatur, ejusmodi motus orietur qualem hic descripsimus, ubi hasta refert axem verum in corpore existentem et cum corpore motum, cardines vero Z et z axem alterum extra corpus fixum. Bini autem hi motus gyratorii in hoc conveniunt, quod uterque altero sublato abeat in verum motum gyratorium circa axem fixum; si enim annulus quiescat, corpus circa hastam quiescen-

quiescentem Aa seu axem PQ fixum gyrabitur: sin autem debeatur motus circa hastam, solusque annulus circa cardines Z et z gyretur, in corpore orietur motus gyratorius simplex circa axem fixum ad cardines Z et z pertingentem.

SCHOLION 3.

734. Talis motus fieri dicitur circa axem mobilem, qui probe distinguendus est a motu circa axem variabilem, qualem in praecedentibus consideravimus. Corpus enim circa axem variabilem gyrari dicitur, quando continuo circa aliam lineam per ejus centrum inertiae ductam gyratur, quae etiam eo instanti revera quiescat; atque de tali axe omnia sunt intelligenda, quae supra de motu gyratorio sunt exposita. Quando autem dicimus corpus circa axem mobilem gyrari, quae idea nunc demum nobis nata est censenda, axis quidem erit certa quaedam linea in corpore existens invariabilis, quae autem ipsa cum corpore movetur; ita ut iste axis mobilis nunquam quiescat. Ita axis terrae qui hoc nomine genere solet, non est axis variabilis sed mobilis, cum in terra sit linea quaedam fixa, sed labente tempore ad alia atque alia coeli puncta dirigatur: qui ergo etiam abstractione facta a motu terrae annuo nullo temporis puncto quiescit, etiamsi ejus motus sit tardissimus. Verum quovis tempore alia quaedam linea in terra assignari potest, quae tum revera quiescat, successu temporis autem continuo mutetur: cujusque respectu terra circa axem variabilem gyrari est dicenda. Ob motum autem aequinoctiorum tardissimum prae motu diurno differentia inter verum terrae axem et axem variabilem quovis tempore locum habentem fere penitus est imperceptibilis; quae autem si esset notabilis, in Astronomia summam attentionem postularet, cum observationes pro elevatione poli institutae non situm axis veri, sed axis variabilis eo tempore ostendant, circa quem scilicet tum quiescentem terra gyretur.

PROBLEMA 75.

735. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito motus quicunque imprimatur, corpusque a nullis viribus externis sollicitetur, neque usquam retineatur, quominus motum suum libere prosequi possit, determinare motum, quo moveri perget.

SOLUTIO.

Primum dispiciatur, utrum ob motum impressum centrum inertiae moveatur nec ne? si enim movetur, corpus habebit motum progressi-

greſſivum ſeorſim conſiderandum, quo uniformiter in directum progredietur, atque mente ſaltem hunc motum tollere licebit, dum ſcilicet ipſum ſpatium motu coutrario proferri concipiatur. Sublato ergo motu progreſſivo, cujus ratio perinde eſt comparata, ac ſi praeterea nullus alius motus in corpore ineſſet, centrum corporis inertiae tanquam quieſcens conſiderari poterit: circa quod quomodocunque corpus agitetur, linea quaepiam recta per id ducta primo ſaltem initio quieſcet, quae ejus erit axis gyrationis. Tum ſi iſte axis conveniat cum aliquo axium principalium, hoc eſt, ſi vel incidat in axem principalem ſingularem vel ad eum ſit normalis, etiam hic motus manebit aequabilis, axisque quieſcet, vel adjuncto motu progreſſivo ſibi jugiter manebit parallelus. At ſi axis ille, circa quem corpus primum gyrari coepit, neque cum axe principali ſingulari congruat, neque ad eum ſit normalis, corpus circa axem variabilem gyrabitur, qui quomodo continuo varietur, in praecedentibus abunde oſtendimus. Clarius etiam hic motus perſpicietur per reductionem illam ad axem mobilem, qua corpus circa ipſum axem principalem ſingularem aequabiliter gyratur, dum ipſe hic axis circa quosdam polos extra corpus fixos circumfertur pariter motu uniformi.

SCHOLION.

736. Hoc problemate univerſum argumentum, quod hoc capite tractandum ſuſcepimus, exhauritur, ita ut corporum rigidorum duobus axibus principalibus paribus praeditorum, et a nullis viribus ſollicitatorum, motus liberos in genere determinare atque ad quosvis caſus accommodare valeamus. Superſunt ergo corpora tertiae claſſis, quorum momenta inertiae principalia ſunt inaequalia, quibus ſequens caput deſtinatur.

 CAPUT

CAPUT XIII.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM TERNIS AXIBUS PRINCIPALIBUS DISPARIBUS PRAEDITORUM, ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

PROBLEMA 76.

737. Si corpori rigido cuicunque impressus fuerit initio motus gyratorius quicunque, neque id ab ullis viribus externis sollicitetur; ad quodvis tempus positionem axis gyrationis respectu axium principalium assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Cum centrum inertiae corporis I perpetuo quiescat, in eo constituatur centrum sphaerae, ad cujus superficiem omnia reducamus: sintque IA, IB, IC, axes corporis principales, et momenta inertiae respectu axis IA $= Maa$, respectu axis IB $= Mbb$, et respectu axis IC $= Mcc$, quae inter se inaequalia assumimus, quoniam si duo vel adeo omnia essent inter se aequalia, casus ad praecedentia capita revolveretur. Nunc elapso tempore t sit recta IO axis gyrationis, cujus situm respectu axium principalium definiri oportet; ponatur celeritas angularis, qua corpus jam circa hunc axem IO gyratur $= \varepsilon$, fiatque gyratio in sensum ABC. Vocentur arcus circulorum maximorum, qui quaeruntur, OA $= \alpha$, OB $= \beta$, et OC $= \gamma$, qui tempore variantes pro variabilibus sunt habendi, ita autem inter se pendent, ut sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Deinde vero etiam celeritas angularis ε hic erit variabilis, cum sit (670.)

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{aabbcc}\,dt,$$

tum vero ex §. 674. variabilitas arcuum α, β, γ, ita determinatur per has ternas aequationes:

I. $aabbccd\alpha \sin\alpha = \varepsilon(cc-bb)\,dt\cos\beta\cos\gamma\,(bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2)$

II. $aabbccd\beta \sin\beta = \varepsilon(aa-cc)\,dt\cos\gamma\cos\alpha\,(aacc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\beta^2)$

III.

III. $aabbccd\gamma \sin\gamma = \varkappa (bb - aa)\, dt \cos\alpha \cos\beta\, (aabb - (aa - cc)(bb - cc)\cos\gamma^2)$.

Cum autem sit $\frac{dt \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{aabbcc} = \frac{d\varkappa}{\varkappa\varkappa (aa - bb)(aa - cc)(bb - cc)}$
hae aequationes abeunt in istas:

$$\text{I. } d\alpha \sin\alpha \cos\alpha = \frac{-d\varkappa}{\varkappa (aa - bb)(aa - cc)} (bbcc - (bb - aa)(cc - aa)\cos\alpha^2)$$

$$\text{II. } d\beta \sin\beta \cos\beta = \frac{d\varkappa}{\varkappa (aa - bb)(bb - cc)} (aacc - (cc - bb)(aa - bb)\cos\beta^2)$$

$$\text{III. } d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = \frac{-d\varkappa}{\varkappa (aa - cc)(bb - cc)} (aabb - (aa - cc)(bb - cc)\cos\gamma^2)$$

sive has integrabiles:

$$\text{I. } + \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{-(bb - aa)(cc - aa)\, d\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{bbcc - (bb - aa)(cc - aa)\cos\alpha^2}$$

$$\text{II. } + \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{-(cc - bb)(aa - bb)\, d\beta \sin\beta \cos\beta}{aacc - (cc - bb)(aa - bb)\cos\beta^2}$$

$$\text{III. } + \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{-(aa - cc)(bb - cc)\, d\gamma \sin\gamma \cos\gamma}{aabb - (aa - cc)(bb - cc)\cos\gamma^2}$$

quarum integralia sunt:

$$\frac{A}{\varkappa\varkappa} = bbcc - (bb - aa)(cc - aa)\cos\alpha^2$$

$$\frac{B}{\varkappa\varkappa} = aacc - (cc - bb)(aa - bb)\cos\beta^2$$

$$\frac{C}{\varkappa\varkappa} = aabb - (aa - cc)(bb - cc)\cos\gamma^2$$

ubi quidem constantium A, B, C, binae sunt arbitrariae, at tertiam ita definiri oportet, ut fiat

$$A(cc - bb) + B(aa - cc) + C(bb - aa) = 0.$$

Vel posito

$$A = \mathfrak{A}(bb - aa)(cc - aa);\quad B = \mathfrak{B}(cc - bb)(aa - bb);\quad C = \mathfrak{C}(aa - cc)(bb - cc)$$

debet

debet esse $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$. Hinc ergo erit

$$\cos\alpha^2 = \frac{bbccgg - \mathfrak{A}(bb-aa)(cc-aa)}{(bb-aa)(cc-aa)gg} = \frac{bbcc}{(bb-aa)(cc-aa)} - \frac{\mathfrak{A}}{gg}$$

$$\cos\beta^2 = \frac{aacc}{(cc-bb)(aa-bb)} - \frac{\mathfrak{B}}{gg}$$

$$\cos\gamma^2 = \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)} - \frac{\mathfrak{C}}{gg}.$$

Ponamus brevitatis gratia:

$$\frac{bbcc}{(bb-aa)(cc-aa)} = \mathfrak{D};\quad \frac{aacc}{(aa-bb)(cc-bb)} = \mathfrak{E};\ \text{et}$$

$$\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)} = \mathfrak{F};$$

ut sit $\mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} = 1$, uti est $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$.
erit

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\mathfrak{D}gg - \mathfrak{A})}}{g};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{(\mathfrak{E}gg - \mathfrak{B})}}{g};\ \text{et}\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{(\mathfrak{F}gg - \mathfrak{C})}}{g},$$

quibus valoribus in aequatione primum inventa substitutis habebitur:

$$\frac{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\,dt}{aabbcc} = \frac{g\,dg}{\sqrt{(\mathfrak{D}gg-\mathfrak{A})(\mathfrak{E}gg-\mathfrak{B})(\mathfrak{F}gg-\mathfrak{C})}}$$

Cujus integratio, paucissimis casibus exceptis, receptas expressiones arcuum circularium vel logarithmorum respuit.

COROLL. 1.

738. Nisi ergo duo corporis momenta principalia inter se fuerint aequalia, motus gyratorius circa axem variabilem non est uniformis; ac determinatio quidem celeritatis angularis ad quodvis tempus maximam parit difficultatem.

COROLL. 2.

739. Inventa autem celeritate angulari g ad tempus elapsum $= t$, facile positio axis gyrationis respectu axium principalium definitur per formulas pro arcubus α, β, γ, inventas.

PRO-

PROBLEMA 77.

740. Iisdem positis, atque in praecedente problemate, ex dato axe gyrationis, circa quem corpus initio data celeritate angulari gyrari coepit, ad datum tempus celeritatem angularem et axis gyrationis positionem respectu axium principalium determinare.

SOLUTIO.

Sit IE axis, circa quem corpus initio gyrari coepit, celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, pro cujus loco sint arcus $AE = \mathfrak{a}$, $BE = \mathfrak{b}$, et $CE = \mathfrak{c}$. Tum vero cum momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, sint inaequalia, sit aa maximum, bb medium, et cc minimum, ponanturque numeri hinc formandi $\frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)} = A$; $\frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)} = B$; et $\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)} = C$; atque $\frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)} = D$, ut sit $A - B + C = 1$ et $DD = ABC$. Pro praecedentibus ergo formulis erit $\mathfrak{D} = A$, $\mathfrak{E} = -B$, et $\mathfrak{F} = C$, et elapso tempore t celeritas angularis $\mathfrak{z}$ ex hac aequatione differentiali determinari debet, Fig. 89.

$$\frac{dt}{2D} = \frac{\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z}}{\sqrt{(A\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \mathfrak{A})(-B\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \mathfrak{B})(C\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \mathfrak{C})}}$$

cujus integratio ita est instituenda, ut posito $t = 0$ fiat $\mathfrak{z} = \varepsilon$. Deinde vero habebitur pro arcubus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, et $CO = \gamma$,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(A\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \mathfrak{A})}}{\mathfrak{z}};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{(-B\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \mathfrak{B})}}{\mathfrak{z}};\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{(C\mathfrak{z}\mathfrak{z} - \mathfrak{C})}}{\mathfrak{z}};$$

qui cum initio fuerint $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, constantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ita determinantur, ut sit

$$\mathfrak{A} = (A - \cos\mathfrak{a}^2)\varepsilon\varepsilon;\ \mathfrak{B} = -(B + \cos\mathfrak{b}^2)\varepsilon\varepsilon;\ \mathfrak{C} = (C - \cos\mathfrak{c}^2)\varepsilon\varepsilon.$$

Quamobrem habebimus:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{a}^2 - A\varepsilon\varepsilon + A\mathfrak{z}\mathfrak{z})}}{\mathfrak{z}}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{b}^2 + B\varepsilon\varepsilon - B\mathfrak{z}\mathfrak{z})}}{\mathfrak{z}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{c}^2 - C\varepsilon\varepsilon + C\mathfrak{z}\mathfrak{z})}}{\mathfrak{z}}$$

et integrari oportet hanc formulam

$$dt = \frac{D g dg}{\sqrt{(ee\cos a^2 - Aee + Agg)(ee\cos b^2 + Bee - Bgg)(ee\cos c^2 - Cee + Cgg)}}.$$

Ad has formulas contrahendas, statuamus $\frac{gg - ee}{ee} = v$, ut fiat $g = e\sqrt{(1+v)}$ atque

$$2edt = \frac{Ddv}{\sqrt{(\cos a^2 + Av)(\cos b^2 - Bv)(\cos c^2 + Cv)}}$$

quae ita integrari debet, ut posito $t = 0$ fiat $v = 0$, tum vero erit

$$\cos\alpha = \frac{e}{g}\sqrt{(\cos a^2 + Av)}; \quad \cos\beta = \frac{e}{g}\sqrt{(\cos b^2 - Bv)};$$

$$\cos\gamma = \frac{e}{g}\sqrt{(\cos c^2 + Cv)};$$

vel etiam:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\cos a^2 + Av)}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{(\cos b^2 - Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}; \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{(\cos c^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}.$$

Quodsi ergo ad datum tempus t valorem ipsius v assignare valuerimus, tam celeritatem angularem $g = e\sqrt{(1+v)}$ quam positionem axis gyrationis IO respectu axium principalium cognoscemus,

COROLL. 1.

741. Si in statu initiali arcuum a, b, c, unus evanescat, reliqui erunt quadrantes, et axis gyrationis primus in aliquem axium principalium incidit, circa quem corpus constanter motu aequabili gyrari perget.

COROLL. 2.

742. Cum sit $\frac{dg}{gg} = \frac{dt.\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{D}$, et D sit quantitas positiva, patet, quamdiu polus gyrationis O in spatio ABC fuerit situs, seu cosinus arcuum α, β, γ positivi, celeritatem gyratoriam, quatenus in sensum ABC dirigitur, augeri.

COROLL. 3.

Fig. 94. 743. Sin autem polus gyrationis, productis quadrantibus in spatia αABb; βBCc; γCAa, quae sunt etiam quadrantes, cadat, celeritas minuetur:

nuetur; angebitur autem in quadrantibus $\alpha A a$, $\mathfrak{C} B b$, $\gamma C c$, perinde atque in principali ABC.

SCHOLION. 1.

744. Haec probe notasse juvat, ne formula irrationali utentes ambiguitate signi decipiamur, quare si fuerint cosinus arcuum a, b, c positivi vel saltem eorum productum positivum, primo initio celeritas u crescit, ideoque v positivum consequitur valorem. Formula autem integranda ita est comparata, ut neque algebraice neque per arcus circulares vel logarithmos expediri queat, sed ejus integrale per quadraturas nobis concedi postulare cogimur. Tametsi enim per arcus sectionum conicarum negotium expediri potest, tamen inde nihil plane lucrari licet, ut praestare videatur, consueto more per quadraturas uti. Quodsi enim talis scribendi ratio $\Pi x\,(f)$ denotet arcum sectionis conicae, cujus semiparameter $= 1$ et semiaxis transversus $= f$, qui arcus a vertice captus respondeat abscissae $= x$; ita ut $\sin f > 0$; sectio conica sit ellipsis, $\sin f < 0$, hyperbola, et si $f = \infty$ parabola, nostra formula integranda $\int \frac{dv}{\sqrt{(a + Av)(b - Bv)(c + Cv)}}$ ubi brevitatis ergo litteras a, b, c, pro $\cos a^2$, $\cos b^2$, $\cos c^2$ pono, ad partem algebraicam, arcum ellipticum, et arcum hyperbolicum reducitur. Erit enim

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}} = \text{Const} + \frac{2A\sqrt{(b-Bv)(c+Cv)}}{(Ac-Ca)\sqrt{(a+Av)}}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{A(Bc+Cb)}}\,\Pi\,\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\left(1-\sqrt{\frac{A(b-Bv)}{C}}\right)\left(\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\right)$$
$$- \frac{2}{\sqrt{C(Ba+Ab)}}\,\Pi\,\frac{C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\left(\sqrt{\frac{(Ba+Ab)(c+Cv)}{(Bc+Cb)(a+Av)}}-1\right)\left(\frac{-C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\right)$$

ubi sumsi esse $Ac > Ca$, si enim secus eveniret, literas a, A, et c, C, inter se permutari deberent. Hinc autem certe nullam utilitatem ad calculum prosequendum adipiscimur, multo minus inde ad datum tempus t valorem ipsius v colligere licebit, in quo tamen cardo quaestionis versatur. Ceterum casus, quo $Ac = Ca$, hinc excluditur, qui autem ob hoc ipsum faciliorem evolutionem admittit, et quem propterea seorsim tractari operae erit pretium.

SCHO-

SCHOLION. 2.

745. Casus hinc sponte excluduntur, quibus arcuum a, b, c quidam evanescit, quoniam tum primo motus initio axis gyrationis in aliquem axium principalium incideret, ideoque idem perpetuo conservaretur. Quod etiam nostrae formulae declarant, nam si $a = 0$, et $\cos a = 1$, erit $\cos b = 0$ et $\cos c = 0$, unde formulae $\cos \beta = \frac{\sqrt{-Bv}}{\sqrt{(1+v)}}$ et $\cos \gamma = \frac{\sqrt{Cv}}{\sqrt{(1+v)}}$ subsistere nequeunt, nisi sit $v = 0$, et $\vartheta = \varepsilon$, ita ut sit $\cos \beta = 0$ et $\cos \gamma = 0$, ac polus gyrationis Θ constanter maneat in A. Idem evenit si $c = 0$, ubi polus gyrationis O constanter manet in C, et $\vartheta = \varepsilon$. Hoc autem minus apparet, si initio E fuerit in B, seu $b = 0$ et $\cos a = 0$ atque $\cos c = 0$; formulae enim dant

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{Av}}{\sqrt{(1+v)}}; \ \cos \beta = \frac{\sqrt{(1-Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}; \text{ et } \cos \gamma = \frac{\sqrt{Cv}}{\sqrt{(1+v)}}$$

ubi v videtur valorem positivum habere posse. At cum sit

$$2\varepsilon dt = \frac{D\,dv}{v\sqrt{AC(1-Bv)}} = \frac{dv\sqrt{B}}{v\sqrt{(1-Bv)}}, \text{ ob } D = \sqrt{ABC},$$

haec aequatio ita integrata, ut posito $v = 0$ fiat $t = 0$, dat

$$\frac{2\varepsilon t}{\sqrt{B}} = l\,\frac{1+1}{1-1} - l\,\frac{1+\sqrt{(1-Bv)}}{1-\sqrt{(1-Bv)}}$$

unde manifestum est, nonnisi elapso tempore infinito, hoc est nunquam, litteram v valorem nihilo majorem acquirere posse. Semper ergo polus gyrationis O puncto B manebit affixus, atque $\vartheta = \varepsilon$. Ceterum si arcuum a, b, c, unicus tantum sit quadrans, primo initio celeritas angularis non mutatur ob $d\vartheta = 0$; deinceps vero res ita se habebit. Sit primo $a = 90°$, seu cadat punctum E in quadrantem BC, ut sit $\cos c = \sin b$, erit $\cos \alpha = \frac{\sqrt{Av}}{\sqrt{(1+v)}}$; $\cos \beta = \frac{\sqrt{(\cos b^2 - Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}$; et $\cos \gamma = \frac{\sqrt{(\sin b^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}$; unde patet v obtinere valorem positivum, foreque

$$2\varepsilon dt = \frac{D\,dv}{\sqrt{Av(\cos b^2 - Bv)(\sin b^2 + Cv)}}.$$

Cum ergo sit $\cos \alpha > 0$ erit $\alpha < 90°$, et polus gyrationis a quadrante BC propius ad A accedet, fietque $\vartheta > \varepsilon$, idemque eveniet, si polus gyrationis fuerit in quadrante AB. At si polus gyrationis sit in quadrante AC, ob $\cos b = 0$, erit

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\cos a^2 + Av)}}{\sqrt{(1+v)}}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{-Bv}}{\sqrt{(1+v)}}$; $\cos\gamma = \frac{\sqrt{(\cos c^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}$

ac necesse est, sit v quantitas negativa crescens saltem ab initio. Sit ergo $v = -u$, et cum edt positivum valorem habere debeat, capi oportet $\sqrt{Bu}$ negative, et fiet $\beta > 90°$, ideoque polus gyrationis magis a B recedet, et celeritas $g = e\sqrt{(1-u)}$ minuetur.

SCHOLION. 3.

746. Praeterire hic non possum insignem hujus motus proprietatem, quae in hoc consistit, quod corporis vis viva perpetuo maneat eadem. Hic autem notari convenit, si corpus circa quempiam axem gyretur celeritate angulari $= g$, sitque ejus momentum inertiae respectu hujus axis $= Mkk$, fore ejus vim vivam $= Mkkgg$. Hoc praemisso cum sit nostro casu $Mkk = M(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2)$, tum vero $gg\cos\alpha^2 = ee(\cos a^2 + Av)$; $gg\cos\beta^2 = ee(\cos b^2 - Bv)$; $gg\cos\gamma^2 = ee(\cos c^2 + Cv)$; erit corporis circa axem IO celeritate angulari $= g$ gyrantis vis viva $= Mee(aa\cos a^2 + bb\cos b^2 + cc\cos c^2 + v(Aaa - Bbb + Ccc))$. Est vero $Aaa - Bbb + Ccc = 0$, ideoque vis viva non pendet ab v, et primae impressae semper manet aequalis. Quod autem in genere $Mkkgg$ exprimat corporis vim vivam, seu aggregatum omnium particularum per quadrata celeritatum multiplicatarum, evidens est, concipiatur enim elementum corporis dM ab axe gyrationis distans intervallo $= r$, est ejus celeritas $= gr$, ideoque ejus vis viva $= ggrrdM$: unde fit totius corporis vis viva $= gg\int rrdM = Mkkgg$ ob $\int rrdM = Mkk$.

PROBLEMA. 78.

747. Positis adhuc iisdem, si initio axis gyrationis ita fuerit comparatus, ut sit $\cos a^2 : \cos c^2 = A : C = cc(bb - cc) : aa(aa - bb)$, ad quodvis tempus elapsum t positionem axis gyrationis respectu axium principalium definire.

SOLUTIO.

Ponamus $\cos a^2 = An$; ut sit $\cos c^2 = Cn$, erit $\cos b^2 = 1 - (A + C)n = 1 - (1 + B)n$: Hinc posito $g = e\sqrt{(1+v)}$ erit

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{A(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{(1 - n - Bn - Bv)}}{\sqrt{(1+v)}}$; $\cos\gamma = \frac{\sqrt{C(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}}$

atque $2\epsilon dt = \frac{dv\sqrt{B}}{(n+v)\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}$ ob $D = ABC$.

Hic autem assumimus initio polum gyrationis E intra quadrantem ABC extitisse, ut cosinus tam arcuum a, b, c, quam saltem mox ab initio α, β, γ, sint positivi. Hinc igitur integrando adipiscimur.

$$2\epsilon t = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(1-n)}}\, l\, \frac{\sqrt{(1-n)}+\sqrt{(1-n-Bn)}}{\sqrt{(1-n)}-\sqrt{(1-n-Bn)}} - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(1-n)}}$$
$$l\, \frac{\sqrt{(1-n)}+\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}{\sqrt{(1-n)}-\sqrt{(1-n-Bn-Bv)}}$$

Ponamus ad abbreviandum $\frac{\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{B}} = \sqrt{m}$, ut fiat

$$2\epsilon t\sqrt{m} = l\, \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-v)}} - l\, \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n-v)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n-v)}} \text{ et}$$

sumto e pro numero, cujus logarithmus est $= 1$, statuatur $e^{2\epsilon t\sqrt{m}} = T$, fietque $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n-v)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n-v)}}\, T = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)}}$ unde porro colligitur,

$$\sqrt{(m-n-v)} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}-T(\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)})}{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}+T(\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)})}\sqrt{m}$$

eritque $1-n = Bm$ et $\cos b^2 = B(m-n)$ dum est $\cos a^2 = An$ et $\cos c^2 = Cn$; invento autem v est primo $g = \epsilon\sqrt{(1+v)}$ et

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{A(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{B(m-n-v)}}{\sqrt{(1+v)}};\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{C(n+v)}}{\sqrt{(1+v)}}.$$

Quo haec magis contrahamus sit $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m}-\sqrt{(m-n)}} = k$, unde fit $\sqrt{(m-n)} = \frac{k-1}{k+1}\sqrt{m}$, et $\sqrt{(m-n-v)} = \frac{k-T}{k+T}\sqrt{m}$, hincque porro $v = m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2$; et ob $n = m - m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = \frac{4mk}{(k+1)^2}$, erit $n+v = m - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2 = \frac{4mkT}{(k+T)^2}$.

Quocirca si pro motu primum impresso fuerit

cosa

$\cos a = \frac{2\sqrt{Amk}}{k+1}$; $\cos b = \frac{(k-1)\sqrt{Bm}}{k+1}$; $\cos c = \frac{2\sqrt{Cmk}}{k+1}$

et celeritas angularis $= \varepsilon$ in sensum ABC, erit elapso tempore t, positoque $e^{2\varepsilon t\sqrt{m}} = T$, primo celeritas angularis $\varepsilon = \varepsilon\sqrt{\left(1 + m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2\right)}$; deinde vero pro loco poli gyrationis O

$\cos\alpha = \frac{2\varepsilon\sqrt{AmkT}}{\varepsilon(k+T)}$; $\cos\beta = \frac{\varepsilon(k-T)\sqrt{Bm}}{\varepsilon(k+T)}$; $\cos\gamma = \frac{2\varepsilon\sqrt{CmkT}}{\varepsilon(k+T)}$,

tum vero est $dv = 2\varepsilon dt \cdot \frac{4mkT(k-T)\sqrt{m}}{(k+T)^3}$.

Hinc patet, primo instanti, quo $T = 1$; numerum v a nihilo crescere, donec fiat $T = k$, seu $\varepsilon t\sqrt{m} = lk$, hoc est elapso tempore $t = \frac{lk}{2\varepsilon\sqrt{m}}$; quo fit $\varepsilon = \varepsilon\sqrt{\left(1 + m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right)}$, et celeritas angularis maxima: simulque erit

$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{Am}$; $\cos\beta = 0$, seu $\beta = 90°$ et $\cos\gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{Cm}$

ita ut jam polus gyrationis pervenerit in arcum AC, eum mox transgressurus. Postea enim numerus v iterum minuetur, atque adeo evanescet si $\frac{T-k}{k+T} = \frac{k-1}{k+1}$, hoc est si $T = kk$, ideoque elapso tempore $t = \frac{lk}{\varepsilon\sqrt{m}}$, quod illius est duplum, hicque fit $\varepsilon = \varepsilon$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{Amk}}{k+1}$; $\cos\beta = \frac{-(k-1)\sqrt{Bm}}{k+1}$; $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{Cmk}}{k+1}$. Hic scilicet ultra quadrantem AC similem situm habebit respectu poli ipsi B oppositi, ad quem continuo propius accedet, eumque adeo elapso tempore infinito attinget; posito enim $t = \infty$ quo fit $T = \infty$, erit $\varepsilon = \varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{4mk}{(k+1)^2}\right)}$, hicque propterea celeritas angularis minima: tum vero erit $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{Bm}$ et $\cos\gamma = 0$. At ob $1 - n = 1 - \frac{4mk}{(k+1)^2} = Bm$, evidens est esse $\cos\beta = -1$,

COROLL. 1.

748. Numerum n ita assumi oportet, ut An et Cn sint unitate minores; quo accepto erit $m = \frac{1-n}{B}$, et $k = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{(m-n)}}{\sqrt{m} - \sqrt{(m-n)}}$. Inter numeros autem m et k haec relatio intercedit, ut sit $m = \frac{(k+1)^2}{4k + B(k+1)^2}$, unde fit $n = \frac{4k}{4k+B(k+1)^2}$ et $\cos b = \frac{(k-1)\sqrt{B}}{\sqrt{(4k+B(k+1)^2)}}$ quae semper est unitate minor ob $k > 1$.

COROLL. 2.

749. Eandem rationem inter cosinus arcuum a et c constitutam constanter servant cosinus arcuum α et γ: et dum polus O per quadrantem AC transit, ubi fit $\beta = 90°$ est $\cos\alpha = \frac{e}{s}$, $\frac{(k+1)\sqrt{A}}{\sqrt{(4k+B(k+1)^2)}}$ at $s = e\sqrt{\left(1 + \frac{(k-1)^2}{4k+B(k+1)^2}\right)} = \frac{e(k+1)\sqrt{(1+B)}}{\sqrt{(4k+B(k+1)^2)}}$, ergo $\cos\alpha = \sqrt{\frac{A}{1+B}}$ et $\cos\gamma = \sqrt{\frac{C}{1+B}}$, seu $\cos\alpha = \frac{c\sqrt{(bb-cc)}}{\sqrt{(aa-cc)(aa-bb+cc)}}$ et $\cos\gamma = \frac{a\sqrt{(aa-bb)}}{\sqrt{(aa-cc)(aa-bb+cc)}}$.

COROLL. 3.

750. Dum autem axis gyrationis O per quadrantem AC transit, eius respectu est momentum inertiae $M(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2) = \frac{Maacc}{aa-bb+cc}$, quod minus est quam Mbb; atque etiam minus quam fuerat motus initio, ubi erat $= Mbb \cdot Bm$ ob $Aaa + Ccc = Bbb$. Erat ergo $= Mbb \cdot \frac{B(k+1)^2}{4k+B(k+1)^2} = \frac{Maabbcc(k+1)^2}{4kbb(aa-bb+cc)\,aacc(k-1)^2}$.

EXEMPLUM.

Fig. 95. 751. Coeperit corpus initio gyrari circa polum E in quadrante AC situm, in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut fuerit $\cos AE = \sqrt{\frac{A}{B+1}}$ et $\cos CE = \sqrt{\frac{C}{B+1}}$, posito brevitatis gratia

A =

$$A = \frac{bbcc}{(aa-bb)\,(aa-cc)};\quad B = \frac{aacc}{(aa-bb)\,(bb-cc)};\quad C = \frac{aabb}{(aa-cc)\,(bb-cc)},$$

hincque $A + C = B + 1$; ad quem casum solutio generalis deducitur sumendo $k = 1$ et $m = \frac{1}{B+1}$. Iam labente tempore polus gyrationis ex E in alterum quadrantam AbC transibit, existente b polo ipsi B opposito: atque elapso tempore $= t$ min. sec. si capiatur $T = e^{2\varepsilon t} : \surd(1+B)$, polus gyrationis reperietur in O, ut sit

$$\cos AO = \frac{2\surd AT}{\surd(B(1+T)^2+4T)}, \text{ et } \cos CO = \frac{2\surd CT}{\surd(B(1+T)^2+4T)}.$$

Ibique celeritas angularis erit $= \dfrac{\varepsilon\surd(B(1+T)^2+4T)}{(1+T)\surd(1+B)}$.

Cum ergo sit

$$\sin AO = \frac{\surd(B(T-1)^2+4CT)}{\surd(B(1+T)^2+4T)} \text{ et } \sin CO = \frac{\surd(B(T-1)^2+4AT)}{\surd(B(1+T)^2+4T)}$$

erit $\cos ACO = \dfrac{2\surd AT}{\surd(B(T-1)^2+4AT)}$ et $\sin ACO = \dfrac{(T-1)\surd B}{\surd(B(T-1)^2+4AT)}$

atque $\cos CAO = \dfrac{2\surd CT}{\surd(B(T-1)^2+4CT)}$ et $\sin CAO = \dfrac{(T-1)\surd B}{\surd(B(T-1)^2+4CT)}$.

Porro est $\cos bO = \dfrac{(T-1)\surd B}{\surd(B(1+T)^2+4T)}$ et $\sin bO = \dfrac{2\surd(B+1)T}{\surd(B(1+T)^2+4T)}$

ideoque $\cos AbO = \surd\dfrac{A}{B+1}$ et $\cos CbO = \surd\dfrac{C}{B+1}$. Cum ergo sit $AbO = AE$ et $CbO = CE$, polus gyrationis O ab E ad b per circulum maximum transfertur, atque dato tempore t percurrit arcum EO ut sit $\tang EO = \dfrac{(T-1)\surd B}{2\surd(B+1)T}$. Posito ergo hoc arcu confecto $EO = \vartheta$, ob

$$\tang \vartheta = \frac{(T-1)\surd B}{2\surd(B+1)T}, \text{ fit } \surd T = \frac{\sin\vartheta\surd(B+1)+\surd(B+\sin\vartheta^2)}{\cos\vartheta\surd B}$$

unde ipsum tempus t, quo arcus $EO = \vartheta$ absolvitur, erit

$$t = \frac{\surd(B+1)}{\varepsilon}\, l\, \frac{\sin\vartheta.\surd(B+1)+\surd(B+\sin\vartheta^2)}{\cos\vartheta\surd B}$$

et celeritas angularis, dum polus gyrationis est in O, reperitur $= \frac{\varepsilon\sqrt{B}}{\sqrt{(B+\sin\vartheta^2)}}$. Momentum inertiae respectu axis IE est $= \frac{M(Aaa+Ccc)}{B+1} = \frac{B}{B+1}.Mbb$, et vis viva $= \frac{B\varepsilon\varepsilon}{B+1}.Mbb$, quae perpetuo manet eadem.

SCHOLION.

752. Si initio motus gyratorius fuerit in sensum contrarium directus, polus gyrationis ex E per circulum maximum ad polum B accederet, scilicet in quadrante AbC poli cognomines contrarium sensum praebent, atque in quadrante ABC. Ceterum hoc casu notatu dignum est, quod polus gyrationis O ad alterutrum polorum B vel b continuo propius accedat, atque adeo satis cito attingat: statim enim ac numerus $T = e^{2\varepsilon t:\sqrt{(1+B)}}$ mediocriter fit magnus, quod plerumque mox evenire solet, declinatio axis gyrationis IO ab axe Bb non amplius erit sensibilis. Hic ergo circulus maximus BEb, qui quadrantem AC ita secat in E, ut $\sin AE = \sqrt{\frac{C}{B+1}}$ et $\cos AE = \sqrt{\frac{A}{B+1}}$ seu $\tang AE = \sqrt{\frac{C}{A}} = \frac{a\sqrt{(aa-bb)}}{c\sqrt{(bb-cc)}}$, hac insigni praeditus est proprietate, ut si axis gyrationis semel in eo fuerit, in eo perseverat, ac polus gyrationis sive ad b sive ad B accedat, prout gyratio fiat vel in sensum ABC vel in contrarium. Videri hinc posset, axem gyrationis, quicunque initio fuerit, semper tandem in aliquem principalium incidere, nisi in capite praecedente res secus evenisset. Atque adeo jam demonstrabo, hunc casum tractatum solum esse, quo axis gyrationis tandem cum aliquo principalium eoque medio coalescat, in reliquis vero omnibus hoc nunquam, ne elapso quidem tempore infinito, usu venire: ad hoc autem necesse est, ut formulam superiorem integralem diligentius scrutemur, valoresque, quos ad quodvis tempus recipit, quodammodo assignare valeamus. In quo negotio, cum alia subsidia analytica vix plus luminis polliceantur, quam ejus reductio ad arcus sectionum conicarum, ad subsidium quoddam mechanicum confugiamus, motum scilicet penduli per circulum; quandoquidem hujus motus determinatio simili formula integrali continetur, hoc tamen non obstante, qualis hic motus sit futurus, quodammodo aestimare licet.

PRO-

PROBLEMA 79.

753. Concessa motus determinatione, qua corpus grave super peripheria circuli vel oscillando vel revolvendo movetur, ad quodvis tempus determinare positionem axis gyrationis respectu axium principalium, si quidem initio datus fuerit axis gyrationis cum celeritate angulari.

SOLUTIO.

Cum tempus determinandum sit $t = \int \frac{dv\sqrt{ABC}}{2\varepsilon\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}$ Fig. 96. scribendo tantisper litteras a, b, c pro $\cos\mathfrak{a}^2$, $\cos\mathfrak{b}^2$, $\cos\mathfrak{c}^2$, consideremus in genere motum gravis per circulum, cujus radius sit $ca = cb = r$, ubique celeritas tanta sit, ac si corpus ex puncto g eo esset delapsum. Ponatur ergo $cg = p$, tum vero initium motus capiatur in e, ut sit $cd = q$, existente scilicet recta gab vertigali et de horizontali. Elapso jam tempore t grave ex e perveniat in z, ut ducta horizontali vz, sit $dv = kv$, siquidem in nostra formula v est numerus absolutus. Sit tantisper $cv = z$, erit elementum arcus in $z = \frac{-rdz}{\sqrt{(rr-zz)}}$, et quia celeritas in z est $= 2\sqrt{g(p+z)}$, fiet elementum temporis $dt = \frac{rdz}{2\sqrt{g(p+z)(r-z)(r+z)}}$. Ergo ob $z = kv - q$ habebitur

$$dt = \frac{krdv}{2\sqrt{g(p-q+kv)(r+q-kv)(r-q+kv)}}$$

nostra autem formula construenda simili modo expressa est:

$$dt = \frac{kdv\sqrt{k}}{2\varepsilon\sqrt{\left(\frac{ak}{A}+kv\right)\left(\frac{bk}{B}-kv\right)\left(\frac{ck}{C}+kv\right)}};$$

ad quam illa perducitur ponendo primum $\frac{kr}{2\sqrt{g}} = \frac{k\sqrt{k}}{2\varepsilon}$, unde fit $r = \frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}$. Deinde in denominatoribus factores medii aequati praebent $r+q = \frac{bk}{B}$, hineque $q = \frac{bk}{B} - \frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}$. Porro factores primi ac tertii promiscue aequari possunt: si primus primo ac tertius tertio aequalis statuatur, fit

p—

$p - q = \frac{ak}{A}$ et $p = \frac{ak}{A} + \frac{bk}{B} - \frac{\surd gk}{e}$

$r - q = \frac{ck}{C}$ seu $\frac{2\surd gk}{e} - \frac{bk}{B} = \frac{ck}{C}$ vel $\frac{2\surd g}{e} = \frac{(Bc + Cb)\surd k}{BC}$

unde fit $\surd k = \frac{2BC\surd g}{e(Bc + Cb)}$ et $k = \frac{4BBCCg}{ee(Bc + Cb)^2}$. Hinc porro $r = \frac{2BCg}{ee(Bc + Cb)}$, $q = \frac{2BC(Cb - Bc)g}{ee(Bc + Cb)^2}$; $p = \frac{4BBCCag + 2ABC(Cb - Bc)g}{Aee(Bc + Cb)^2}$.

Ad datum ergo tempus t sequenti modo numerus v definitur: descripto circulo cujus radius $ca = cb = \frac{2BCg}{ee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)}$ corpus grave per ejus peripheriam ita moveatur, ac si ex puncto g eo esset delapsum, existente $cg = \frac{4BBCC\cos\mathfrak{a}^2 + 2ABC(C\cos\mathfrak{b}^2 - B\cos\mathfrak{c}^2)}{Aee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)^2}\, g$ seu $bg = \frac{4BCC(A\cos\mathfrak{b}^2 + B\cos\mathfrak{a}^2)}{Aee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)^2}\, g$ et $ag = \frac{4BBC(C\cos\mathfrak{a}^2 - A\cos\mathfrak{c}^2)}{Aee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)^2}\, g$

Tum in hoc circulo capiatur intervallum $cd = \frac{2BC(C\cos\mathfrak{b}^2 - B\cos\mathfrak{c}^2)}{ee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)^2}\, g$ seu $bd = \frac{4BCCg\cos\mathfrak{b}^2}{ee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)^2}$, sumtoque puncto e pro motus initio, unde corpus per z progrediatur, abscindatur arcus ez tempore proposito t percursus, huicque respondens altitudo dv sit $= u$, qua pro cognita assumta, erit $v = \frac{ee(B\cos\mathfrak{c}^2 + C\cos\mathfrak{b}^2)^2 u}{4BBCCg}$, unde deinceps pro superioribus problematibus colligitur celeritas angularis $g = \varepsilon\surd(1 + v)$, et pro praesente poli gyrationis situ: $\cos\alpha = \frac{\surd(\cos\mathfrak{a}^2 + Av)}{\surd(1 + v)}$; $\cos\zeta = \frac{\surd(\cos\mathfrak{b}^2 - Bv)}{\surd(1 + v)}$; $\cos\gamma = \frac{\surd(\cos\mathfrak{c}^2 + Cv)}{\surd(1 + v)}$.

COROLL. 1.

754. Cum sit $dg = cg - cd = p - q = \frac{ak}{A}$, erit altitudo pun-

cti

ti g supra horizontalem de nempe $dg = \frac{4BBCCg \cos a^2}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)}$, quae cum sit necessario positiva, corpus motu suo ad punctum e pertingere potest.

COROLL. 2.

755. Tum vero altitudo bd non solum etiam est positiva, sed etiam minor diametro circuli $ab = \frac{4BCg}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)}$: erit enim $ad = \frac{4BBCg\cos c^2}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2}$, unde punctum e, ex quo motus initium ducimus, semper certo in peripheria circuli reperitur.

COROLL. 3.

756. Cum igitur grave certo ex e ad imum punctum b descendat, ubi fit $u = bd = \frac{4BCCg \cos b^2}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2}$, qui ejus est valor maximus positivus, hoc tempore erit $v = \frac{\cos b^2}{B}$, et $s = \frac{\varepsilon\surd(B + \cos b^2)}{\surd B}$, quae est celeritas angularis maxima, fietque tum $\cos\zeta = 0$, hoc est, polus gyrationis per quadrantem AC transit.

SCHOLION.

757. Cum igitur polus gyrationis, ubicunque initio fuerit, semper post aliquod tempus transeat per quadrantem AC, ubi celeritas angularis est maxima, hoc tempus tanquam motus initium spectare licebit, quandoquidem hinc etiam ad tempora antecedentia regredi valemus. Fuerit igitur initio polus gyrationis in quadrantis puncto E, ut sit AE $= a$ et CE $= c = 90° - a$, atque celeritas angularis $= \varepsilon$ in sensum ABC. Postea ergo polus gyrationis in sphaerae octantem AbC transibit, cum ante versatus sit in octante ABC: ubi notandum est, contrarium esse eventurum, si motus gyratorius in sensum contrarium dirigeretur. Hic autem duo casus considerandi occurrunt, prout in motu circulari punctum g vel supra circulum cadit, graveque integras revolutiones absolvit, vel intra circulum, graveque oscillationes peragit. Prius evenit, si fuerit $C\cos a^2 > A\cos c^2$, posterius vero, si $C\cos a^2 < A\cos c^2$. Ad hos casus distinguendos capiatur in quadrante AC punctum D, ut sit $C\cos AD^2 = A$ Fig. 97.

$\cos CD^2$, seu $\sin AD = \sqrt{\frac{C}{A}}$, eritque D id punctum, per quod si polus gyrationis transeat, is per quadrantem Db polum principalem b versus accedat, eoque tandem elapso tempore infinito pertingat, quem casum jam ante evolvimus. Sin autem polus gyrationis per quadrantem AC intra terminos A et D transeat, habebitur casus prior, quo $C \cos \mathfrak{a}^2 > A \cos \mathfrak{c}^2$; at si intra terminos C et D transeat, habebitur casus posterior, quo $C \cos \mathfrak{a}^2 < A \cos \mathfrak{c}^2$. Hos igitur duos casus seorsim pertractemus.

CASUS I.

Fig. 97. 758. Transeat polus gyrationis per quadrantis AC punctum E, circa quem corpus celeritate angulari ε in sensum ABC gyretur, ut sit $C \cos AE^2 > A \cos CE^2$ seu $\tang AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$; unde elapso tempore t progrediatur in O, quem locum definiri oportet. Cum igitur sit $AE = \mathfrak{a}$, $CE = \mathfrak{c} = 90° - \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b} = 90°$, describatur circulus $aze z'$, cujus radius $ea = ee = \frac{2Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2}$, et in diametro verticali ea sursum producto capiatur $ag = \frac{4C(C \cos \mathfrak{a}^2 - A \cos \mathfrak{c}^2)}{A \varepsilon\varepsilon \cos \mathfrak{c}^4} g$, graveque ex hoc puncto g delapsum per circulum revolvatur, in sensum $az'ez$, initioque, dum polus gyrationis erat in E, grave per punctum imum e transeat. Iam elapso tempore t grave ascendat ad z usque, sitque altitudo $ev = u$, eritque $v = -\frac{\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4CCg}$. Polus autem gyrationis nunc sit in O, et celeritas angularis circa eum erit $\vartheta = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4CCg}\right)}$, et pro loco puncti O erit

$$\cos AO = \frac{\varepsilon}{\vartheta} \sqrt{\left(\cos \mathfrak{a}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4CCg}\right)}; \quad \cos bO = \frac{\varepsilon}{\vartheta} \cdot \frac{\varepsilon \cos \mathfrak{c}^2 \sqrt{Bu}}{2C\sqrt{g}}$$

$$\text{et } \cos CO = \frac{\varepsilon}{\vartheta} \sqrt{\left(\cos \mathfrak{c}^2 - \frac{\varepsilon\varepsilon u \cos \mathfrak{c}^4}{4Cg}\right)}.$$

Tum vero ex motu gravis per circulum isochrono motui poli gyrationis, si

si ponamus tempus dimidiae revolutionis $= \tau$, quo grave ex e ad punctum summum a ascendit, ob $u = \frac{4Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos c^2}$, habebimus $v = -\frac{\cos c^2}{C}$, et post tempus τ erit celeritas angularis $\vartheta = \varepsilon \surd \left(1 - \frac{\cos c^2}{C}\right)$, omnium minima: polus autem gyrationis tum erit in P, ut sit
$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\vartheta} \surd \left(\cos a^2 - \frac{A \cos c^2}{C}\right)$; $\cos bP = \frac{\varepsilon \cos c}{\vartheta} \surd \frac{B}{C}$ et $\cos CP = 0$ unde polus P reperietur in quadrante Ab, ut sit $\cos bP = \sin AP =$
$\frac{\cos c . \surd B}{\surd (C - \cos c^2)} = \frac{\sin a . \surd B}{\surd (C - \sin a^2)}$ et $\cos AP = \frac{\surd (C \cos a^2 - A \sin a^2)}{\surd (C - \sin a^2)}$.
Elapso autem tempore 2τ, quo fit $u = 0$, celeritas angularis ϑ fit ut initio $= \varepsilon$, et polus gyrationis jam reperietur in quadrantis CA producti puncto e, ut sit $Ae = AE$. Elapso tempore 3τ perveniet polus gyrationis in p, ut fit $Ap = AP$ ac tempore 4τ elapso revertetur in E. Polus ergo gyrationis circa polum principalem A orbitam quasi ellipticam describet, et tempus unius revolutionis aequale erit tempori, quo grave in circulo duas integras absolvit revolutiones. Hic notari convenit, si punctum E in D incideret, punctum P in b esse casurum ob $\cos AP = 0$, tum autem foret $ag = 0$, et tempus semirevolutionis in circulo τ fieret infinitum, quemadmodum jam supra habuimus. Porro autem fit $AP = AE$, si $B = \infty$, et $C = \infty$ seu $bb = cc$, hoc est, si momenta inertiae respectu axium IB et IC sunt aequalia, qui est casus capite praecedente pertractatus.

CASUS II.

759. Transeat polus gyrationis per quadrantis AC punctum E, circa quem tum corpus celeritate angulari ε in sensum ABC gyretur, ut sit $C \cos AE^2 < A \cos CE^2$ seu $\tan AE > \surd \frac{C}{A}$, unde elapso tempore t progrediatur in O. Cum igitur sit $b = 90°$, $AE = a$ et $CE = 90° - a = c$, describatur circulus $aeze'$ diametro $ae = \frac{4Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos c^2}$, et capiatur $ag = \frac{4C(A \cos c^2 - C \cos a^2)}{A\varepsilon\varepsilon \cos c^4} g$, ut sit $eg = \frac{4CC \cos a^2}{A\varepsilon\varepsilon \cos c^4} g$. Ducta igitur horizontali fgf', grave peragat oscillationes per arcum fef', sumaturque temporis punctum, quo grave ex f' descendens transit per imum Fig. 98.

 imum

imum punctum e, pro temporis initio, unde elapso tempore t perveniat in z, et posita altitudine $ev = u$, erit $v = \frac{-eeu\cos c^4}{4CCg}$, hocque tempore celeritas angularis circa polum O erit $\varepsilon = e\sqrt{\left(1 - \frac{eeu\cos c^4}{4CCg}\right)}$, et ut ante

$$\cos AO = \frac{e}{\varepsilon}\sqrt{\left(\cos a^2 - \frac{Aeeu\cos c^4}{4CCg}\right)};\ \cos bO = \frac{e}{\varepsilon}\cdot\frac{e\cos c^2\sqrt{Bu}}{2C\sqrt{g}}$$

et $\cos CO = \frac{e}{\varepsilon}\sqrt{\left(\cos c^2 - \frac{eeu\cos c^4}{4Cg}\right)}$. Sit τ tempus dimidiae oscillationis seu ascensus per ef, atque hoc tempore elapso, ob $u = eg = \frac{4CC\cos a^2}{Aee\cos c^4}g$ et $v = \frac{-\cos a^2}{A}$, erit celeritas angularis $\varepsilon = e\sqrt{\left(1 - \frac{\cos a^2}{A}\right)}$, polusque gyrationis reperitur in P, ut sit

$$\cos AP = \frac{e}{\varepsilon}\cdot 0;\ \cos bP = \frac{e\cos a\sqrt{B}}{\varepsilon\sqrt{A}} = \frac{\cos a\cdot\sqrt{B}}{\sqrt{(A - \cos a^2)}}\ \text{et}$$

$$\cos CP = \frac{e}{\varepsilon}\sqrt{\left(\cos c^2 - \frac{C\cos a^2}{A}\right)} = \frac{\sqrt{(A\cos c^2 - C\cos a^2)}}{\sqrt{(A - \cos a^2)}}$$

unde patet polum gyrationis esse in quadrante Cb, existente $\sin CP = \frac{\cos a\sqrt{B}}{\sqrt{(A - \cos a^2)}} = \frac{\sin c\cdot\sqrt{B}}{\sqrt{(A - \sin c^2)}}$. Capiatur nunc in quadrante AC producto $Ce = CE$ et $Cp = CP$, eritque orbis ellipticus $EPepE$ via poli gyrationis, cujus singuli quadrantes EP, Pe, ep, pE, etc. tempore τ absolvantur.

Si esset $aa = bb$, foret $A = \infty$, $B = \infty$ et $CP = CE$, polusque gyrationis circulum minorem circa axem principalem IC, qui esset singularis, describeret; qui est casus capite praecedente tractatus. At si E in D caderet, ob $ag = 0$, foret $\tau = \infty$, qui est casus problematis praecedentis.

SCHOLION.

760. Cum igitur satis clare intelligamus, quomodo variatio in polo gyrationis eveniat, cum is vel circa polum principalem A vel circa C circumferatur, in orbita quasi elliptica, prout fuerit vel $\text{tang}\,AE > \sqrt{\frac{C}{A}}$ atque

atque adeo ejus locum ad quodvis tempus concessa integratione formulae differentialis assignare liceat; videamus, num etiam ejus locum absolutum ab quodvis tempus simulque positionem axium principalium definire valeamus. Equidem non sine successu hoc negotium in superiore capite expedivimus. Verum hic multo majores difficultates offendemus, quas ne concessis quidem quadraturis superare poterimus, cum res ad ejusmodi aequationes differentiales reducatur, quae non solum non integrari, sed ne ad separabilitatem quidem variabilium revocari queant.

PROBLEMA 80.

761. Si corpori rigido cuicunque initio impressus fuerit motus gyratorius circa axem per centrum inertiae transeuntem quemcunque, ad datum tempus tam situm axium principalium quam axis gyrationis respectu spatii absoluti definire. Fig. 80.

SOLUTIO.

In sphaera immobili centro inertiae corporis descripta, post tempus $= t$ corpus nunc situm teneat, ut axium principalium poli sint in A, B, C, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Tum sumto puncto Z et circulo XZ fixo, statuantur arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, atque anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$: manentibus pro polo gyrationis O arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, qui cum celeritate angulari ϑ nunc per tempus t dantur. His positis ex probl. 68. nanciscimur:

$$dl \sin l = \vartheta dt (\cos\beta \cos n - \cos\gamma \cos m);\ d\lambda \sin l^2 = -\vartheta dt (\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n)$$

$$dm \sin m = \vartheta dt (\cos\gamma \cos l - \cos\alpha \cos n);\ d\mu \sin m^2 = -\vartheta dt (\cos\gamma \cos n + \cos\alpha \cos l)$$

$$dn \sin n = \vartheta dt (\cos\alpha \cos m - \cos\beta \cos l);\ d\nu \sin n^2 = -\vartheta dt (\cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m).$$

Praecipuum autem opus hic in investigatione arcuum l, m, n consistit, qui cum ita sint comparati, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, ponatur: $\cos m = \sin l \cos\phi$ erit $\cos n = \sin l \sin\phi$, eruntque tres aequationes:

I. $dl = \vartheta dt (\cos\beta \sin\phi - \cos\gamma \cos\phi)$

II. $-dl \cos l \cos\phi + d\phi\, sl \sin\phi = \vartheta dt (\cos\gamma \cos l - \cos\alpha\, sl \sin\phi)$

III. $-dl \cos l \sin\phi - d\phi\, sl \cos\phi = \vartheta dt (\cos\alpha \sin l \cos\phi - \cos\beta \cos l)$

unde II. $\sin\phi$ — III. $\cos\phi$ praebet:

$$d\varphi \sin l = g dt (\cos\gamma \cos l \sin\varphi - \cos\alpha \sin l + \cos\beta \cos l \cos\varphi)$$

ex qua cum prima conjuncta binos arcus l et φ quaeri oportet. Posito autem $g = e\sqrt{(1+v)}$ et pro statu initiali brevitatis gratia $\cos a^2 = \mathfrak{A}$, $\cos b^2 = \mathfrak{B}$; $\cos c^2 = \mathfrak{C}$, ut sit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$, vidimus esse

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + Av}{1+v}};\ \cos\beta = \sqrt{\frac{\mathfrak{B} - Bv}{1+v}};\ \cos\gamma = \sqrt{\frac{\mathfrak{C} + Cv}{1+v}}$$

$$\text{et } 2e dt = \frac{dv\sqrt{ABC}}{\sqrt{(\mathfrak{A}+Av)(\mathfrak{B}-Bv)(\mathfrak{C}+Cv)}},\ \text{positis}$$

$$A = \frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)};\ B = \frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)};\ C = \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}$$

$$\text{et } D = \frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)}$$

ubi quidem sumimus esse $aa > bb$ et $bb > cc$.

Ponamus $\cos\beta = \sin\alpha \cos T$ et $\cos\gamma = \sin\alpha \sin T$, fietque $v = \frac{\mathfrak{B} - (1-\mathfrak{A})\cos T^2}{B + (1-A)\cos T^2}$ et $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A + (\mathfrak{A} - A)\cos T^2}{\mathfrak{B} + B + (\mathfrak{A} - A)\cos T^2}}$, ergo

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B}{\mathfrak{B} + B + (\mathfrak{A} - A)\cos T^2}}\ \text{atque } g = e\sqrt{\frac{\mathfrak{B} + B + (\mathfrak{A} - A)\cos T^2}{B + (1-A)\cos T^2}}$$

tum vero

$$g dt = \frac{D dT}{\sqrt{(B \sin T^2 + C\cos T^2)((\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A)\sin T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A)\cos T^2)}}.$$

Unde nostrae aequationes resolvendae erunt;

$$dl = g dt \sin\alpha \sin(\varphi - T)$$

$$d\varphi \sin l = g dt \sin\alpha \cos l \cos(\varphi - T) - g dt \cos\alpha \sin l$$

ubi est

$$g dt \sin\alpha = \frac{D dT\sqrt{(\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B)}}{(B\sin T^2 + C\cos T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A)\sin T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A)\cos T^2)}}$$

$$g dt \cos\alpha = \frac{D dT}{B\sin T^2 + C\cos T^2}.$$

Statuamus nunc $\varphi - T = \omega$, ut habeatur

$dl = g dt \sin\alpha \sin\omega$ et $d\omega \sin l + dT \sin l = g dt \sin\alpha \cos l \cos\omega - g dt \cos\alpha \sin l$

quarum posterior abit in

$$d\omega \sin l \sin\omega - dl \cos l \cos\omega + dT \sin l \sin\omega + \frac{D dT \sin l \sin\omega}{B\sin T^2 + C\cos T^2} = 0$$

dum prior est

dl

$$dl = \frac{DdT \sin\omega . \sqrt{(\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B)}}{(B \sin T^2 + C \cos T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A) \sin T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A) \cos T^2)}}.$$

Ponamus brevitatis gratia:

$$1 + \frac{D}{B \sin T^2 + C \cos T^2} = P \text{ et}$$

$$\frac{D\sqrt{(\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B)}}{(B \sin T^2 + C \cos T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A) \sin T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A) \cos T^2)}} = Q$$

quoniam P et Q sunt functiones cognitae ipsius T, nostrae aequationes resolvendae has induunt formas simpliciores.

$$d . \sin l \cos\omega = PdT \sin l \sin\omega \text{ et } dl = QdT \sin\omega$$

Ponamus denique $\sin l \cos\omega = x$, et $\cos l = y$, erit $\sin l \sin\omega = \sqrt{(1 - xx - yy)}$ et nostrae aequationes erunt

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx - yy)}} = PdT \text{ et } \frac{dy}{\sqrt{(1 - xx - yy)}} = - QdT.$$

Verum hic fateri cogor, ulterius me hanc resolutionem prosequi non posse; neque ergo hoc problema ad finem perducere licet *).

Posito $x = s \cos\alpha$; $y = s \cos\beta$; et $z = s \cos\gamma$, aequationes resolvendae erunt novem sequentes:

I. $dx = \frac{bb - cc}{aa} yzdt$; II. $dy = \frac{cc - aa}{bb} xzdt$; III. $dz = \frac{aa - bb}{cc} xydt$;
IV. $dl \sin l = dt(y \cos n - z \cos m)$; V. $dm \sin m = dt(z \cos l = x \cos n)$;
VI. $dn \sin n = dt(x \cos m - y \cos l)$; VII. $d\lambda \sin l^2 = - dt(y \cos m + z \cos n)$;
VIII. $d\mu \sin m^2 = - dt(z \cos n + x \cos l)$; IX. $d\nu \sin n^2 = - dt(x \cos l + y \cos m)$
unde novem quantitates x, y, z, l, m, n, λ, μ, ν definiri oportet. Trium priorum quidem solutio jam in antecedentibus problematibus est tradita; ad usum autem sequentium statuatur

$$\frac{bb - cc}{aa} = A; \quad \frac{cc - aa}{bb} = B; \quad \frac{aa - bb}{cc} = C \text{ et } xyzdt = du$$

eritque $xdx = Adu$; $ydy = Bdu$; $zdz = Cdu$
unde integrando elicitur:

$$xx = 2Au + \mathfrak{A}; \quad yy = 2Bu + \mathfrak{B}; \quad zz = 2Cu + \mathfrak{C}$$

ideoque $dt = \frac{du}{\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}}$.

Ratione autem quantitatum A, B, C eae ita inter se sunt comparatae, ut sit: $Aaa + Bbb + Ccc = 0$ et $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$; Quare fiet $aaxx + bbyy$

*) Plena solutio in fine adjicietur.

$+ bbyy + cczz = \mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc =$ quantitati constanti. Restitutis autem pro x, y, z valoribus assumtis fit

$aaxx + bbyy + cczz = ss(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2) = $ Const.

At posita massa corporis $=$ M expressio M $(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2)$ denotat momentum inertiae corporis respectu axis IO, circa quem corpus nunc gyratur, quod momentum ergo si dicatur $= Mrr$, erit $Mrrss$ vis viva corporis, quae ergo manet constans.

Deinde cum sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ erit

$$s = \sqrt{(xx + yy + zz)} = \sqrt{(2(A + B + C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$$

et ex cognitis x, y, z per u, etiam anguli α, β, γ, per u definiuntur. Atque hucusque quidem in problematibus antecedentibus pertingere licuit; nunc igitur videamus, quomodo solutio propria probl. 80, expediri queat. Omnem autem difficultatem in aequationibus IV, V, VI sitam esse patet, ad quam superandam, statuamus

$$\cos l = px, \quad \cos m = qy, \quad \text{et } \cos n = rz,$$

ut prodeant hae aequationes:

$$\text{IV. } 0 = pdx + xdp + dt(ryz - qyz) \text{ at est } yzdt = \frac{dx}{A}$$

$$\text{V. } 0 = qdy + ydq + dt(pxz - rxz) \qquad xzdt = \frac{dy}{B}$$

$$\text{VI. } 0 = rdz + zdr + dt(qxy - pxy) \qquad xydt = \frac{dz}{C}$$

unde hae aequationes in sequentes formas mutantur

$$\text{IV. } 0 = pdx + xdp + \frac{(r-q)dx}{A}; \text{ seu } \frac{dx}{x} = \frac{Adp}{q - r - Ap} = \frac{Adu}{2Au + \mathfrak{A}}$$

$$\text{V. } 0 = qdy + ydq + \frac{(p-r)dy}{B}; \text{ seu } \frac{dy}{y} = \frac{Adp}{r - q - Bq} = \frac{Bdu}{2Bu + \mathfrak{B}}$$

$$\text{VI. } 0 = rdz + zdr + \frac{(q-p)dz}{C}; \text{ seu } \frac{dz}{z} = \frac{Cdr}{p - q - Cr} = \frac{Cdu}{2Cu + \mathfrak{C}}.$$

Multiplicetur IV. per aax; V. per bby et VI. per ccz, ut habeatur

$$\text{IV. } aapxdx + aaxxdp = a^2\,\frac{(q-t)xdx}{A} = a^2(q-r)du$$

$$\text{V. } bbqydy + bbyydq = \frac{bb(r-p)ydy}{B} = bb(r-p)du$$

$$\text{VI. } ccrzdz + cczzdr = \frac{cc(p-q)zdz}{C} = cc(p-q)du.$$

Ex

Ex ternis autem primis colligitur

$$\text{I. } aapxdx = \mathrm{A}aapdu = (bb - cc)\, pdu$$
$$\text{II. } bbqydy = \mathrm{B}bbqdu = (cc - aa)\, qdu$$
$$\text{III. } ccrzdz = \mathrm{C}ccrdu = (aa - bb)\, rdu.$$

His ex aequationibus in unam summam collectis, partes posteriores se mutuo destruunt, proditque aequatio integrabilis:

$$2aapxdx + aaxxdp + 2bbqydy + bbyydq + 2ccrzdz + cczzdr = 0$$

cujus integrale est

$$aapxx + bbqyy + ccrzz = \text{Const.}$$

in quo maxima vis inest ad integrationem desideratam absolvendam, si conjungatur cum aequatione $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, quae abit in $ppxx + qqyy + rrzz = 1$. Cum enim x, y, z dentur per u ex his duabus aequationibus quantitates p et q per u et r definiri poterunt, qui in aequatione $\frac{dr}{p - q - Cr} = \frac{du}{2\mathrm{C}u + \mathfrak{C}}$ substituti perducent ad aequationem binas tantum variabiles u et r involventem, ex qua etiam r per u determinare licebit.

Primum autem observo, aequationibus nostris satisfieri posse, tribuendo litteris p, q, et r valores constantes: ad hoc enim necesse est fiat

$$q - r - \mathrm{A}p = 0;\quad r - p - \mathrm{B}q = 0;\quad p - q - \mathrm{C}r = 0;$$

unde fit $p = n(1 - \mathrm{B})$; $q = n(1 + \mathrm{A})$ et $r = n(1 + \mathrm{AB})$ si modo sit $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{ABC} = 0$, quod autem revera evenit. Erit ergo pro A, B, C valores assumtos substituendo

$$p = \frac{n(aa + bb - cc)}{bb};\quad q = \frac{n(aa + bb - cc)}{aa} \text{ et } r = \frac{ncc\,(aa + bb - cc)}{aabb}$$

quare sumto $n = \frac{maabb}{aa + bb - cc}$, collígitur

$$p = maa;\quad q = mbb;\ \text{et } r = mcc,$$

ubi coefficiens m ita debet esse comparatus, ut fiat $ppxx + qqyy + rrzz = 1$ seu $mm\,(a^4(2\mathrm{A}u + \mathfrak{A}) + b^4(2\mathrm{B}u + \mathfrak{B}) + c^4(2\mathrm{C}u + \mathfrak{C})) = 1$;

quare cum sit $\mathrm{A}a^4 + \mathrm{B}b^4 + \mathrm{C}c^4 = 0$, erit $m = \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)}}$;

simulque fit

$$aapxx + bbqyy + ccrzz = m\,(a^4(2\mathrm{A}u + \mathfrak{A}) + b^4(2\mathrm{B}u + \mathfrak{B}) + c^4(2\mathrm{C}u + \mathfrak{C}))$$

cujus ergo expressionis valor constans est $= + (\mathfrak{A}a^4 \surd\, \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)$, Observo autem, hanc integrationem non esse pro incompleta habendam, propterea quod vertex sphaerae immobilis Z pro lubitu assumi potest. Eum

ergo semper ita accipere licebit, ut quantitates p, q, r fiant constantes. Posito itaque brevitatis gratia $\surd(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4) = n$ omnia per u sequenti modo definientur, ut sit

$$x = \surd(2\mathrm{A}u + \mathfrak{A});\; p = \frac{aa}{n};\; \cos l = \frac{aa}{n}\surd(2\mathrm{A}u + \mathfrak{A})$$

$$y = \surd(2\mathrm{B}u + \mathfrak{B});\; q = \frac{bb}{n};\; \cos m = \frac{bb}{n}\surd(2\mathrm{B}u + \mathfrak{B})$$

$$z = \surd(2\mathrm{C}u + \mathfrak{C});\; r = \frac{cc}{n};\; \cos n = \frac{cc}{n}\surd(2\mathrm{C}u + \mathfrak{C}).$$

Pro ternis postremis aequationibus ob $dt = \frac{du}{xyz}$ fiet

$$d\lambda = \frac{-n\,dt\,(\mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc - 2\mathrm{A}aau)}{\mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 - 2\mathrm{A}a^4u}$$

sufficit autem unicum ternorum angulorum λ, μ, ν, determinasse, cum bini reliqui ex eo per se consient.

SCHOLION I.

762. Casu praecedentis capitis, quo erat $\mathfrak{B} = \infty$ et $\mathfrak{C} = \infty$ atque adeo $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = 1$, ob $\mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{C} = 1$, aequationes inventas ideo resolvere licuit, quod quantitates P et Q fiebant constantes, scilicet $\mathrm{P} = 1 + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}} = 1 + \frac{bb}{aa - bb} = \frac{aa}{aa - bb}$, ob $bb = cc$ et $\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{D}\surd(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}{\mathrm{B}\surd\mathfrak{A}} = \frac{bb\surd(1 - \mathfrak{A})}{(aa - bb)\surd\mathfrak{A}}$, unde $dx : dy = aa : -bb\surd\frac{1 - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} = \mathrm{P} : -\mathrm{Q}$. Ergo $dx = -\frac{\mathrm{P}dy}{\mathrm{Q}}$ et $x = \mathrm{Const.} - \frac{\mathrm{P}y}{\mathrm{Q}}$. Verum hic ratio $\mathrm{P} : \mathrm{Q}$ constans evadere nequit; ideoque non liquet, quomodo aequationibus inventis satisfieri queat, ne quidem particulariter. Quare cum talium corporum motus calculo sit intractabilis, quousque scilicet fines analyseos adhuc patent, hoc argumentum deserere cogimur, cum etiam conatus irritos proposuisse nihil luminis afferre queat. Quod autem ad rationem mechanicam attinet, motum corporum rigidorum liberum, dum a nullis viribus sollicitantur, perfecte determinasse censendi sumus, cum Analyseos defectui sit tribuendum, quod solutionem ad finem perducere non value-

volverimus. Haec autem difficultas se tantum in corporibus, quorum tria momenta inertiae principalia sunt inter se inaequalia, exerit; quae corpora cum sint pro maxime irregularibus habenda, hoc incommodum, ubi ad praxin descendimus, minus obest, quoniam rarissime ejusmodi corporum motus requiri solet. Quando autem duo momenta principalia sunt inter se aequalia, investigatio motus prospero successu est absoluta, ut nihil desiderari queat.

SCHOLION. 2.

763. Expositis ergo, quae ad motum corporum rigidorum liberum, remotis viribus externis, pertinent, ordo postulat, ut jam in effectum virium inquiramus, ad quod etiam supra fundamenta sunt jacta, ubi quarumvis virium effectus momentaneos determinavimus. Dum autem motus perennes tractare instituimus, ejusmodi casus eligere debemus, quibus vires sollicitantes non per corporis centrum inertiae transeunt, quales Astronomia offert. Quoniam autem eorum evolutio majorem Astronomiae cognitionem requirit, quam hic supponere licet, in terra subsistamus, atque ejusmodi motus contemplemur, in quibus motus gyratorius circa axem variabilem occurrat, quandoquidem motus magis regulares nihil habent difficultatis. Hic primum se nobis offert Theoria turbinum, cujus explicatio ob continuam axis gyrationis mutationem adhuc maximis tenebris fuit involuta. Quod argumentum ut initio a gravioribus difficultatibus liberem, axem turbinis super plano horizontali politissimo incedere assumam, ne frictioni ullus locus relinquatur, tum vero axem infra in cuspidem desinentem statuam, qua super plano horizontali ingrediatur. Duo autem genera turbinum constituam, prout vel omnia ejus momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, vel duo duntaxat: si enim omnia essent inaequalia, haec hypothesis non solum figurae turbinum adversaretur, sed etiam vires calculi superaret.

CAPUT XIV.

DE MOTU TURBINUM SUPER PLANO HORIZONTALI, IN QUIBUS OMNIA MOMENTA INERTIAE SUNT INTER SE AEQUALIA.

DEFINITIO. 13.

764. **T***urbo* est corpus rigidum hasta inferius acuminata per centrum inertiae trajectum, quae simul cum axe aliquo principali corporis conveniat.

EXPLICATIO.

Tabula XIV. Fig. 99. 765. Hujusmodi turbo est AB*b*D, in quo AD hastam, et B*b* corpus trajectum refert, ut hasta cum corpore unum corpus rigidum constituere sit censenda: ubi quidem hasta non solum per totius corporis centrum inertiae I transit, sed etiam axem principalem corporis exhibet. Hastam quidem infra in D in cuspidem acutissimum desinere assumo, qua turbo constanter plano horizontali insistat, et super eo incedat; hic enim alios motus non prosequor, nisi quamdiu turbo sola cuspide D planum horizontale contingit. Statim enim ac turbo procumbit, ejus motus ad aliud genus est referendus, quod cum turbini non amplius sit proprium, hic non attingo. Id ergo hic assumo: rectam a cuspide D per centrum inertiae I ductam simul esse corporis totius ex hasta et massa B*b* constantis axem principalem, quae sola linea in computum ingreditur, cum praeterea nihil intersit, quomodo hasta cum massa reliqua sit conjuncta. Tum vero in hoc capite totum turbinis corpus ita comparatum assumo, ut momenta inertiae respectu ejus axium principalium sint inter se aequalia, ideoque omnes rectae per ejus centrum inertiae I ductae pro axibus principalibus haberi queant. Planum denique hic laevigatissimum assumo, ut cuspis D super eo sine ulla frictione incedere possit, ubi etiam mentem ab aeris resistentia, omnibusque motus obstaculis abstraho, ad solam vim gravitatis respiciens.

SCHO-

SCHOLION.

766. De tali ergo turbine primum observo, si cuspide sua D plano horizontali ita insistat, ut recta DI sit verticalis, eum in hoc situ constanter perseverare posse, etiamsi vel minimum inclinatus procidat. Tum vero etiam, quia nulla adest frictio, in hoc situ verticali uniformiter in directum progredi poterit, quamquam experientia nunquam propter frictionem consentiet. Deinde quia recta DIA est axis principalis, si ea fuerit verticalis, corpusque circa eam motum gyratorium quemcunque acceperit, hunc perpetuo uniformem conservabit, manente recta DIA immota ideoque verticali: neque hic gravitas quicquam turbabit in motu, sed tota ad turbinem in cuspide D ad planum horizontale apprimendum impendetur. Statim autem atque hic axis AD vel minimum inclinari coeperit, gravitas motum turbabit, turbinemque subvertere tendet; ad quem effectum explorandum simul ad vim, qua cuspis D plano horizontali apprimitur, respici oportet. Quanquam autem haec vis est ignota, atque ab omnibus motus circumstantiis pendet, tamen certum est, ejus directionem semper esse verticalem, ab eaque eundem effectum oriri, ac si turbo in puncto D verticaliter sursum a pari vi pelleretur: ipsa vero vis semper tanta esse debet, ut cuspis D perpetuo plano horizontali maneat applicata, ex qua conditione ejus quantitas ad quodvis tempus est elicienda. Sin autem haec vis ut cognita spectetur, motus centri inertiae I turbinis, nullo respectu ad ejus motum gyratorium habito, definiri poterit, id quod in sequente problemate expediamus.

PROBLEMA. 81.

767. **Si ad quodvis tempus cognita fuerit pressio cuspidis in planum horizontale, determinare motum centri inertiae turbinis.**

SOLUTIO.

Ad datum tempus elapsum $= t$, teneat axis turbinis AID situm quemcunque inclinatum, faciens cum horizontali DF angulum FDA $= \vartheta$: ubi cuspis premat planum horizontale vi $= P$: quod idem est, ac si cuspis D sollicitaretur sursum secundum directionem verticalem vi DP $= P$; massa autem idemque pondus totius turbinis sit $= M$. Iam quia tantum motum centri inertiae I quaerimus, sine ullo respectu ad motum gyratorium habito, ejus motus perinde afficietur, ac si tota turbinis massa M in puncto I collecta, eique vires sollicitantes secundum suam quaeque directionem applicatae essent. Habebimus igitur in I massam $= M$, sollicitatam a duabus viribus, altera gravitate $= M$ verticaliter secundum IX deorsum Fig. 100.

 sum

fum, altera vi $= P$ verticaliter furfum fecundum IQ; ex quibus vis deorfum fecundum IX follicitans exoritur $= M - P$. Cum ergo nulla adfit vis horizontaliter urgens, nifi centrum inertiae I initio acceperit motum horizontalem, tantum vel furfum vel deorfum in recta verticali XQ feretur: fin autem initio acceperit motum horizontalem, eundem praeterea intemeratum confervabit. Ponamus ergo diftantiam $DI = f$, erit altitudo $IX = f \sin \vartheta$, unde centri inertiae I celeritas furfum vergens erit $= \frac{f d\vartheta \cos\vartheta}{dt}$, fumtoque elemento temporis dt conftante, ob vim follicitantem deorfum $= M - P$, habebimus $\frac{f(dd\vartheta \cos\vartheta - d\vartheta^2 \sin\vartheta)}{dt} = \frac{-2g(M-P)\,dt}{M}$ feu $dd\vartheta \cos\vartheta - d\vartheta^2 \sin\vartheta = \frac{2g}{f}\left(\frac{P}{M} - 1\right) dt^2$. Quare fi vis P ad quodvis tempus t fuerit data, erit integrando:

$$d\vartheta \cos\vartheta = \frac{2g}{f} dt \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right) \text{ et } \sin\vartheta = \frac{2g}{f} \int dt \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right)$$

ubi $f \sin\vartheta = 2g \int dt \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right)$ altitudinem IX centri inertiae et $\frac{f d\vartheta \cos\vartheta}{dt} = 2g \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right)$ celeritatem ejus furfum directam exprimit.

COROLL. 1.

768. Si ergo ad quodvis tempus noffemus preffionem P, qua axis turbinis plano horizontali innititur, motum centri inertiae feu ejus locum ad quodvis tempus affignare, indeque inclinationem axis ad horizontem feu angulum $FDA = \vartheta$ definire poffemus.

COROLL. 2.

769. Si turbini initio folus motus gyratorius imprimatur, ut centrum inertiae I manferit in quiete per punctum faltem temporis, tum deinceps quomodocunque axis gyrationis varietur, indeque axis turbinis AD inclinetur, centrum inertiae alium motum non recipiet, nifi verticaliter vel furfum vel deorfum directum.

COROLL. 3.

770. Sin autem turbini fimul motus progreffivus fuerit impreffus, motum horizontalem inde ortum conftanter confervabit uniformem, et in directum progredientem, quocum motus prior verticalis erit conjunctus.

SCHO-

SCHOLION.

771. Motus ergo centri inertiae in turbine nulla laborat difficultate, si modo pressio cuspidis D in planum horizontale ad quodvis tempus assignari posset. Verum in hoc ipso summa sita est difficultas, cum ab hac pressione oriatur momentum ad turbinem circa quempiam axem convertendum tendens, ex quo nisi turbo jam circa hunc ipsum axem gyretur, axis gyrationis variabitur, unde etiam turbinis inclinatio ad horizontem mutationem patietur. Ista vero inclinatinonis mutatio convenire debet cum ea, quam pressio P assumta producit, atque ex hac convenientia ipsa haec pressio determinari debet, in qua investigatione vis universae Theoriae turbinum est constituenda. Quo igitur facilius ad hunc scopum pertingamus, turbinem in situ quocunque inclinato et circa axem per centrum inertiae ductum gyrantem consideremus, atque inquiramus, quantam mutationem tam axis gyrationis, quam celeritas angularis a pressione, qua cuspis plano horizontali insistit, sit passura.

PROBLEMA. 82.

772. Dum turbo utcunque gyratur, si detur pressio, qua cuspis plano horizontali innititur, determinare variationem momentaneam, tam in axe gyrationis, quam celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Sit inclinatio turbinis ad horizontem seu angulus FDA $= \vartheta$ et pressio in D $=$ P, qua punctum D sursum urgetur. Quoniam in corpore omnia momenta inertiae sunt aequalia, haec vis DP $=$ P tendet turbinem, si quiesceret, convertere circa axem per centrum inertiae I transeuntem et ad planum ADF normalem. Quare posito momento inertiae turbinis circa omnes axes $= Maa$, et distantia ID $= f$, erit momentum vis DP respectu illius axis $= Pf \cos\vartheta$; ideoque tempusculo dt turbo circa illum axem vertetur per angulum elementarem $d\omega = \frac{Pfgdt^2 \cos\vartheta}{Maa}$. Cum autem turbo jam habeat motum gyratorium, iterum omnia ad superficiem sphaericam centro inertiae corporis descriptam referamus, in qua sit punctum Z quasi zenith, et A superior terminus axis turbinis, erit arcus ZA $= 90° - \vartheta$, quem supra vocavimus $= l$; nunc autem ejusmodi teneat situm turbo, ut alii bini axes in eo fixi et ad AID normales sint in B et D. Etsi enim hic omnium axium par est ratio, tamen in corpore ternos axes inter se normales concipi convenit, ut ex iis situs turbinis definiatur. Fig. 100.

Erunt

Erunt ergo AB, AC, BC quadrantes, ponaturque angulus ZAB $= \zeta$: tum vero turbo jam gyretur circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, vocenturque arcus AO $= \alpha$, BO $= \mathfrak{C}$ et CO $= \gamma$, ut sit $\cos BAO = \frac{\cos \mathfrak{C}}{\sin \alpha}$ et $\sin BAO = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}$. Ducatur nunc quadrans AS ad arcum ZA normalis, erit IS axis ille ad planum verticale, in quo axis turbinis AID versatur, normalis, circa quem a vi P generatur conversio per angulum $d\omega = \frac{Pfgdt^2 \cos \vartheta}{Maa}$ in sensum BAC illi sensui ABC contrarium: quae mutatio nisi accederet, turbo circa axem IO, quia principalis proprietate gaudet, gyrari pergeret. Ob illam igitur vim jam gyrari incipiet circa polum o in arcu OS ultra O situm. Quare si in figura hoc punctum o versus S notetur, posito arcu OS $= s$, et secundum problema 62. statuatur $q = \frac{Pfg \cos \vartheta}{Maa}$, colligetur inde arculus $Oo = \frac{-2qdt \sin s}{\varepsilon}$ $= \frac{-2Pfgdt \cos \vartheta \sin s}{Maa\varepsilon}$, et celeritas angularis ε decrementum capiet $= 2qdt \cos s = \frac{2Pfgdt \cos \vartheta \cos s}{Maa}$, ut sit $d\varepsilon = \frac{-2Pfgdt \cos \vartheta \cos s}{Maa}$. Ad mutationem autem poli gyrationis O in o factam commodius exprimendam, cum sit angulus ZAB $= \zeta$, erit angulus BAS $= 90 - \zeta$, deinde vocetur angulus BAO $= \eta$, ut sit $\cos \eta = \frac{\cos \mathfrak{C}}{\sin \alpha}$ et $\sin \eta = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}$, in triangulo OAS habemus AO $= \alpha$, AS $= 90°$ et OAS $= 90° - \zeta - \eta$: unde reperitur $\cos OS = \cos s = \sin(\zeta + \eta) \sin \alpha$, et producto arcu AO in p, eoque ex o demisso perpendiculo op, $\cot oOp = \frac{\sin(\zeta + \eta) \cos \alpha}{\cos(\zeta + \eta)}$.

Cum nunc sit $Oo = \frac{-2Pfgdt \cos \vartheta \sin s}{Maa\varepsilon}$

$$\text{erit } Op = d\alpha = \frac{-2Pfgdt \cos \vartheta}{Maa\varepsilon} \cdot \sin s \cos oOp$$

$$\text{et } op = \frac{-2Pfgdt \cos \vartheta}{Maa\varepsilon} \cdot \sin s \sin oOp = d\eta \sin \alpha.$$

At est $\sin s \sin oOp = \cos(\zeta + \eta)$ et $\sin s \cos oOp = \sin s \sin oOp \cot oOp$ $= \sin(\zeta + \eta) \cos \alpha$. Ex his ergo reperitur:

$$d\varepsilon = \frac{-2Pfgdt\cos\vartheta}{Maa}\cdot\sin\alpha\sin(\zeta+\eta)$$

$$d\alpha = \frac{-2Pfgdt\cos\vartheta}{Maa\varepsilon}\cdot\cos\alpha\sin(\zeta+\eta) \text{ et } d\eta = \frac{-2Pfgdt\cos\vartheta}{Maa\varepsilon}\cdot\frac{\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha},$$

sicque tam variatio axis gyrationis in turbine, quam celeritatis angularis ε est definita.

COROLL. 1.

773. Est ergo $d\varepsilon : d\alpha = \sin\alpha : \frac{\cos\alpha}{\varepsilon}$, unde fit $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}$

et integrando $\varepsilon = \frac{e\cos a}{\cos\alpha}$, si quidem initio fuerit celeritas angularis $= e$, et arcus $AO = a$, qui nunc est $= \alpha$. Sicque ex dato axe gyrationis O statim innotescit celeritas turbinis angularis ε.

COROLL. 2.

774. Quo magis ergo axis gyrationis O ab axe turbinis A recedit, eo major fit celeritas angularis ε, eaque adeo in infinitum augeretur, si axis gyrationis IO usque ad angulum rectum ab axe turbinis IA digrederetur.

PROBLEMA 83.

775. Si detur ad aliquod tempus inclinatio turbinis ad horizontem, et axis gyrationis cum celeritate angulari, determinare mutationem momentaneam in situ turbinis ortam.

SOLUTIO.

Sumto sphaerae immobilis centro inertiae turbinis descriptae puncto summo Z quasi zenith, constituatur etiam primus quasi meridianus ZX: et nunc quidem versetur axis turbinis in A, pro quo dicatur arcus $ZA = 90° - \vartheta = l$, et angulus $XZA = \lambda$, tum vero reliqui bini axes principales sint in B et C, ponaturque angulus $ZAB = \zeta$. Nunc autem turbo gyretur circa polum O, ut sit $BAO = \eta$: et $AO = \alpha$; celeritasque angularis $= \varepsilon$ in sensum ABC. His positis, si secundum probl. 68. vocemus arcus $OB = \beta$, $OC = \gamma$; $ZB = m$, $ZC = n$, habebimus pro variatione situs:

$$dl\sin l = \varepsilon dt(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m)$$
$$dm\sin m = \varepsilon dt(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n)$$
$$dn\sin n = \varepsilon dt(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l)$$
$$\text{et } -d\lambda\sin l^2 = \varepsilon dt(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n).$$

Iam vero eſt $l = 90° - \vartheta$, ideoque $\operatorname{cof} l = \operatorname{fin}\vartheta$

$\operatorname{cof}\zeta = \operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}\eta$; $\operatorname{cof}\gamma = \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\eta$ atque

$\operatorname{cof} m = \operatorname{cof}\zeta \operatorname{cof}\vartheta$; et $\operatorname{cof} n = -\operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}\vartheta$ unde concluditur

$$-d\vartheta \operatorname{cof}\vartheta = gdt\,(-\operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}\eta \operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}\vartheta - \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\eta \operatorname{cof}\zeta \operatorname{cof}\vartheta)$$

ſeu $d\vartheta = gdt \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}(\zeta + \eta)$;

$$d\zeta \operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}\vartheta + d\vartheta \operatorname{cof}\zeta \operatorname{fin}\vartheta = gdt\,(\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\eta \operatorname{fin}\vartheta + \operatorname{cof}\alpha \operatorname{fin}\zeta \operatorname{cof}\vartheta)$$

$$+ d\zeta \operatorname{cof}\zeta \operatorname{cof}\vartheta - d\vartheta \operatorname{fin}\zeta \operatorname{fin}\vartheta = gdt\,(\operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\zeta \operatorname{cof}\vartheta - \operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}\eta \operatorname{fin}\vartheta)$$

ſeu $d\zeta \operatorname{cof}\vartheta = gdt\,(-\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\vartheta \operatorname{cof}(\zeta + \eta) + \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\vartheta)$

ac denique $d\lambda = -\dfrac{gdt \operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}(\zeta + \eta)}{\operatorname{cof}\vartheta}$.

Variatio ergo momentanea in ſitu turbinis his continetur formulis differentialibus:

$$d\vartheta = gdt \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}(\zeta + \eta)$$

$$d\zeta = gdt\,(\operatorname{cof}\alpha - \operatorname{fin}\alpha \operatorname{tang}\vartheta \operatorname{cof}(\zeta + \eta))$$

$$d\lambda = -\frac{gdt \operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}(\zeta + \eta)}{\operatorname{cof}\vartheta}.$$

SCHOLION.

776. Has duplicis generis variationes momentaneas evolvi neceſſe erat, antequam ſolutionem problematis, quo argumentum hujus capitis continetur, ſuſcipere liceret. Nunc igitur his variationibus momentaneis definitis, in motum turbinis, qualem quidem hoc capite conſideramus, poſtquam ipſi motus quicunque fuerit impreſſus, inquiramus.

PROBLEMA 84.

777. Poſtquam turbini in data axis ſui inclinatione motus gyratorius circa hunc axem fuerit impreſſus, determinare motus hujus continuationem, hoc eſt, ad quodvis tempus tam ſitum quam motum turbinis.

SOLUTIO.

Fig. 101. Habuerit initio axis turbinis ad horizontem inclinationem δ, circa quem acceperit motum gyratorium celeritate angulari $= \varepsilon$ in ſenſum ABC. Sumamus autem initio axem turbinis A in ipſo meridiano ZX fuiſſe, in eumque ſimul arcum AB ad turbinem pertinentem incidiſſe. Pro ipſo turbine ſit ejus maſſa $= M$, momentum inertiae reſpectu omnium axium per ejus centrum inertiae tranſeuntium $= Maa$, et in axe turbinis diſtantia imae cuſpidis a centro inertiae $ID = f$. Nunc elapſo tempore $= t$, mentem a motu centri inertiae abſtrahendo, pervenerit axis turbinis in A, ut ſit

sit angulus XZA $= \lambda$, ejusque inclinatio ad horizontem ϑ seu arcus ZA $= 90^\circ - \vartheta$, ita ut initio fuerit $\lambda = 0$ et $\vartheta = \delta$, tum vero arcus AB cum turbine mobilis jam cum ZA faciat angulum ZAB $= \zeta$, ita ut initio fuerit $\zeta = 0$. Porro gyretur nunc turbo circa polum O celeritate angulari $= \varepsilon$ etiamnum in sensum ABC, ponaturque arcus AO $= \alpha$ et angulus BAO $= \eta$, ita ut initio fuerit $\alpha = 0$, quia turbo circa ipsum axem AID gyrari coepit, angulus autem η initio erat indefinitus. Quodsi jam hoc instanti pressio cuspidis in planum horizontale ponatur $=$ P, praecedentia problemata suppeditant sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{P}{M} = 1 + \frac{f(dd\vartheta \cos\vartheta - d\vartheta^2 \sin\vartheta)}{2g\,dt^2}$$

$$\text{II. } \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\cos\alpha} \text{ ob } \alpha = 0$$

$$\text{III. } d\alpha = \frac{-2Pfg\,dt \cos\vartheta}{Maa\varepsilon} \cos\alpha \sin(\zeta + \eta)$$

$$\text{IV. } d\eta = \frac{-2Pfg\,dt \cos\vartheta}{Maa\varepsilon} \cdot \frac{\cos(\zeta + \eta)}{\sin\alpha}$$

$$\text{V. } d\vartheta = \varepsilon dt \sin\alpha \sin(\zeta + \eta)$$

$$\text{VI. } d\zeta = \varepsilon dt (\cos\alpha - \sin\alpha \tang\vartheta \cos(\zeta + \eta))$$

$$\text{VII. } d\lambda = \frac{-\varepsilon dt \sin\alpha \cos(\zeta + \eta)}{\cos\vartheta},$$

ad quarum aequationum resolutionem omnes vires intendere debemus. Quo igitur multitudinem variabilium restringamus, ex aequationibus III, et IV, eliminando P colligimus

$$\frac{d\alpha \cos(\zeta + \eta)}{\sin\alpha \cos\alpha} = d\eta \sin(\zeta + \eta);$$

tum V et VI eliminando εdt praebent

$$\frac{d\vartheta \cos\alpha}{\sin\alpha} - d\vartheta \tang\vartheta \cos(\zeta + \eta) = d\zeta \sin(\zeta + \eta).$$

Addamus has duas aequationes, et posito $\zeta + \eta = \varphi$ habebimus

$$\frac{d\alpha \cos\varphi}{\sin\alpha \cos\alpha} + \frac{d\vartheta \cos\alpha}{\sin\alpha} - d\vartheta \tang\vartheta \cos\varphi - d\varphi \sin\varphi = 0,$$

quae multiplicata per $\tang\alpha \cos\vartheta$ abit in hanc

$$\frac{d\alpha \cos\vartheta \cos\varphi}{\cos\alpha^2} + d\vartheta \cos\vartheta - d\vartheta \tang\alpha \sin\vartheta \cos\varphi - d\varphi \tang\alpha \cos\vartheta \sin\varphi = 0,$$

quae integrabilis existit praebetque

$$\tang\alpha \cos\vartheta \cos\varphi + \sin\vartheta = \sin\delta$$

quia initio fit $\alpha = 0$ et $\vartheta = \delta$: hinc ergo nanciscimur

$$\text{vel } \tang\alpha = \frac{\sin\delta - \sin\vartheta}{\cos\vartheta \cos\varphi} \text{ vel } \cos\varphi = \frac{\sin\delta - \sin\vartheta}{\tang\alpha \cos\vartheta}.$$

Dividamus nunc aequationem III per V, ut $\sin(\zeta + \eta)$ seu $\sin\varphi$ removeamus, fiet

$$\frac{da}{d\vartheta} + \frac{2Pfg \cos\vartheta \cos\alpha}{Maagg \sin\alpha} = 0$$

$$\text{seu } \frac{eed\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha^3} + \frac{2Pfgd\vartheta \cos\vartheta}{Maa} = 0;$$

ubi si ponamus $\sin\vartheta = x$, ut sit $d\vartheta \cos\vartheta = dx$, quoniam est $\frac{P}{M} = 1 + \frac{fddx}{2gdt^2}$, nanciscemur hanc aequationem sponte integrabilem:

$$\frac{eeaad\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha^3} + 2fgdx + \frac{ffdxddx}{dt^2} = 0,$$

quae integrata dat:

$$\frac{eeaa}{2\cos\alpha^2} + 2fg \sin\vartheta + \frac{ffd\vartheta^2 \cos\vartheta^2}{2dt^2} = \tfrac{1}{2} C$$

$$\text{seu } fd\vartheta \cos\vartheta = dt \sqrt{\left(C - 4fg \sin\vartheta - \frac{eeaa}{\cos\alpha^2}\right)}.$$

Quare cum ex aequatione V sit

$$d\vartheta = edt \tang\alpha \sin\varphi,$$

habemus novam aequationem finitam

$$\tfrac{1}{2} C = \frac{eeaa}{2\cos\alpha^2} + 2fg \sin\vartheta + \frac{eeff \tang\alpha^2 \cos\vartheta^2 \sin\varphi^2}{2}$$

ubi esse debet $\frac{1}{2} C = \frac{1}{2} eeaa + 2fg \sin\delta$, unde oritur

$$2fg(\sin\delta - \sin\vartheta) = \tfrac{1}{2} eeaa \tang\alpha^2 + \tfrac{1}{2} eeff \tang\alpha^2 \cos\vartheta^2 \sin\varphi^2,$$

quae ob $\sin\varphi^2 = 1 - \frac{(\sin\delta - \sin\vartheta)^2}{\tang\alpha^2 \cos\vartheta^2}$ abit in

$$4fg(\sin\delta - \sin\vartheta) = eeaa \tang\alpha^2 + eeff \tang\alpha^2 \cos\vartheta^2 - eeff (\sin\delta - \sin\vartheta)^2$$

unde elicimus

tang α

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(4fg + \varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta - \sin\vartheta))\right)}{\varepsilon\surd(aa + ff\cos\vartheta^2)},$$

hincque porro

$$\cos\varphi = \cos(\zeta + \eta) = \frac{\varepsilon\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(aa + ff\cos\vartheta^2)\right)}{\cos\vartheta\surd\left(4fg + \varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta - \sin\vartheta)\right)}$$

$$\sin\varphi = \sin(\zeta + \eta) = \frac{\surd\left(4fg\cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta)\right)}{\cos\vartheta\surd\left(4fg + \varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta - \sin\vartheta)\right)},$$

sicque jam per solam inclinationem ϑ definivimus arcum α et angulum $\varphi = \zeta + \eta$, quin etiam relationem inter ϑ et tempus t adipiscimur aequatione, $d\vartheta = \varepsilon dt \operatorname{tang}\alpha \sin\varphi$, quae induit hanc formam

$$d\vartheta = \frac{dt\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(4fg\cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta))\right)}{\cos\vartheta\surd(aa + ff\cos\vartheta^2)}$$

$$\text{seu } dt = \frac{d\vartheta\cos\vartheta\surd(aa + ff\cos\vartheta^2)}{\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(4fg\cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta))\right)}.$$

Deinde cum sit $\frac{d\zeta}{d\vartheta} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha\sin\varphi} - \frac{\operatorname{tang}\delta\cos\varphi}{\sin\varphi}$ erit

$$d\zeta = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon d\vartheta\operatorname{tang}\vartheta\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(aa + ff\cos\vartheta^2)\right)}{\surd\left(4fg\cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta)\right)}$$

$$\text{seu } d\zeta = \frac{\varepsilon d\vartheta(1 - \sin\delta\sin\vartheta)\surd(aa + ff\cos\vartheta^2)}{\cos\vartheta\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(4fg\cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta))\right)}$$

unde angulus $ZAB = \zeta$ per integrationem est eliciendus. Denique cum sit $d\lambda = -\frac{\varepsilon dt\operatorname{tang}\alpha\cos\varphi}{\cos\vartheta}$, habebimus

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon dt(\sin\delta - \sin\vartheta)}{\cos\vartheta^2} \text{ seu}$$

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon d\vartheta\surd\left((\sin\delta - \sin\vartheta)(aa + ff\cos\vartheta^2)\right)}{\cos\vartheta\surd\left(4fg\cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta)\right)}.$$

Quodsi etiam pressionem turbinis in planum horizontale nosse velimus, ea ex aequatione III colligatur, unde est:

$$\varepsilon aad \,.\, \operatorname{tang}\alpha = -\frac{2P}{M} \,.\, fgdt\cos\vartheta\sin\varphi,$$

hincque concluditur

$$\frac{2P}{M} = \frac{aa(2fg + \varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta - \sin\vartheta))}{fg(aa + ff\cos\vartheta^2)} - \frac{aaff\sin\vartheta(\sin\delta - \sin\vartheta)(4fg + \varepsilon\varepsilon ff(\sin\delta - \sin\vartheta))}{fg(aa + ff\cos\vartheta^2)^2},$$

COROLL. 1.

778. Si initio axis turbinis AD fuerit verticalis, seu $\delta = 90°$, turbo perpetuo hunc situm servabit, et uniformiter circa eundem axem AD gyrabitur celeritate angulari ε. Quod etiam declarat aequatio $dt = \frac{d\vartheta \cos\vartheta \sqrt{(aa + ff \cos\vartheta^2)}}{(1 - \sin\vartheta)\sqrt{(4fg(1 + \sin\vartheta) - \varepsilon\varepsilon aa)}}$, unde patet nonnisi post tempus infinitum hoc est nunquam fieri posse $\sin\vartheta < 1$.

COROLL. 2.

779. At si fuerit $\delta < 90°$, seu $\sin\delta < 1$ phaenomena motus ex aequatione $dt = \frac{d\vartheta \cos\vartheta \sqrt{(aa + ff \cos\vartheta^2)}}{\sqrt{(\sin\delta - \sin\vartheta)(4fg \cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta))}}$ cognosci possunt: ex qua primum patet, nunquam fieri posse $\sin\vartheta > \sin\delta$, nempe inclinatio ad horizontem ϑ nunquam superabit initialem δ.

COROLL. 3.

780. Inclinatio autem ϑ evanescere nequit, nisi sit $\varepsilon\varepsilon aa \sin\delta < 4fg$: quare si celeritas angularis initio impressa ε minor fuerit, quam $\frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$, turbo tandem procidet; quemadmodum evenit, si turbini inclinato nullus impressus fuerit motus gyratorius.

COROLL. 4.

782. At si celeritas angularis initio impressa major fuerit, quam $\frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$, inclinatio ϑ non ultra certum limitem imminui poterit, quem simul atque attigerit, turbo se iterum ad initialem inclinationem δ eriget. At minima inclinatio ϑ ex aequatione $4fg \cos\vartheta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\vartheta) = 0$ colligitur, $\sin\vartheta = \frac{\varepsilon\varepsilon aa - \sqrt{(\varepsilon^4 a^4 - 16\varepsilon\varepsilon aafg \sin\delta + 64ffgg)}}{8fg}$.

COROLL. 5.

783. Quare si celeritas angularis ε initio impressa fuerit quasi infinita, limes minimi fit $\sin\vartheta = \sin\delta$, seu turbo perpetuo eandem inclinationem servabit: sin autem sit valde magna, minima inclinatio ita proxime definitur: $\sin\vartheta = \sin\delta - \frac{2fg \cos\delta^2}{\varepsilon\varepsilon aa}$; ut sit $\vartheta = \delta - \frac{2fg \cos\delta}{\varepsilon\varepsilon aa}$.

SCHO-

SCHOLION.

784. Cum turbo tardius in gyrum actus mox procumbat, ea celeritas angularis notari meretur, quam si turbo superaverit, iterum erigatur. Esset quidem haec celeritas $= \frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$, quippe cui maxima inclinatio convenit, nempe $\vartheta = 0$: sed quia ob motem turbinis axis non ad horizontem usque inclinari potest, ea pro maxima inclinatione erit reputanda, ubi turbo quasi corpore suo horizontem attingit; quae si vocetur $= i$, ne turbo eousque inclinetur, celeritas angularis initio impressa major esse debet, quam $\frac{2\cos i\sqrt{fg}}{a\sqrt{(\sin\delta - \sin i)}}$, et quamdiu ea major manserit, turbo a lapsu erit immunis. Haecque est causa, quod turbo, cum ob frictionem aliaque obstacula ejus motus sensim imminuatur, tandem prolabatur. Ceterum cum hic ad ejusmodi obstacula non respexerim, mirum non est, si etiam reliqua phaenomena experientiae non satis respondeant: etiamsi certus velocitatis gradus, ad perennitatem gyrationis requisitus, experientiae maxime sit consentaneus. Verum ingens sine dubio discrimen deprehenderetur, si formulas differentiales inventas integraremus; atque ob hanc ipsam causam istum laborem suscipere haud operae esset pretium, cum eae tam sint complicatae, ut per logarithmos et arcus circulares expediri nequeant. Eae autem adhuc magis proditurae essent intricatae, si in turbine non omnia momenta inertiae inter se aequalia statuerentur, quocirca etiam hoc argumentum non attingam, quoniam principia stabilita his allatis exemplis satis sunt illustrata: sed potius uberiorem ipsius Theoriae de motu corporum rigidorum explicationem in medium afferre studebo. Etsi enim, quae hactenus sunt tradita, totum opus absolvere videntur, tamen si inde effectum virium quarumcunque definire velimus, methodus ante praescripta nimis est operosa; dum primo axem, circa quem vires corpus, si quiesceret, convertere inciperent definiri, tum vero hinc variationem axis, circa quem corpus actu gyratur, et celeritatis angularis determinari oportet: ex quo methodum perfectiorem magisque ad usum accommodatam proponam, qua deinceps ad investigationes magis arduas uti liceat.

CAPUT

CAPUT XV.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATORUM.

THEOREMA 10.

785. Quomodocunque corpus rigidum a viribus sollicitetur, effectus momentaneus his quatuor rebus continetur: primo variatione celeritatis centri inertiae: secundo variatione directionis centri inertiae: tertio variatione celeritatis angularis circa axem gyrationis per centrum inertiae transeuntis, et quarto variatione ipsius axis gyrationis.

DEMONSTRATIO.

Quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motus quovis temporis puncto resolvitur in motum progressivum, quo centrum inertiae movetur, et motum gyratorium circa axem quempiam per centrum inertiae transeuntem: unde cognitio hujus motus haec quatuor elementa involvit: 1° celeritatem centri inertiae; 2° directionem, secundum quam movetur; 3° axem per centrum inertiae transeuntem, circa quem corpus jam gyratur, et 4° celeritatem angularem hujus motus: quas quatuor res qui cognoverit, motum corporis hoc instanti perfecte habet perfectum. Ob vires autem sollicitantes fieri potest, ut hae quatuor res immutentur, ideoque ad earum effectum cognoscendum necesse est, ut quantum singulae tempusculo infinite parvo varientur, definire valeamus. Effectus ergo virium non tam in his quatuor rebus, quam in earum variatione momentanea consistit, quam si assignare potuerimus, effectum perfecte cognoverimus; unde veritas Theorematis est manifesta.

COROLL. 1.

786. Quemadmodum ergo in motu punctorum effectus virium ex variatione celeritatis et directionis perfecte cognoscitur; ita in motu corporum rigidorum, praeter has binas variationes, ad centrum inertiae relatas, nosse oportet variationes, quas cum ipse axis gyrationis tum celeritas angularis subit.

COROLL.

COROLL. 2.

787. Sicut ergo vires definivimus, quibus motui gyratorio circa axem fixum data acceleratio inducatur, ita etiam vires definire licebit, quibus insuper ipse axis gyrationis datam variationem adipiscatur.

COROLL. 3.

788. Fundamentum ergo universae Theoriae de motu corporum rigidorum in hoc consistit, ut quomodocunque vires sollicitantes fuerint comparatae, quaternas illas variationes temporis elemento productas assignare valeamus.

SCHOLION 1.

789. Principia ad hunc finem ducentia in praecedentibus jam satis sunt exposita, ubi ostendimus, quomodo variationem tam in motu centri inertiae, quam in axe gyrationis ejusque motu determinari oportet. Verum quia hoc posterius opus, in quo summa hujus Theoriae continetur, pluribus investigationibus innititur, quae saepe plurimum molestiae implicare solent, hic eas quasi in unum contrahens hanc Theoriam ita proponam, ut unico principio absolvi possit. Statim quidem hoc faciliori modo uti potuissem, sicque non leves difficultates in superiori tractatione occurrentes evitavissem; verum in argumento adhuc tam parum tractato haud incongruum visum est, methodum operosiorem et prolixiorem praemittere, quo singulae notiones in re pene nova animo firmius imprimantur, ipsaeque difficultates, quibus haec pars Mechanicae adhuc involuta videbatur, luculentius perspiciantur. Nihilo vero minus hoc argumentum hic quasi de novo pertractabo, neque ex hactenus allatis quicquam in subsidium vocabo.

SCHOLION. 2.

790. Cum igitur totum negotium huc reducatur, ut quantae variationes in quaternis memoratis rebus a datis viribus producantur, definiatur; quoniam methodus directa hoc praestandi non patet, vice versa primum in vires inquiram, quae ad datas variationes momentaneas producendas sint necessariae, ut hinc vicissim ad id, quod quaerimus, reverti queamus. Et cum variatio in motu centri inertiae producta nihil habeat difficultatis, id tanquam in quiete spectabo; et cujusmodi vires requirantur, investigabo, ut tam axis gyrationis, circa quem corpus jam gyratur, quam celeritas angularis, tempusculo infinite parvo datas variationes accipiant.

piant.

piant. Quoniam enim axis gyrationis cum celeritate angulari dari assumitur, motus singulorum elementorum corporis erit datus, qui si secundum ternas directiones fixas resolvatur, quantum hae ternae celeritates, tam ob variatam axis gyrationis positionem, quam ob celeritatis angularis variationem immutentur, colligere, simulque vires hanc mutationem in singulis elementis corporis producentes assignare valebimus: atque his denique viribus elementaribus colligendis ipsas vires finitas quaesitas impetrabimus. Cum igitur primum motum singulorum corporis elementorum, dum corpus circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari gyratur, nosse debeamus, ejus resolutionem secundum ternas directiones fixas, pro quibus ternos corporis axes principales assumam, in sequente problemate docebo.

PROBLEMA 85.

791. Si corpus rigidum circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem gyretur data celeritate, singulorum ejus elementorum motum definire, eumque secundum directiones axium principalium resolvere.

SOLUTIO.

Circa centrum inertiae corporis I, quod in figura non est expressum,
Fig. 102. concipiatur descripta superficies sphaerica, in qua sint A, B, C poli axium principalium, ita ut arcus AB, AC et BC sint quadrantes. Gyretur jam corpus circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, sintque pro gyrationis polo O arcus OA $= \alpha$, OB $= \zeta$, et OC $= \gamma$. Consideretur nunc corporis elementum quodcunque, a quo recta, ad centrum inertiae I ducta, superficiem sphaericam secet in Z; ejus autem distantia a centro I sit $= r$, dum radius sphaerae unitate exponitur: atque manifestum est, motum ejus elementi similem fore motui puncti Z, dum nempe hujus celeritas in ratione 1 ad r augetur. Quare sufficiet motum puncti Z definivisse, pro quo si ad arcum OZ constituatur arcus ZzT normalis, erit Zz directio motus, et celeritas $= \varepsilon$ sin OZ, quoniam sin OZ distantiam puncti Z ab axe gyrationis IO exprimit. Constituatur autem arcus ZT quadrans, ut radius IT fiat directioni motus Zz parallelus, ac jam celeritatem ε sin OZ secundum hanc directionem IT latam resolvi oportet secundum directiones axium principalium IA, IB, IC. Quem in finem ductis arcubus AT, BT, CT, qui illius rectae IT inclinationes ad hos axes metiuntur, obtinebitur

cel. sec. IA $= \varepsilon$ sin OZ . cos AT; cel. sec. IB $= \varepsilon$ sin OZ . cos BT
et cel. sec. IC $= \varepsilon$ sin OZ . cos CT.

Iam

Iam quia arcus OT est pariter quadrans, ex triangulo AOT fit $\cos AT = \cos AOT \cdot \sin AO = -\sin AOZ \cdot \sin AO$ ob $TOZ = 90°$. Simili modo est

$$\cos BT = \cos BOT \cdot \sin BO = \sin BOZ \cdot \sin BO$$
$$\cos CT = \cos COT \cdot \sin CO = \sin COZ \cdot \sin CO.$$

At ob $\sin AZ : \sin AOZ = \sin OZ : \sin OAZ$ erit

$\sin AOZ \cdot \sin OZ = \sin AZ \cdot \sin OAZ$ similique modo
$\sin BOZ \cdot \sin OZ = \sin BZ \cdot \sin OBZ$ et
$\sin COZ \cdot \sin OZ = \sin CZ \cdot \sin OCZ$: unde fit
cel. sec. $IA = -\varepsilon \sin AO \cdot \sin AZ \cdot \sin OAZ$
cel. sec. $IB = \varepsilon \sin BO \cdot \sin BZ \cdot \sin OBZ$
cel. sec. $IC = \varepsilon \sin CO \cdot \sin CZ \cdot \sin OCZ$.

Tum vero est

$$\sin BAO = \frac{\cos CO}{\sin AO};\ \cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin AO};$$
$$\sin BAZ = \frac{\cos CZ}{\sin AZ};\ \cos BAZ = \frac{\cos BZ}{\sin AZ}$$
$$\text{ergo } \sin OAZ = \frac{\cos CO \cdot \cos BZ - \cos BO \cdot \cos CZ}{\sin AO \cdot \sin AZ}$$

ideoque celeritas secundum $IA = \varepsilon (\cos BO \cdot \cos CZ - \cos CO \cdot \cos BZ)$ similique modo reperitur

celeritas secundum $IB = \varepsilon (\cos CO \cdot \cos AZ - \cos AO \cdot \cos CZ)$
celeritas secundum $IC = \varepsilon (\cos AO \cdot \cos BZ - \cos BO \cdot \cos AZ)$

quae per r multiplicatae dabunt celeritates elementi propositi: pro quo si coordinatae axibus principalibus parallelae ponantur x, y, z, erit $r \cos AZ = x : r \cos BZ = y$ et $r \cos CZ = z$: quare ob $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; erunt elementi propositi celeritates

cel. sec. $IA = \varepsilon (z \cos \beta - y \cos \gamma)$
cel. sec. $IB = \varepsilon (x \cos \gamma - z \cos \alpha)$
cel. sec. $IC = \varepsilon (y \cos \alpha - x \cos \beta)$

PROBLEMA. 86.

792. Si corpus rigidum gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari, invenire vires elementares, quibus singula elementa sollicitari debent, ut elemento temporis dt tam ipse axis gyrationis quam celeritas angularis datas subeant variationes.

SOLUTIO.

Fig. 103. Sit I centrum inertiae corporis, ejusque axes principales IA, IB, IC, gyreturque corpus circa axem quemcunque IO, cujus ad quemlibet axem sit inclinatio AIO $= \alpha$; BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, celeritas autem angularis sit $= \varepsilon$ in sensum ABC directa; quae quantitates tempusculo dt crescere debeant suis differentialibus $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et $d\varepsilon$, ad quem effectum producendum vires elementares necessarias quaeri oporteat. Consideretur elementum corporis quodcunque dM in Z situm, pro quo sint coordinatae axibus principalibus parallelae IX $= x$, XY $= y$, YZ $= z$: vocenturque vires ad ejus motum praescriptum efficiendum requisitae et secundum axes principales resolutae $Za = p$, $Zb = q$ et $Zc = r$. Secundum easdem directiones ejus motus resolvatur, ponaturque celeritas secundum $Za = u$; secundum $Zb = v$ et secundum $Zc = w$, atque cum ex primis motus principiis sit

$$du = \frac{2gpdt}{dM},\ dv = \frac{2gqdt}{dM},\ dw = \frac{2grdt}{dM};$$

vires quaesitae erunt:

$$p = \frac{dudM}{2gdt};\ q = \frac{dvdM}{2gdt};\ r = \frac{dwdM}{2gdt}.$$

Verum in praecedente problemate celeritates ternas u, v, w, ita invenimus expressas, ut sit:

$$u = \varepsilon(z\cos\beta - y\cos\gamma);\ v = \varepsilon(x\cos\gamma - z\cos\alpha);\ w = \varepsilon(y\cos\alpha - x\cos\beta);$$

quae quantum augeantur tempusculo dt cum ex variabilitate litterarum ε, α, β, γ, quae ut data spectatur, tum vero coordinatarum x, y, z judicari oportet. Ad harum differentialia dx, dy, dz exhibent spatiola, per quae elementum dM tempusculo dt transferetur, ita ut sit

$$dx = udt = \varepsilon dt(z\cos\beta - y\cos\gamma)$$
$$dy = vdt = \varepsilon dt(x\cos\gamma - z\cos\alpha)$$
$$dz = wdt = \varepsilon dt(y\cos\alpha - x\cos\beta).$$

Unde differentiatione rite instituta adipiscimur:

$$du = d\varepsilon(z\cos\beta - y\cos\gamma) - \varepsilon(zd\beta\sin\beta - yd\gamma\sin\gamma) + \varepsilon dt(w\cos\beta - v\cos\gamma)$$
$$dv = d\varepsilon(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \varepsilon(xd\gamma\sin\gamma - zd\alpha\sin\alpha) + \varepsilon dt(u\cos\gamma - w\cos\alpha)$$
$$dw = d\varepsilon(y\cos\alpha - x\cos\beta) - \varepsilon(yd\alpha\sin\alpha - xd\beta\sin\beta) + \varepsilon dt(v\cos\alpha - u\cos\beta).$$

Cum

Cum vero sit $\cos\alpha^2 + \cos\zeta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ideoque $\cos\alpha^2 + \cos\zeta^2 = \sin\gamma^2$, $\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 = \sin\zeta^2$ et $\cos\zeta^2 + \cos\gamma^2 = \sin\alpha^2$, hae formulae abeunt in istas:

$$du = d\varepsilon\,(z\cos\zeta - y\cos\gamma) - \varepsilon z d\zeta \sin\zeta + \varepsilon y d\gamma \sin\gamma + \varepsilon\varepsilon dt\,(y\cos\alpha\cos\zeta + z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin\alpha^2)$$

$$dv = d\varepsilon\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \varepsilon x d\gamma \sin\gamma + \varepsilon z d\alpha \sin\alpha + \varepsilon\varepsilon dt\,(z\cos\zeta\cos\gamma + x\cos\alpha\cos\zeta - y\sin\zeta^2)$$

$$dw = d\varepsilon\,(y\cos\alpha - x\cos\zeta) - \varepsilon y d\alpha \sin\alpha + \varepsilon x d\zeta \sin\zeta + \varepsilon\varepsilon dt\,(x\cos\alpha\cos\gamma + y\cos\zeta\cos\gamma - z\sin\gamma^2)$$

ex quibus vires quaesitae elementares p, q, r innotescunt, has scilicet formulas per $\frac{dM}{2g\,dt}$ multiplicando.

COROLL. 1.

793. Si igitur singula corporis elementa a talibus ternis viribus sollicitentur, dum corpus circa axem IO celeritate angulari ε gyratur, elapso tempusculo dt, celeritas angularis ε augmentum accipiet $= d\varepsilon$, simulque axis gyrationis respectu axium principalium IA, IB, IC ita variabitur, ut anguli α, ζ, γ suis differentialibus $d\alpha$, $d\zeta$, $d\gamma$ augeantur.

COROLL. 2.

794. Quatenus vires contemplamur idem corporis elementum dM sollicitantes, quantitates x, y, z in his formulis insunt, tanquam constantes, quoniam iis situs elementi respectu axium principalium designatur, qui semper manet idem.

COROLL. 3.

795. Sin autem ab hoc elemento ad alia transire velimus, vires ea sollicitantes investigaturi, eaedem quantitates x, y, z erunt variabiles, et reliquae α, ζ, γ, ε cum suis differentialibus tanquam constantes spectandae: quoniam hae pro omnibus corporis elementis eodem instanti manent eaedem.

COROLL. 4.

796. Quare si vires omnia elementa sollicitantes in unam summam colligere velimus, hae tantum formulae $\int x\,dM$, $\int y\,dM$, et $\int z\,dM$ integrandae occurrunt; quarum differentialia cum evanescant, ob I centrum inertiae corporis, patet summas omnium virium p, item q et r seorsim evanescere.

SCHOLION.

797. Quia summae omnium virium p, q et r evanescunt; quod semper evenire debet, quamdiu centrum inertiae in quiete persistit, earum effectus tantum ex earum momentis est dijudicandus; atque aliae quaeque vires eadem momenta habentes eundem effectum producent, dummodo illis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur. Verum hic non sufficit, ut vires idem habeant momentum respectu unius cujuspiam axis, sed necesse est, ut respectu omnium plane axium eadem momenta producant, alioquin non pro aequivalentibus essent habendae. Hoc autem evenit, dummodo pro tribus axibus principalibus eadem momenta suppeditent, id quod sequente propositione extra dubium collocabitur.

PROBLEMA. 87.

798. Dum corpus rigidum circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari gyratur, definire virium momenta respectu trium axium principalium, quibus tam ipsi axi gyrationis quam celeritati angulari data immutatio indicatur.

SOLUTIO.

Fig. 103. Manentibus pro axe gyrationis IO angulis AIO $= \alpha$, BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, circa quem corpus jam gyretur celeritate angulari ε in sensum ABC; haeque quantitates tempusculo dt differentialibus suis crescere debeant; considerentur pro elemento corporis quocunque dM in Z coordinatis IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$ determinato vires elementares ante definitae

$$Za = p = \frac{du\,dM}{2g\,dt}\,;\ Zb = q = \frac{dv\,dM}{2g\,dt}\,;\ Zc = r = \frac{dw\,dM}{2g\,dt},$$

ex quibus respectu axis IA oritur momentum in sensum BC

$$= ry - qz = \frac{dM}{2g\,dt}\,(y\,dw - z\,dv)$$

at respectu axis IB momentum in sensum CA

$$= pz - rx = \frac{dM}{2g\,dt}\,(z\,du - x\,dw)$$

ac denique respectu axis IC momentum in sensum AB

$$= qx - py = \frac{dM}{2g\,dt}\,(x\,dv - y\,du).$$

Quodsi hic pro du, dv, dw formulas ante inventas substituamus, reperiemus:

$y\,dw$ —

$$ydv - zdu = d\varepsilon\,((yy + zz)\cos\alpha - xy\cos\beta - xz\cos\gamma) - \varepsilon\,(yy + zz)\,d\alpha\sin\alpha + \varepsilon xy\,d\beta\sin\beta + \varepsilon xz\,d\gamma\sin\gamma$$
$$+ \varepsilon\varepsilon dt\,((yy - zz)\cos\beta\cos\gamma + xy\cos\alpha\cos\gamma - xz\cos\alpha\cos\beta - yz\,(\sin\gamma^2 - \sin\beta^2))$$
$$zdu - xdw = d\varepsilon\,((xx + zz)\cos\beta - yz\cos\gamma - xy\cos\alpha) - \varepsilon\,(xx + zz)\,d\beta\sin\beta + \varepsilon yz\,d\gamma\sin\gamma + \varepsilon xy\,d\alpha\sin\alpha$$
$$+ \varepsilon\varepsilon dt\,((zz - xx)\cos\alpha\cos\gamma + yz\cos\alpha\cos\beta - xy\cos\beta\cos\gamma - xz\,(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2))$$
$$xdv - ydu = d\varepsilon\,((xx + yy)\cos\gamma - xz\cos\alpha - yz\cos\beta) - \varepsilon\,(xx + yy)\,d\gamma\sin\gamma + \varepsilon xz\,d\alpha\sin\alpha + \varepsilon yz\,d\beta\sin\beta$$
$$+ \varepsilon\varepsilon dt\,((xx - yy)\cos\alpha\cos\beta + xz\cos\beta\cos\gamma - yz\cos\alpha\cos\gamma - xy\,(\sin\beta^2 - \sin\alpha^2)).$$

Multiplicentur jam hae formulae per $\frac{dM}{2gdt}$; et per totam corporis molem integrentur: quem in finem sint Maa, Mbb, Mcc, momenta inertiae respectu axium principalium, IA, IB, IC, et cum sit

$$\int xxdM = \tfrac{1}{2}M\,(bb + cc - aa);\quad \int yzdM = 0$$
$$\int yydM = \tfrac{1}{2}M\,(aa + cc - bb);\quad \int xzdM = 0$$
$$\int zzdM = \tfrac{1}{2}M\,(aa + bb - cc);\quad \int xydM = 0$$

obtinebimus terna virium momenta respectu axium principalium, quibus effectus praescriptus producitur, ita expressa:

I. Momentum virium respectu axis IA in sensum BC

$$\frac{M}{2gdt}\,(aad\varepsilon\cos\alpha - \varepsilon aad\alpha\sin\alpha + \varepsilon\varepsilon\,(cc - bb)\,dt\cos\beta\cos\gamma)$$

II. Momentum virium respectu axis IB in sensum CA

$$\frac{M}{2gdt}\,(bbd\varepsilon\cos\beta - \varepsilon bbd\beta\sin\beta + \varepsilon\varepsilon\,(aa - cc)\,dt\cos\alpha\cos\gamma)$$

III. Momentum virium respectu axis IC in sensum AB

$$\frac{M}{2gdt}\,(ccd\varepsilon\cos\gamma - \varepsilon ccd\gamma\sin\gamma + \varepsilon\varepsilon\,(bb - aa)\,dt\cos\alpha\cos\beta).$$

COROLL. 1.

799. Ut ergo corpus circa eundem axem uniformiter gyretur, terna momenta virium ob $d\varepsilon = 0$, $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$, erunt

$$\text{I.} = \frac{M\varepsilon\varepsilon\,(cc - bb)\cos\beta\cos\gamma}{2g};\quad \text{II.} = \frac{M\varepsilon\varepsilon\,(aa - cc)\cos\alpha\cos\gamma}{2g}$$

et III.

$$\text{et III.} = \frac{M\varepsilon\varepsilon(bb - aa)\cos\alpha\cos\zeta}{2g}$$

quae, nisi axis gyrationis in aliquem axium principalium incidat, non evanescunt.

COROLL. 2.

800. Simili modo intelligitur, quibusnam viribus sit opus, ut vel sola celeritas angularis mutetur, vel sola axis gyrationis positio varietur: scilicet vires, quarum momenta cum ante definitis conveniant, hoc praestabunt, si modo illis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur, ut ipsae vires pro evanescentibus haberi queant, totusque effectus solis earum momentis debeatur.

COROLL. 3.

801. Si corpus circa ipsum axem principalem IA celeritate angulari ε gyretur, quae suo differentiali $d\varepsilon$ augeri debeat, ob $\alpha = 0$, et $\zeta = \gamma = 90°$, ad hoc tantum respectu axis IA requiritur momentum virium $= \frac{Maad\varepsilon}{2gdt}$, uti jam supra invenimus.

SCHOLION.

802. Problema hoc haud difficilius solutu fuisset, si corpori praeter motum gyratorium insuper motum progressivum quemcunque tribuissemus, qui tempusculo dt etiam praescripto modo variari deberet: si enim centrum inertiae motum habeat quemcunque, qui secundum axes principales resolutus praebeat celeritates l, m, n, tempusculo dt suis quoque differentialibus augendas, celeritates u, v, w supra valores ex motu gyratorio natos his progressivis l, m, n augeri deberent, atque ex harum incrementis nascerentur vires, quarum aequivalens per centrum inertiae transiret, pariterque se haberet, ac si corpus sine ullo motu gyratorio hunc solum motum progressivum prosequi deberet. Quo id confirmatur, quod jam supra ostendimus, in tali motu mixto semper motum progressivum et gyratorium separari, et utrumque seorsim, quasi alter non adesset, considerari ac determinari licere.

PROBLEMA. 88.

803. Si corpus rigidum, dum circa datum axem IO data celeritate angulari $= \varepsilon$ gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, quibus

simul

ſimul aequales et contrariae ipſi centro inertiae ſint applicatae, determinare tam variationem axis, quam mutationem celeritatis angularis elemento temporis dt productum.

SOLUTIO.

Colligantur virium ſollicitantium momenta reſpectu ternorum axium principalium corporis, ſitque

momentum virium reſpectu axis IA in ſenſum BC $= P$
momentum virium reſpectu axis IB in ſenſum CA $= Q$
momentum virium reſpectu axis IC in ſenſum AB $= R$.

Momenta autem inertiae corporis reſpectu eorundem axium ſint ut hactenus Maa, Mbb, Mcc. Quod ſi jam corpus gyretur in ſenſum ABC celeritate angulari $= \mathfrak{z}$ circa axem IO, cujus inclinationes ad eosdem axes principales nunc ſint AIO $= \alpha$, BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, hae quantitates tempuſculo dt ſequentes mutationes ſubibunt,

$$\frac{2gPdt}{Maa} = d\mathfrak{z}\cos\alpha - \mathfrak{z}d\alpha\sin\alpha + \frac{cc-bb}{aa}\mathfrak{z}\mathfrak{z}dt\cos\beta\cos\gamma$$

$$\frac{2gQdt}{Mbb} = d\mathfrak{z}\cos\beta - \mathfrak{z}d\beta\sin\beta + \frac{aa-cc}{bb}\mathfrak{z}\mathfrak{z}dt\cos\alpha\cos\gamma$$

$$\frac{2gRdt}{Mcc} = d\mathfrak{z}\cos\gamma - \mathfrak{z}d\gamma\sin\gamma + \frac{bb-aa}{cc}\mathfrak{z}\mathfrak{z}dt\cos\alpha\cos\beta,$$

ex quibus aequationibus quaternae incognitae α, β, γ, et $\mathfrak{z}$ determinantur, quoniam tantum pro tribus ſunt habendae ob $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Cum igitur ſit $d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + d\beta\sin\beta\cos\beta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma = 0$, ſi prima per $\cos\alpha$, ſecunda per $\cos\beta$, tertia per $\cos\gamma$ multiplicetur, productis addendis prodibit:

$$d\mathfrak{z} + \left(\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right)\mathfrak{z}\mathfrak{z}dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$= \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right) \text{ ſeu}$$

$$d\mathfrak{z} = \frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aabbcc}\mathfrak{z}\mathfrak{z}dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \frac{2gdt}{M}$$

$$\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right).$$

quo valore ſubſtituto obtinebuntur hae aequationes:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}d\alpha \sin\alpha = & \frac{cc-bb}{aa}\,\mathfrak{s}\mathfrak{s}dt\cos\beta\cos\gamma\left(1+\frac{(aa-cc)(bb-aa)}{bbcc}\cos\alpha^2\right)\\ & +\frac{2gdt}{M}\left(\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{bb}+\frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{cc}-\frac{P\sin\alpha^2}{aa}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}d\beta \sin\beta = & \frac{aa-cc}{bb}\,\mathfrak{s}\mathfrak{s}dt\cos\alpha\cos\gamma\left(1+\frac{(bb-aa)(cc-bb)}{aacc}\cos\beta^2\right)\\ & +\frac{2gdt}{M}\left(\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{cc}+\frac{P\cos\beta\cos\alpha}{aa}-\frac{Q\sin\beta^2}{bb}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}d\gamma \sin\gamma = & \frac{bb-aa}{cc}\,\mathfrak{s}\mathfrak{s}dt\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{(cc-bb)(aa-cc)}{aabb}\cos\gamma^2\right)\\ & +\frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\cos\gamma\cos\alpha}{aa}+\frac{Q\cos\gamma\cos\beta}{bb}-\frac{R\sin\gamma^2}{cc}\right).\end{aligned}$$

At si prima illarum aequationum per $aa\cos\alpha$, secunda per $bb\cos\beta$, tertia per $cc\cos\gamma$ multiplicetur, eas addendo orietur

$$\begin{aligned}\frac{2gdt}{M}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma) = & \, d\mathfrak{s}\,(aa\cos\alpha^2+bb\cos\beta^2\\ & +cc\cos\gamma^2)\\ & -\mathfrak{s}\,(aad\alpha\sin\alpha\cos\alpha+bbd\beta\sin\beta\cos\beta+ccd\gamma\sin\gamma\cos\gamma)\end{aligned}$$

quae per $2M\mathfrak{s}$ multiplicata et ex altera parte integrata dat

$$\begin{aligned}M\mathfrak{s}\mathfrak{s}\,(aa\cos\alpha^2+bb\cos\beta^2+cc\cos\gamma^2) = & \, 4g\int\mathfrak{s}dt\,(P\cos\alpha\\ & +Q\cos\beta+R\cos\gamma)\end{aligned}$$

quae quantitas exprimit corporis vim vivam.

COROLL. 1.

804. Si igitur, dum circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, hinc variationes momentaneae tam in situ axis gyrationis respectu axium principalium, quam in celeritate angulari determinantur.

COROLL. 2.

805. Si corpus a nullis plane viribus externis sollicitetur, axis gyrationis cum celeritate angulari ita variantur, ut sit:

$$\text{I. } d\mathfrak{s} = \frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aabbcc}\,\mathfrak{s}\mathfrak{s}dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\text{II. } d\alpha\sin\alpha = \frac{cc-bb}{aa}\,\mathfrak{s}dt\cos\beta\cos\gamma\left(1+\frac{(aa-cc)(bb-aa)}{bbcc}\cos\alpha^2\right)$$

III. $d\beta$

$$\text{III. } d\beta \sin\beta = \frac{aa - cc}{bb}\, gdt \cos\alpha \cos\gamma \left(1 + \frac{(bb-aa)(cc-bb)}{aacc} \cos\beta^2\right)$$

$$\text{IV. } d\gamma \sin\gamma = \frac{bb - aa}{cc}\, gdt \cos\alpha \cos\beta \left(1 + \frac{(cc-bb)(aa-cc)}{aabb} \cos\gamma^2\right)$$

et vis viva $Mgg\,(aa \cos\alpha^2 + bb \cos\beta^2 + cc \cos\gamma^2)$ perpetuo manet constans.

COROLL. 3.

806. Si corpus quiescat, ut sit $g = 0$, ex momentis virium P, Q, R respectu axium principalium sumtis, axis, circa quem corpus primum gyrari incipiet, ex his aequationibus definietur:

$$\frac{Q \cos\alpha \cos\beta}{bb} + \frac{R \cos\alpha \cos\gamma}{cc} - \frac{P \sin\alpha^2}{aa} = 0 \text{ seu } \frac{P}{aa} = \cos\alpha \left(\frac{P \cos\alpha}{aa} + \frac{Q \cos\beta}{bb} + \frac{R \cos\gamma}{cc}\right)$$

$$\frac{R \cos\beta \cos\gamma}{cc} + \frac{P \cos\beta \cos\alpha}{aa} - \frac{Q \sin\beta^2}{bb} = 0 \text{ seu } \frac{Q}{bb} = \cos\beta \left(\frac{P \cos\alpha}{aa} + \frac{Q \cos\beta}{bb} + \frac{R \cos\gamma}{cc}\right)$$

$$\frac{P \cos\gamma \cos\alpha}{aa} + \frac{Q \cos\gamma \cos\beta}{bb} - \frac{R \sin\gamma^2}{cc} = \beta \text{ seu } \frac{R}{cc} = \cos\gamma \left(\frac{P \cos\alpha}{aa} + \frac{Q \cos\beta}{bb} + \frac{R \cos\gamma}{cc}\right)$$

unde cum sit $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{P}{aa} : \frac{Q}{bb} : \frac{R}{cc}$, erit

$$\cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

ac tempusculo dt fiet:

$$dg = \frac{2gdt}{M} \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}.$$

 SCHO-

SCHOLION 1.

807. In hoc ergo solo problemate omnia continentur, quae supra per multas ambages magno labore elicuimus, cum tamen hic nonnisi primis motus principiis simus usi, omniaque sint maxime perspicua. Ita cum supra, dum corpus quiescit, axem, circa quem ipsi vires primum motum gyratorium imprimunt, vehementer operose determinavissemus, hic ista determinatio instar corollarii ex praesente problemate sponte fluxit: cujus consensus cum superiori quo facilius perspiciatur, ac ne ambiguitas signi radicalis moram facessat, sit iterum pro axe gyrationis IF angulus AIE $= \eta$
Fig. 82. et angulus EIF $= \vartheta$, erit $\cos\alpha = \cos\eta \cos\vartheta$; $\cos\beta = -\sin\eta \cos\vartheta$ et $\cos\gamma = \sin\vartheta$, unde ob $\tan\eta = \frac{-\cos\beta}{\cos\alpha}$ erit $\tan\eta = \frac{-Qaa}{Pbb}$ et $\tan\vartheta = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\cos\eta = \frac{Raa}{Pcc}\cos\eta$. Cum autem vires sollicitantes ibi sint $VP = P$, $VQ = Q$; $VR = R$ existente angulo AIV $= \delta$ et IV $= h$: erit harum virium momentum respectu axis IA in sensum BC $= Rh \sin\delta$, quod hic nobis est P: tum earum momentum respectu axis IB in sensum CA $= -Rh\cos\delta$, quod hic nobis est Q, et momentum respectu axis IC in sensum AB $= Qh\cos\delta - Ph\sin\delta$, quod hic nobis est R. Quibus valoribus pro P, Q et R positis, habebimus prorsus ut supra $\tan\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$ et

$$\tan\vartheta = \frac{aa(Q\cos\delta - P\sin\delta)}{ccR\sin\delta}\cos\eta.$$

Deinde, etiam quae supra de variatione momentanea motus gyratorii, dum corpus a nullis viribus sollicitatum circa axem non principalem gyratur, per nimis intricata ratiocinia tandem eruimus, hic positis virium momentis $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ fiunt planissima, uti in coroll. 2. ostendimus. Quae autem supra vix attingere ausi fueramus, cum corpus insuper a viribus quibuscunque sollicitatur, hic pari facilitate eodemque labore feliciter expedivimus, ita ut in hoc tantum capite a primis motus principiis profecti universam Theoriam motus corporum rigidorum perfecte condidisse videamur.

SCHOLION 2.

808. Cum autem propositis viribus sollicitantibus quibuscunque, quarum momenta respectu axium principalium in sensum ABC sumta sint P, Q, R, totum negotium in determinatione ternorum angulorum α, β, γ et

γ et celeritatis ε verſetur, pro quo ternas invenimus aequationes; quandoquidem anguli illi relationem inter ſe tenent: aequationes illae levi ſubſtitutione multo commodiores reddi poſſunt. Quodſi enim, quia litteris x, y, z ad indolem corporis indicandam non amplius indigemus, ponamus

$$\varepsilon \cos\alpha = x; \quad \varepsilon \cos\beta = y; \quad \varepsilon \cos\gamma = z;$$

omnes anguli ex calculo elidentur, ſummaque totius Theoriae motus corporum rigidorum his tribus formulis ſatis ſimplicibus continebitur:

$$dx + \frac{cc-bb}{aa}\, yz\,dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa-cc}{bb}\, xz\,dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb-aa}{cc}\, xy\,dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc}.$$

Quare ſi corpus a nullis viribus ſollicitetur, ſtatim colligimus $aax\,dx + bby\,dy + ccz\,dz = 0$ ſeu $aaxx + bbyy + cczz =$ Conſt. Tum vero ex binis dt elidendo erit $\frac{aa\,dx}{bb\,dy} = \frac{(cc-bb)\,y}{(aa-cc)\,x}$ ideoque integrando $\frac{aa}{cc-bb}\, xx = \frac{bb}{aa-cc}\, yy +$ Conſt. Quare ſi initio fuerit $x = \mathfrak{A}$; $y = \mathfrak{B}$; $z = \mathfrak{C}$, ponamusque $\frac{aa}{cc-bb} = \mathrm{A}$; $\frac{bb}{aa-cc} = \mathrm{B}$ et $\frac{cc}{bb-aa} = \mathrm{C}$, habebitur

$$\mathrm{A}xx - \mathrm{B}yy = \mathrm{A}\mathfrak{A}^2 - \mathrm{B}\mathfrak{B}^2 \text{ et } \mathrm{A}xx - \mathrm{C}zz = \mathrm{A}\mathfrak{A}^2 - \mathrm{C}\mathfrak{C}^2$$

ideoque $y = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}xx - \mathrm{A}\mathfrak{A}^2 + \mathrm{B}\mathfrak{B}^2)}}{\sqrt{\mathrm{B}}}$ et $z = \frac{\sqrt{(\mathrm{A}xx - \mathrm{A}\mathfrak{A}^2 + \mathrm{C}\mathfrak{C}^2)}}{\sqrt{\mathrm{C}}}$.

Quare cum ſit $\mathrm{A}dx + yz\,dt = 0$, fiet

$$dt = \frac{-\mathrm{A}dx\sqrt{\mathrm{BC}}}{\sqrt{(\mathrm{A}xx - \mathrm{A}\mathfrak{A}^2 + \mathrm{B}\mathfrak{B}^2)(\mathrm{A}xx - \mathrm{A}\mathfrak{A}^2 + \mathrm{C}\mathfrak{C}^2)}}$$

ſicque etiam hoc problema, quod ſupra non parum moleſtiae creaverat, ſatis expedite eſt ſolutum.

PROBLEMA 89.

809. Si ad quodvis tempus noverimus axem gyrationis reſpectu axium principalium, una cum celeritate angulari corporis circa hunc axem; definire ad quodvis tempus ſitum axium principalium reſpectu ſpatii abſoluti.

SOLUTIO.

Fig. 89. In ſpatio abſoluto concipiatur ſphaera immobilis, in cujus centro verſetur corporis centrum inertiae I, in eaque aſſumatur circulus fixus maximus ZXVY, in eoque punctum fixum Z, quo ſitus axium principalium quovis tempore referatur. Ac nunc quidem elapſo tempore t reſpondeant corporis axes principales in ſphaera immobili punctis A, B, C, a quibus ſi ad Z ducantur arcus circulorum maximorum, vocentur ii $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$, tum vero ſint anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$. Nunc autem reperiatur axis gyrationis in O, ut ſit $AO = \alpha$, $BO = \beta$ et $CO = \gamma$, circa quem corpus gyretur in ſenſum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$: tempuſculo ergo dt polus A vertetur per arculum $Aa = \varepsilon dt \sin\alpha$, exiſtente Aa ad arcum OA normali, ita ut ſit

$$\sin BAa = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \text{ et } \cos BAa = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

At eſt $\sin ZAB = -\frac{\cos n}{\sin l}$ et $\cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l}$;

unde colligitur

$$\sin ZAa = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}; \quad \cos ZAa = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\sin l}.$$

Ducto jam ex a ad arcum ZA perpendiculo $a\alpha$, erit

$$A\alpha = \frac{\varepsilon dt}{\sin l}(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) \text{ et } a\alpha = \frac{\varepsilon dt}{\sin l}(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n).$$

Verum eſt $A\alpha = -dl$ et $a\alpha = -d\lambda\sin l$

ideoque hinc et ob analogiam ſequentes concluduntur differentialium valores:

$$dl\sin l = \varepsilon dt(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m); \quad d\lambda\sin l^2 = -\varepsilon dt(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)$$

$$dm\sin m = \varepsilon dt(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n); \quad d\mu\sin m^2 = -\varepsilon dt(\cos\gamma\cos n + \cos\alpha\cos l)$$

$$dn\sin n = \varepsilon dt(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l); \quad d\nu\sin n^2 = -\varepsilon dt(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m).$$

Harum autem ternarum priorum binas reſolviſſe ſufficit, cum ſit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, iisque reſolutis unica reliquarum totum negotium abſolvit.

COROLL.

COROLL. 1.

810. Si ponamus $\mathfrak{z}\cos\alpha = x$; $\mathfrak{z}\cos\beta = y$ et $\mathfrak{z}\cos\gamma = z$, ut fit ex momentis virium sollicitantium P, Q, R,

$$dx + \frac{cc - bb}{aa}\, yzdt = \frac{2gPdt}{Maa};\ dy + \frac{aa - cc}{bb}\, xzdt = \frac{2gQdt}{Mbb},$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc}\, xydt = \frac{2gRdt}{Mcc};$$

nunc sequentes aequationes adjungi oportet,

$$dl \sin l = dt\,(y\cos n - z\cos m);\ dm \sin m = dt\,(z\cos l - x\cos n);$$
$$dn \sin n = dt\,(x\cos m - y\cos l)$$

$$d\lambda \sin l^2 = -\,dt\,(y\cos m + z\cos n);\ d\mu \sin m^2 = -\,dt\,(z\cos n + x\cos l);\ d\nu \sin n^2 = -\,dt\,(x\cos l + y\cos m).$$

COROLL. 2.

811. Si porro ponamus $\cos l = p$; $\cos m = q$, $\cos n = r$, posteriores aequationes has induent formas ob $pp + qq + rr = 1$:

$$dp + dt\,(yr - zq) = 0;\ dq + dt\,(zp - xr) = 0;\ dr + dt\,(xq - yp) = 0$$

$$d\lambda + \frac{dt\,(yq + zr)}{qq + rr} = 0;\ d\mu + \frac{dt\,(zr + xp)}{pp + rr} = 0;\ d\nu + \frac{dt\,(xp + yp)}{pp + qq} = 0;$$

unde etiam fit $xdp + ydq + zdr = 0$, quemadmodum est $pdp + qdq + rdr = 0$.

SCHOLION.

812. Etsi hic problema praecedens, quasi jam esset solutum, spectavi, tamen plerumque ambo problemata conjungi eorumque resolutionem simul institui oportet, quemadmodum in praecedente capite de motu turbinum usu venit. Haec scilicet amborum problematum conjunctio necessaria est, quando vires sollicitantes a situ corporis absoluto pendent, quod quidem, si vires externae affuerint, semper contingere solet. His igitur casibus, momenta virium P, Q, R arcus l, m, n ac fortasse etiam angulos λ, μ, ν involvent: ita ut omnes aequationes coroll. 1. exhibitae simul perpendi debeant, antequam solutio suscipi queat. Quodsi corpus insuper motu progressivo feratur, fieri solet, ut vires etiam ab eo perdeant,

ant, ex quo formulas motum progressivum involventes simul ad reliquas adjici oportebit, quibus casibus solutio maxime complicata redderur. Nunc igitur his problematibus expeditis problema generale de motu libero corporum rigidorum a viribus quibuscunque sollicitatorum aggredi poterimus.

PROBLEMA 90.

813. Si corpus rigidum initio quomodocunque projectum deinceps a viribus quibuscunque sollicitetur, quarum actioni libere obsequi queat, ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Quod primo ad ejus motum progressivum, seu motum, quo centrum inertiae promovetur, attinet, is per eadem praecepta, quae pro motu punctorum sunt tradita, definietur. Scilicet tota corporis massa, quae sit $= M$, in ejus centro inertiae collecta concipiatur, ac singulis momentis omnes vires, quibus corpus sollicitatur, secundum suam quaeque directionem ipsi centro inertiae applicentur; ut habeatur casus puncti, cujus autem massa finita est censenda $= M$, a viribus sollicitati, cujus propterea motus per praecepta supra tradita determinari vel saltem formulis analyticis exprimi poterit, nulla habita ratione motus gyratorii, quo interea forte corpus circa centrum inertiae agitetur. Tum vero ad hunc motum investigandum, priori motu progressivo penitus seposito, centrum inertiae jam ut quiescens consideretur; ac primo quidem corporis terni axes principales explorentur, qui ex centro inertiae I educti sint IA, IB, IC, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc: quibus cognitis sphaera concipiatur immobilis circa centrum inertiae I descripta, in qua tam circulus maximus ZXVY quam in eo punctum Z fixum assumatur, quo situs corporis quovis tempore referatur. Nunc igitur elapso tempore $= t$ teneat corpus ob motum gyratorium situm in figura repraesentatum, in quo axes principales respondeant in superficie sphaerica punctis A, B, C quadrantis intervallo a se invicem distantibus: pro quorum situ praesente ponatur;

arcus $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$ item
anguli $XZA = \lambda$; $XZB = \mu$, $XZC = \nu$,

qui quomodo a se invicem pendeant, ex sphaericis est manifestum. Porro gyretur nunc corpus circa axem IO celeritate angulari $= g$ in sensum ABC, ac pro situ hujus axis ponantur arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; atque hae sunt quantitates per sua differentialia ita determinanda, ut posito $t = o$, statui

ſtatui corporis initiali conveniant. Ad hoc conſiderentur vires corpus nunc ſollicitantes, quarum colligantur momenta inertiae reſpectu axium principalium corporis: ſitque

mom. virium reſpectu axis IA in ſenſum BC = P
mom. virium reſpectu axis IB in ſenſum CA = Q
mom. virium reſpectu axis IC in ſenſum AB = R,

atque ponendo brevitatis gratia $s \cos\alpha = x$, $s \cos\zeta = y$, et $s \cos\gamma = z$, ut ſit $s = \sqrt{(xx + yy + zz)}$, ſupra invenimus fore:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa}\, yzdt = \frac{2gPdt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb}\, xzdt = \frac{2gQdt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc}\, xydt = \frac{2gRdt}{Mcc},$$

quibuscum, poſito $\cos l = p$, $\cos m = q$ et $\cos n = r$, conjungantur hae aequationes:

$$dp + dt\,(yr - zq) = 0;\ dq + dt\,(zp - xr) = 0,\ dr + dt\,(xq - yp) = 0$$

$$d\lambda + \frac{dt\,(yq + zr)}{qq + rr} = 0;\ d\mu + \frac{dt\,(zr + xp)}{rr + pp} = 0;\ d\nu + \frac{dt\,(xp + yp)}{pp + qq} = 0,$$

quae ſi ita reſolvi et integrari queant, ut ad quodvis tempus t aſſignari poſſint quantitates x, y, z, p, q, r, λ, μ, ν, problema erit perfecte ſolutum. In his poſtremis autem aequationibus notandum eſt, eſſe $pp + qq + rr = 1$, unde $pdp + qdq + rdr = 0$, tum vero etiam $xdp + ydq + zdr = 0$. Denique $\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$ et $\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m}$, ideoque $\tang(\mu - \lambda) = \frac{r}{pq}$; et $\tang(\nu - \mu) = \frac{p}{qr}$, tum $\tang(\lambda - \nu) = \frac{q}{pr}$ ſeu $\tang(\nu - \lambda) = \frac{-q}{pr}$; ita ut ſufficiat angulorum λ, μ, ν unicum inveniſſe.

SCHOLION.

814. Haec praecepta pro motu corporum rigidorum determinando latissime patent, neque tantum ad motum liberum sunt adstricta: quomodocunque enim eorum motus compescitur, sive super plano quodam, sive juxta alia corpora incedere cogantur, sive quodpiam eorum punctum fixum retineatur, quaestio semper ad tradita praecepta reduci potest. Scilicet qua parte aliud corpus contingunt, ibi dabitur pressio, quae primo indefinite in calculum introducta deinceps ita determinari debet, ut motus propositis conditionibus consentaneus reddatur: atque etiam hoc modo conflictus corporum explorabitur. Cujusmodi investigationes antequam suscipiamus, casum quendam motus liberi expendi conveniet, in quo motus gyratorius circa axem variabilem locum inveniat, dum corpus a viribus externis sollicitatur; cujusmodi motus a vi gravitatis, quippe cujus directio per centrum inertiae cujusque corporis transit, non producitur. Gravissima autem hujus generis quaestio sine dubio in motu vertiginis corporum coelestium versatur, quae autem nonnisi positis Astronomiae Theoreticae principiis suscipi potest. Consensu autem omnium observationum, quas adhuc instituere licuit, compertum est, corpora coelestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent, vel ad se invicem pellerentur viribus, quae sint in ratione reciproca duplicata distantiarum atque insuper massis proportionales. Scilicet quemadmodum quaevis corpora terram versus gravia sunt, ita etiam nisum quendam habent versus omnia corpora coelestia, qui eo major evadat, quo magis quadratum distantiae diminuatur. Atque ex his viribus Astronomi motus progressivos corporum coelestium scrutari solent, quae investigatio cum ad motus punctorum sit referenda, hic tantum in motus gyratorios corporum coelestium inquiramus, quod argumentum in sequente capite generatim ita pertractare studebo, ut Astronomia inde haud contemnenda incrementa sit consecutura.

CAPUT XVI.

DE MOTU GYRATORIO SEU VERTIGINIS CORPORUM COELESTIUM.

PROBLEMA. 91.

815. Si corporis rigidi singula elementa sollicitentur versus aliquod punctum F viribus, quae sint ut eorum massae per quadrata distantiarum ab

ab eo puncto divisae, determinare harum virium momenta respectu axium principalium corporis.

SOLUTIO.

Sint IA, IB, IC axes principales corporis, eorumque respectu ejus momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc: Puncti autem F seu centri virium a centro inertiae corporis I distantia ponatur $IF = s$: quae ita ad ternos axes principales corporis sit inclinata, ut sint anguli $AIF = \zeta$; $BIF = \eta$ et $CIF = \vartheta$, hinc demisso ex F ad planum AIB perpendiculo FE, et ex E ad axem IA normali EA, erit $IA = s \cos\zeta$, $AE = s \cos\eta$ et $EF = s \cos\vartheta$. Fig. 104. Vis porro singula corpora ad punctum F pellens tanta sit, ut in distantia $= e$ aequetur gravitati: in aliis autem distantiis secundum quadrata earum diminuatur. Consideretur nunc corporis elementum quodcunque dM in Z, pro quo sint coordinate axibus principalibus congruae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, atque vis, qua hoc elementum dM ad punctum F urgetur, erit $= \frac{ee}{ZF^2} dM$. Iam haec vis resolvatur secundum directiones axium Zp, Zq, Zr, eritque vis secundum $Zp = \frac{ee(s\cos\zeta - x)\,dM}{ZF^3}$

$$\text{vis secundum } Zq = \frac{ee(s\cos\eta - y)\,dM}{ZF^3}$$

$$\text{vis secundum } Zr = \frac{ee(s\cos\vartheta - z)\,dM}{ZF^3}$$

atque hinc erunt momenta istarum virium respectu axium principalium:

$$\text{mom. axis IA in sensum BC} = \frac{ees(y\cos\vartheta - z\cos\eta)\,dM}{ZF^3}$$

$$\text{mom. axis IB in sensum CA} = \frac{ees(z\cos\zeta - x\cos\vartheta)\,dM}{ZF^3}$$

$$\text{mom. axis IC in sensum AB} = \frac{ees(x\cos\eta - y\cos\zeta)\,dM}{ZF^3}.$$

His igitur momentis per totum corpus colligendis obtinebimus momenta, quae supra litteris P, Q, R indicavimus, ita ut sit ob s quantitatem constantem:

$$P = ees \int \frac{(y\cos\vartheta - z\cos\eta)\,dM}{ZF^3}$$

$$Q = ees \int \frac{(z \cos\zeta - x \cos\vartheta)\, dM}{ZF^3}$$

$$R = ees \int \frac{(x \cos\eta - y \cos\zeta)\, dM}{ZF^3}.$$

Est autem

$$ZF = \surd\left((s\cos\zeta - x)^2 + (s\cos\eta - y)^2 + (s\cos\vartheta - z)^2\right)$$

seu ob $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2 = 1$:

$$ZF = \surd\,(ss - 2sx\cos\zeta - 2sy\cos\eta - 2sz\cos\vartheta + xx + yy + zz).$$

Cum autem in corporibus coelestibus distantia $IF = s$ sit semper vehementer magna prae ipso corpore seu quantitatibus x, y, z; erit satis exacte ad nostrum institutum $\frac{1}{ZF^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3x\cos\zeta + 3y\cos\eta + 3z\cos\vartheta}{s^4}$.

Quoniam vero ob I centrum corporis inertiae, et IA, IB, IC ejus axes principales habemus $\int x dM = 0$, $\int y dM = 0$, $\int z dM = 0$, atque $\int xy dM = 0$, $\int xz dM = 0$; $\int yz dM = 0$, prodibit his factis substitutionibus:

$$P = ees \int \frac{(3yy\cos\eta\cos\vartheta - 3zz\cos\eta\cos\vartheta)\, dM}{s^4} = \frac{3ee\cos\eta\cos\vartheta}{s^3}$$
$$\int (yy - zz)\, dM$$

$$Q = \frac{3ee\cos\zeta\cos\vartheta}{s^3} \int (zz - xx)\, dM; \quad R = \frac{3ee\cos\zeta\cos\eta}{s^3}$$
$$\int (xx - yy)\, dM$$

Verum ob data momenta inertiae est

$\int xx dM = \frac{1}{2}M(bb + cc - aa)$; $\int yy dM = \frac{1}{2}M(aa + cc - bb)$ et $\int zz dM = \frac{1}{2}M(aa + bb - cc)$: quocirca erit

$$P = \frac{3Mee(cc - bb)\cos\eta\cos\vartheta}{s^3}$$

$$Q = \frac{3Mee(aa - cc)\cos\zeta\cos\vartheta}{s^3}$$

$$R = \frac{3Mee(bb - aa)\cos\zeta\cos\eta}{s^3}.$$

COROLL. 1.

816. Haec igitur momenta virium non rigore geometrico sunt definita, sed tantum valent, quando distantia puncti attrahentis magnitudinem corporis attracti longe superat. Atque sic commode evenit, ut ea per momenta inertiae tam concinne exprimi potuerint.

COROLL.

COROLL. 2.

817. Si corpus attractum omnia momenta inertiae habeat inter se aequalia, etiam haec virium momenta evanescunt: eatenus ergo tantum motus gyratorius corporum coelestium ab hujusmodi viribus afficitur, quatenus ea non sunt sphaerica, seu saltem momentis inertiae aequalibus praedita.

SCHOLION 1.

818. Si quantum hae vires ad motum progressivum conferant, definire velimus, singulas vires elementares ipsi centro inertiae applicare debemus: quas si pro quolibet axe in unam summam colligamus, habebimus totam vim corpus ad motum progressivum sollicitantem. Ut autem ad binas dimensiones variabilium x, y, z ascendamus, accuratius valorem ZF exprimere debemus, ut sit:

$$\frac{1}{ZF^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta)}{s^4} + \frac{15(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta)^2}{2s^5}$$
$$- \frac{3(xx + yy + zz)}{2s^5}.$$

Haec formula per $(s\cos\zeta - x)\,dM$ multiplicata, et secundum praecepta superiora integrata dabit $\int \frac{(s\cos\zeta - x)\,dM}{ZF^3}$

$$= \frac{M\cos\zeta}{ss} + \frac{15\cos\zeta}{2s^4}\int dM\,(xx\cos\zeta^2 + yy\cos\eta^2 + zz\cos\vartheta^2)$$
$$- \frac{3\cos\zeta}{2s^4}\int dM\,(xx + yy + zz) - \frac{3\cos\zeta}{s^4}\int xx\,dM$$

quae in hanc formam transmutatur:

$$\frac{M\cos\zeta}{ss} + \frac{3M\cos\zeta}{2s^4}(aa(3 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2) + cc$$
$$(1 - 5\cos\vartheta^2)).$$

Quare nanciscemur sequentes tres vires

$$\text{I. sec. IA} = \frac{Mee\cos\zeta}{ss} + \frac{3Mee\cos\zeta}{2s^4}(aa(3 - 5\cos\zeta^2) + bb$$
$$(1 - 5\cos\eta^2) + cc(1 - 5\cos\vartheta^2)$$

$$\text{II. sec. IB} = \frac{Mee\cos\eta}{ss} + \frac{3Mee\cos\eta}{2s^4}(bb(3 - 5\cos\eta^2) + cc$$
$$(1 - 5\cos\vartheta^2) + aa(1 - 5\cos\zeta^2)$$

III. sec.

III. sec. $IC = \frac{Mee \cos\vartheta}{ss} + \frac{3Mee \cos\vartheta}{2s^4}(cc(3 - 5\cos\vartheta^2) + aa$
$(1 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2))$.

Hae tres autem vires revocantur primo ad unicam in directione IF sollicitantem, quae est:

$$\frac{Mee}{ss} + \frac{3Mee}{2s^4}(aa(1 - 5\cos\zeta^2) + bb(1 - 5\cos\eta^2) + cc(1 - 5\cos\vartheta^2))$$

cui insuper sunt adjungendae hae ternae

$$1°.\ \text{sec. } IA = \frac{3Maaee\cos\zeta}{s^4};\quad 2°.\ \text{sec. } IB = \frac{3Mbbee\cos\eta}{s^4};$$

$$3°.\ \text{sec. } IC = \frac{3Mccee\cos\vartheta}{s^4}.$$

Unde patet, si terna momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, omnes vires ad unicam $\frac{Mee}{ss}$ secundum IF agentem reduci, quae in Theoria Astronomiae spectatur, reliquis vero casibus vis illa centripeta non erit pure quadrato distantiae reciproce proportionalis, sed eo accedunt insuper exiguae particulae biquadrato distantiae reciproce proportionales, quae autem praeterea a situ corporis respectu virium F pendent: ad quam aberrationem in calculo Astronomico attendisse juvabit, praecipue si corpora notabiliter a figura sphaerica recedant.

SCHOLION. 2.

819. Assumsi hic singula corporis elementa versus unicum punctum F urgeri, cum tamen in hypothesi Attractionis etiam ad singula corporis attrahentis elementa sollicitentur. Verum si corpus attrahens fuerit sphaera, certum est, id perinde ad se adtrahere, ac si tota ejus massa in centro esset unita; ita ut nostrum problema etiam hos casus in se complectatur. At si corpus attrahens non fuerit sphaericum, mutabitur quidem paulisper tam ratio reciproca duplicata, quam directio vis, quae non amplius ad certum punctum erit directa: verum haec irregularitas in ingenti distantia penitus evanescere est censenda, praecipue cum corpora coelestia parum a figura sphaerica discrepent. Hic autem quoniam tantum ad motum gyratorium respicio, a motu progressivo mentem abstrahendo, centrum inertiae corporis in quiete considero, ac primo, si ipsum corpus quiescat circa quemnam axem motum gyratorium sit accepturum, investigabo.

PROBLE-

PROBLEMA. 92.

820. Si corpus quiescat, idque a centro virium F modo ante definito sollicitetur, definire axem circa quem primo instanti motum gyratorium accipiet, ac celeritatem angularem inde genitam. Tabula XV. Fig. 105.

SOLUTIO.

Corpus ergo in quiete consideramus, seu potius ab ejus motu progressivo mentem abstrahimus: ejus igitur centro inertiae in centro sphaerae constituto sint A, B, C poli axium principalium, eorumque respectu, ut hactenus, momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Iam recta ex centro inertiae ad centrum virium ducta trajiciat superficiem sphaericam in puncto F, ut sint arcus $AF = \zeta$, $BF = \eta$, $CF = \vartheta$; distantia autem centri virium sit $= s$, ejusque vis attrahens tanta, ut in distantia $= e$ aequetur gravitati. Hinc virium momenta P, Q, R respectu axium principalium IA, IB, IC sunt:

$$P = \frac{3Mee\,(cc - bb)\cos\eta\cos\vartheta}{s^3};\quad Q = \frac{3Mee\,(aa - cc)\cos\zeta\cos\vartheta}{s^3}$$

atque $R = \dfrac{3Mee\,(bb - aa)\cos\zeta\cos\eta}{s^3}$.

Quare ex §. 806. corpus gyrari incipiet circa ejusmodi axem IO, ut positis arcubus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$ futurum sit

$$\cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

tempusculo autem dt acquiret celeritatem angularem nascentem $d\omega$

$$= \frac{2gdt}{M}\sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

quae in sensum ABC erit directa. Atque ex his distantia poli gyrationis O a puncto F ita reperitur expressa, ut sit

$$\cos OF = \left(\frac{P\cos\zeta}{aa} + \frac{Q\cos\eta}{bb} + \frac{R\cos\vartheta}{cc}\right) : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}.$$

COROLL.

COROLL. 1.

821. Memoratu hic dignus est casus, quo centrum virium F cadit intra binos polos principales: cadat enim punctum F in arcum AB et ob $\cos\vartheta = 0$, et $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 = 1$, erit $P = 0$, $Q = 0$ et $R = \frac{3Mee(bb - aa)\sin\zeta\cos\zeta}{s^3}$; unde etiam fit $\cos\alpha = 0$, et $\cos\beta = 0$, et $\cos\gamma = 1$, ita ut polus gyrationis O cadat in polum principalem C.

COROLL. 2.

822. Eodem casu, quo centrum virium est in plano AIB, et corpus circa axem IC gyrari incipit, primo tempusculo dt acquirit celeritatem angularem nascentem $d\varepsilon = \frac{6gee(bb - aa)\,dt\,\sin\zeta\cos\zeta}{ccs^3}$ in sensum AB, seu $d\varepsilon = \frac{3gee(bb - aa)\,dt\,\sin 2\zeta}{ccs^3}$.

COROLL. 3.

823. Quodsi ergo eodem casu corpus jam habuerit motum gyratorium circa istum axem IC celeritate $= \varepsilon$ in sensum AB, is ob vim sollicitantem versus centrum virium F tendentem accelerabitur, ita ut fiat $d\varepsilon = \frac{3gee(bb - aa)\,dt\,\sin 2\zeta}{ccs^3}$.

SCHOLION.

824. Hinc ergo evidens est, si centrum virium F ita circa corpus circumferatur; ut per circulum maximum AB duos axes principales IA et IB continentem incedat, corpusque circa reliquum axem principalem IC gyrari coeperit: tum perpetuo circa eundem axem IC esse gyraturum, solamque celeritatem angularem ε modo auctum modo minutum iri. Casus hic omnino dignus est, qui omni studio evolvatur; quoniam motum libratorium lunae, quo semper fere eandem faciem terrae obvertit, complecti videtur. Quae investigatio quo facilior et clarior reddatur, primo centrum virium motu uniformi circa corporis centrum inertiae in eodem plano circumferri, ac perpetuo eandem distantiam servare assumamus.

PROBLE-

PROBLEMA 93.

825. Si corpus gyretur circa suum axem principalem IC, centrum virium autem F in plano ad eum normali uniformiter circumferatur, ejus distantia a centro inertiae corporis eadem manente, definire motum gyratorium hujus corporis.

SOLUTIO.

Quoniam ergo axis gyrationis IC manet constans, et coeli respectu quasi fixus: sit XCY hemisphaerium coeleste, et XY circulus maximus polo C descriptus, in quo centrum virium F uniformiter incedat, atque in hoc circulo quoque constanter inerunt bini reliqui poli principales corporis A et B. Ponatur celeritas angularis centri virium F $= \delta$, quod cum initio fuisset in X, tempore elapso $= t$ arcum descripserit necesse est XF $= \delta t$. Eodem autem temporis momento alter axis principalis reperiatur in A, positoque arcu XA $= \lambda$, si celeritas angularis corporis circa axem IC sit $= \varepsilon$, in sensum AB, erit $d\lambda = \varepsilon dt$. Tum vero ob AF $= \delta t - \lambda$, quod supra erat ζ, hic nobis est $\delta t - \lambda$; at retentis reliquis quantitatibus aa, bb, cc, itemque ee et s, quae sunt constantes; ut supra, habebimus hanc aequationem $d\varepsilon = \frac{3gee\,(bb-aa)}{ccs^3}\,dt \sin 2\zeta$. Introducamus autem angulum ACF $= \zeta$, et ob $\zeta = \delta t - \lambda$, nanciscimur $\lambda = \delta t - \zeta$ et $d\lambda = \delta dt - d\zeta = \varepsilon dt$, unde fit $\varepsilon = \delta - \frac{d\zeta}{dt}$. Quocirca sumto elemento dt constante prodit haec aequatio resolvenda:

$$dd\zeta + \frac{3gee\,(bb-aa)}{ccs^3}\,dt^2 \sin 2\zeta = 0.$$

Statuamus brevitatis gratia $\frac{3gee\,(bb-aa)}{ccs^3} = N$, et multiplicando per $2d\zeta$ fit

$$2d\zeta\, dd\zeta + 2N dt^2\, d\zeta \sin 2\zeta = 0$$

cujus integralis est: $d\zeta^2 - N dt^2 \cos 2\zeta = C dt^2$, unde colligitur $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(C + N\cos 2\zeta)}}$,

$$\text{atque } \varepsilon = \delta - \sqrt{(C + N\cos 2\zeta)}.$$

Ex illa autem aequatione ad quodvis tempus t arcum AF $= \zeta$ definiri oportet, qui si esset constans, corpus perpetuo eandem faciem centro virium F obverteret. Quatenus ergo N non est $= 0$, et angulus ζ variationi obnoxius,

noxius, celeritas angularis $\mathfrak{z}$ est variabilis: ad quae phaenomena exploranda binos casus evolvi decet, prout fuerit vel $bb > aa$ vel $bb < aa$, quorum uterque pro ratione constantis C infinitam varietatem complectitur.

CASUS. I. quo $bb > aa$.

826. Sit igitur $\frac{3gee(bb-aa)}{cc\zeta^3} = n$ numero positivo, et dum centrum virium F celeritate δ per circulum XFY progreditur, et ad tempus t arcus FA in antecedentia vergens vocetur $= \zeta$, erit $dt = \frac{d\zeta}{\surd(C + n\cos 2\zeta)}$ ubi ratione constantis C sequentia annoto:

1°. Si $C = -n$, (nam valorem negativum majorem habere nequit), erit $dt = \frac{d\zeta}{\surd n(-1+\cos 2\zeta)}$, ideoque angulus ζ necessario est $= 0$; scilicet punctum A cum F semper congruet, cum eoque uniformiter circa axem IA gyrabitur.

2°. Si $C = 0$, angulus ζ minor erit semirecto sive positivus sive negativus, et intra limites $+45°$ et $-45°$ vagabitur: Punctum A ergo nunquam ultra $45°$ a puncto F recedet, sed modo ante modo post id reperietur, qui motus ex aequatione $dt = \frac{d\zeta}{\surd n\cos 2\zeta}$ colligi debet.

3°. Si $C = n$; et aequatio $dt = \frac{d\zeta}{\surd n(1+\cos 2\zeta)}$ abit in hanc $dt = \frac{d\zeta}{\cos\zeta\surd 2n}$, quae integrata dat $t = \frac{1}{\surd 2n}\, l\tang(45° + \frac{1}{2}\zeta)$, si sumto $t = 0$ fuerit $\zeta = 0$, unde patet demum elapso tempore infinito fieri $\zeta = 90°$.

4°. Si $C > n$, punctum A ab F tempore finito ad $90°$ digredietur, indeque porro in oppositum ipsi F punctum progredietur, et ad alteram partem circumeundo iterum in F revertet. Sit enim $C = mmn$, existente mm numero unitate majore, ob $dt = \frac{d\zeta}{\surd n(mm+\cos 2\zeta)}$, erit proxime $dt = \frac{d\zeta}{\surd n}\left(\frac{1}{m} - \frac{\cos 2\zeta}{2m^3}\right)$ et integrando $t\surd n = \frac{\zeta}{m} - \frac{\sin 2\zeta}{4m^3}$; unde patet angulum ζ successive per omnes valores migrare.

5°. Ha-

5°. Hactenus posuimus $s < \delta$, ita ut motus puncti F celerior sit, quam gyratorius circa axem IC: si contrarium eveniat, tantum signum formulae $\sqrt{(C + n \cos 2\zeta)}$ mutari debet.

CASUS. II. quo $bb < aa$.

827. Sit igitur $\frac{3gee\,(aa - bb)}{ccs^3} = n$, erit $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(C - n \cos 2\zeta)}}$ et $s = \delta - \sqrt{(C - n \cos 2\zeta)}$: in quibus formulis si ponatur $\zeta = 90° + \phi$, ut jam ϕ denotet distantiam poli B a centro virium F antecedentia versus sumtam, resultabunt formulae praecedentes, quae propterea eadem phaenomena exhibebunt.

COROLL. 1.

828. Si ergo ponamus centrum virium F initio cum polo A convenisse existente $bb > aa$; corpus semper eandem faciem puncto F obvertet, si celeritas angularis ipsi celeritati centri virium δ fuerit aequalis.

COROLL. 2.

829. Sin autem initio, quo F cum A conveniebat, celeritas corporis angularis s sit aliquanto major vel minor quam δ, ut differentia non superet $\sqrt{2n} = \sqrt{\frac{6gee\,(bb - aa)}{ccs^3}}$: polus A utrinque ab F digredietur non ultra certum intervallum, et circa punctum F quasi oscillationes peragere videbitur: in quo utique similitudo cum motu lunae libratorio cernitur.

COROLL. 3.

830. In hujusmodi ergo motu libratorio celeritas angularis corporis est maxima vel minima, dum punctum A ipsi F conjungitur, ab eo vel in consequentia vel in antecedentia digressurum: unde celeritas minima major est, quam $\delta - \sqrt{2n}$. Fieri igitur potest, ut talis motus oriatur, dum initio corpus plane nullum habuit motum gyratorium.

SCHOLION. 1.

831. Dubium ergo relinquitur nullum, quin motus libratorius lunae hac ratione oriatur: atque adeo probabile videtur, in luna eum casum locum habere, quo lunae initio nullus plane motus gyratorius fuerat impressus; tum autem axem lunae principalem IA, cujus respectu momen-

tum inertiae Maa est minimum, terram versus fuisse directum. Quoniam igitur novimus, digressiones poli A ab F esse minimas, tempus harum oscillationum definire poterimus: cum enim arcus $AF = \zeta$ sit valde parvus, erit $\cos 2\zeta = 1 - 2\zeta\zeta$, ideoque $dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(C + n - 2n\zeta\zeta)}}$, unde fit integrando $t\sqrt{2n} = A \sin \frac{\zeta\sqrt{2n}}{\sqrt{(C+n)}}$. Quare cum in digressione maxima fiat $\zeta = \sqrt{\frac{C+n}{2n}}$, erit tempus, quo punctum A ab F maxime digreditur, $= \frac{\pi}{2\sqrt{2n}}$ secundis, cujus duplam $\frac{\pi}{\sqrt{2n}}$ dabit tempus, quo polus A ab F digressus iterum eodem redit. Tum autem celeritas angularis minima, quando scilicet polus A ab F in antecedentia digreditur, erit $= \delta - \sqrt{(C+n)}$: quae ut evanescat, constans C esse debet $= \delta\delta - n$, unde digressio maxima hoc casu fuerit $= \frac{\delta}{\sqrt{2n}}$ necesse est. Consideremus nunc etiam tempus unius revolutionis centri virium F, quod est $= \frac{2\pi}{\delta}$ min. sec. cujus dimidium si aequale sit uni oscillationi poli A $= \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$, fiet $\delta = \sqrt{2n}$, seu $n = \frac{\delta\delta}{2}$; ideoque $C = \frac{\delta\delta}{2} = n$: neque ergo digressio amplius foret minima, uti assumseramus.

SCHOLION 2.

832. Hinc igitur concludimus, motum lunae libratorium non ita explicari posse, ut statuamus lunae initio nullum plane motum gyratorium fuisse impressum: sed potius cum vehementer verisimile sit, lunam, si ea circa terram in orbita circulari uniformiter circumferretur, quae est hypothesis nostri problematis, perpetuo eandem plane faciem nobis esse obversuram, neque ullam mutationem in ea obversatum iri: in eadem hypothesi statuere debemus, lunae initio talem motum gyratorium fuisse impressum, ut praecise fuerit celeritas angularis $= \delta$, nempe celeritati terrae circa lunam, et simul axem ejus IA terram versus fuisse directum. Hoc autem satis probabile videtur: cum enim respectu axis IA momentum inertiae sit minimum, ideoque lunae, si ejus corpus sphaeroides oblongum statua-

statuatur, axis maximus, caussa esse potuit, quae initio hunc axem ad terram direxerit, atque eidem caussae fortasse tribuendum est, quod dum luna primum motum accepit, hic ipse axis directionem suam versus terram conservaverit: quod idem est, ac si celeritas angularis prima ipsi celeritati terrae δ fuisset aequalis. Cum igitur luna, si circulum circa terram motu uniformi describeret, nobis constanter eandem faciem esset obversura, ejus librationes observatae motui lunae irregulari, quo modo celerius modo tardius incedit, tribui debent. Quare etiam praecedens problema in hac hypothesi resolvamus, ut punctum F neque uniformiter circumferri, neque perpetuo eandem distantiam a centro inertiae corporis tenere assumamus.

PROBLEMA 94.

833. Si corpus gyretur circa suum axem principalem IC, centrum virium autem F in plano ad eum normali neque uniformiter neque in eadem distantia circumferatur: initio vero axis IA fuerit ad centrum virium F directus similemque motum acceperit, definire motum corporis libratorium.

SOLUTIO.

Motus corporis irregularis puncti F ita exprimi poterit, ut tempore t, descripserit arcum $XF = \delta t + \alpha \sin At$; ad pro distantia variabili sit $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \mathfrak{C} \cos At)$. Quare si jam celeritas angularis sit $= \varepsilon$, posito arcu $XA = \lambda$, erit $d\lambda = \varepsilon dt$, et vocato arcu $AF = \zeta$ habebimus $d\varepsilon = \frac{3gee\,(bb - aa)\, dt \sin 2\zeta}{ccs^3}$. Cum igitur sit $\lambda = \delta t + \alpha \sin At - \zeta$, erit $\varepsilon = \delta + A\alpha \cos At - \frac{d\zeta}{dt}$, ideoque posito $\frac{3gee\,(bb - aa)}{ccf^3} = n$ erit

$$- AA\alpha dt \sin At - \frac{dd\zeta}{dt} = ndt\,(1 + \mathfrak{C} \cos At) \sin 2\zeta.$$

Quod si jam assumamus arcum ζ semper manere valde parvum, habebimus hanc aequationem

$$\frac{dd\zeta}{dt^2} + AA\alpha \sin At + 2n\zeta(1 + \mathfrak{C} \cos At) = 0,$$

cui proxime satisfieri potest ponendo $\zeta = m \sin At$, unde fit $- AAm \sin At + AA\alpha \sin At + 2mn \sin At = 0$ ob terminum $\mathfrak{C} \cos At$ prae 1 valde parvum.

parvum. Hinc ergo adipiscimur $m = \frac{AA\alpha}{AA - 2n}$, ideoque $\zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n}$ $\sin At$, unde fit $x = \delta + A\alpha \cos At - \frac{A^3\alpha \cos At}{AA - 2n} = \delta - \frac{2A\alpha n}{AA - 2n}$ $\cos At$. Hic cum sit $XF = \delta t + \alpha \sin At$, pars prior δt vocatur locus medius puncti F, et pars altera $\alpha \sin At$ ejus aequatio seu prostaphaeresis, unde patet digressionem FA huic prostaphaeresi esse proportionalem, eamque majorem ob n numerum positivum. Ita evanescente prostaphaeresi, seu quoties locus verus cum medio congruit, toties corpus eandem faciem centro virium F obvertit, neglectis quidem minoribus inaequalitatibus, quas ratio quantitatis $\mathfrak{C}$ inveheret. Verum haec fusius prosequi, atque accuratius determinare sine majori astronomiae cognitione haud convenit.

COROLL. 1.

834. Si ergo inaequalitas motus puncti F ita exprimitur, ut tempore t conficiat arcum $XF = \delta t + \alpha \sin At$, eodem tempore fit arcus librationis $FA = \zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n} \sin At$, existente $n = \frac{3gu(bb - aa)}{ccf^3}$: ubi f distantiam mediam centri virium F denotat.

COROLL. 2.

835. Si hunc arcum librationis ζ accuratius definire velimus, variabilitas distantiae $FI = s$ etiam in computum ingreditur, ita ut si fuerit $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \mathfrak{C} \cos At)$, reperiatur $\zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n} \sin At + \frac{n\alpha\mathfrak{C}}{4(AA - 2n)} \sin 2At$.

COROLL. 3.

836. Simili modo si generalius fuerit arcus tempore t confectus $XF = C + \delta t + \alpha \sin(At + \mathfrak{A}) + \alpha' \sin A't + \mathfrak{A}')$ &c. et $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}$ $(1 + \mathfrak{C} \cos(At + \mathfrak{A}) + \mathfrak{C} \cos(A't + \mathfrak{A}')$ &c.) invenitur proxime arcus librationis

$$FA = \zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n} \sin(At + \mathfrak{A}) + \frac{A'A'\alpha'}{A'A' - 2n} \sin(A't + \mathfrak{A}') + \&c.$$

SCHO-

SCHOLION 1.

837. Hic jam perinde est, sive numerus $n = \frac{3gee(bb - aa)}{ccf^3}$ sit positivus sive negativus: neque conditio superius requisita, ut pro arcu ζ evanescente esse debeat $bb > aa$, amplius locum habet. Casu enim II (827.) si ponatur $C = n$ fit $dt \sqrt{2n} = \frac{d\zeta}{\sin\zeta}$, et $t\sqrt{2n} = l\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\zeta -$ Const. unde si initio $t = 0$, fuerit $\zeta = 0$, constans addenda fit infinita, ideoque nonnisi elapso tempore infinito puncto A ab F digredietur. Quare dum punctum F uniformiter in circulo circumfertur, quicunque axis principalis initio ad punctum F fuerit directus, cum eoque pari celeritate gyrari coeperit, is ei constanter manebit annexus. Ac si deinceps punctum F motum suum vel intendat vel remittat, polus A ab eo digredietur secundum formulas inventas. Quin etiam patet, si fuerit $n = 0$, seu $bb = aa$, quo casu corpus uniformiter circa polum C gyraretur, digressiones ζ perpetuo differentiae inter locum medium et verum puncti F futuras esse aequales: At si numerus n sit positivus seu $bb > aa$, digressiones ista differentia essent majores, contra autem sin $bb < aa$ minores. Ceterum numerus A inaequalitatem motus definiens, ex tempore quo inaequalitas sin Λt ad eosdem valores revertitur, colligi potest, quod si eveniat post tempus $= \Theta$ min. sec. erit $\sin \Lambda\Theta = \sin 2\pi$ ideoque $\Lambda = \frac{2\pi}{\Theta}$.

SCHOLION 2.

838. Hinc patet motum libratorium lunae, quo non semper eandem faciem terrae obvertit, potissimum defectui uniformitatis motus, quo terra circa lunam, seu quod idem est, luna circa terram circumferri videtur, tribui debere, neque huc inaequalitatem momentorum principalium in luna multum conferre, quoniam ea tantum coefficientes terminorum afficiuntur. Libratio scilicet adesse posset, etiamsi luna esset corpus sphaericum, seu ejus momenta principalia aequalia. Verum tum nulla ratio patet, cur lunae initio praecise tantus motus gyratorius fuisset impressus, quantum formulae nostrae exhibent: sin autem luna sit corpus sphaeroidicum sive oblongum sive compressum, rationem quodammodo intelligere licet, ob quam initio quidam axis principalis reliquis notabilior terram respicere inceperit: Utrum autem sit sphaeroides oblongum an compressum? ex quantitate librationis dijudicare licet, quae si excedat differentiam inter locum lunae verum ac medium, indicet esse $bb > aa$, seu axem lunae

lunae terrae obversum momento minimo gaudere. Verum hic non est locus quicquam definiendi, cum etiam luna ad solem urgeatur, indeque libratio turbetur: praeterea vero quoque uti luna non in eodem plano circa terram movetur, ita etiam vicissim motus centri virium F non in eodem plano circa lunam absolvetur, ex quo haec investigatio vehementer intricata reddetur; ut in tractatu generali locum invenire nequeat. Ceterum hoc semper insigne foret mysterium, quod luna initio praecise tantum motum gyratorium, quantum hic librationis casus postulat, acceperit: si enim vel majorem vel minorem accepisset, labente tempore tandem facies opposita nobis obverti debuisset. Interim tamen hoc phaenomenon praescriptum celeritatis gradum non tam exacte postulet, quoniam etsi fuerit tantillo vel major vel minor, librationes tamen ob problema praecedens contingere deberent; unde illud mysterium haud leviter illustratur. Talis autem latitudo admitti nequit, nisi casu quo $bb > aa$, seu $n > 0$; aequatio enim differentialis $\frac{dd\zeta}{dt^2} + \mathfrak{A}\mathfrak{A}\alpha \sin \mathfrak{A}t + 2n\zeta(1 + \zeta \cos \mathfrak{A}t) = 0$ generalius accedente constante arbitraria ita integrari potest, ut sit $\zeta = C \sin t\sqrt{2n} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\alpha}{\mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n} \sin \mathfrak{A}t$; unde fit celeritas angularis $u = \delta - C\sqrt{2n}.\cos t\sqrt{2n} - \frac{2\mathfrak{A}\alpha n}{\mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n} \cos \mathfrak{A}t$: ubi etiam pro $t\sqrt{2n}$ scribi potest $(t + \gamma)\sqrt{2n}$, ita ut C et γ pro lubitu assumi queant. Quare cum initio $t = 0$ fuerit $\zeta = C \sin\gamma\sqrt{2n}$, dum celeritas angularis impressa sit $= \delta - C\sqrt{2n}.\cos\gamma\sqrt{2n} - \frac{2\mathfrak{A}\alpha n}{\mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n}$, atque C sit fractio satis parva, motus libratorius sequetur, ut constanter pars quaedam lunae nobis maneat abscondita. At vero etiam fractio $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\alpha}{\mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n}$ esse debet valde parva, ut pro $\sin 2\zeta$ recte scribere liceat 2ζ.

SCHOLION. 3.

839. Explicatio ergo motus libratorii lunae huc redit, ut statuamus, lunae corpus esse sphaeroides oblongum, cujus major axis, vel is cujus respectu momentum inertiae est minimum, initio terram versus directus, lunae autem tum circa axem ad planum orbitae terrestris normalem impressus fuerit motus gyratorius, cujus celeritas angularis propemodum motui lunae medio fuerat aequalis, in quo quidem insignis latitudo locum habere potest.

poteſt. Quin etiam ſufficit, dummodo axis gyrationis propemodum fuerit ad planum orbitae terreſtris normalis, et axis major propemodum tantum terram verſus directus: namque etiam his caſibus nutatio diſci lunae reciproca evenire debet, etiamſi eam haud facile determinare liceat. Quare hoc caſu relicto ad alias motus gyratorii perturbationes a viribus centripetis ortas progrediamur, unde nutatio axis terrae explicari poſſit.

PROBLEMA 95.

840. Si corpus gyretur circa axem, qui alicui axi principali fuerit proximus, ac ſimul actioni centri virium ſubjiciatur, determinare mutationem momentaneam, tam in ipſo axe gyrationis quam in celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Sint A, B, C, terni poli principales corporis, eorumque reſpectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, corpus autem nunc gyretur circa polum O ipſi A proximum celeritate angulari ε in ſenſum ABC; unde poſitis ternis arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, erit arcus α valde parvus, at β et γ minime a quadrante diſcrepabunt, ita ut ſit $\cos\alpha = 1$ et $\cos\beta = \cos\gamma = 0$. Quare poſito $x = \varepsilon \cos\alpha$, $y = \varepsilon \cos\beta$ et $z = \varepsilon \cos\gamma$, hae litterae y et z pro evaneſcentibus haberi poterunt, neque tamen earum differentialia, quae erunt $dy = -\varepsilon d\beta$ et $dz = -\varepsilon d\gamma$. Tranſeat jam recta ad centrum virium ducta per punctum F, ſintque arcus $AF = \zeta$, $BF = \eta$, $CF = \vartheta$; diſtantia autem centri virium ponatur $= s$, ejusque vis attrahens tanta, ut in diſtantia $= e$ aequetur gravitati. Ab actione ergo hujus vis quantitates x, y, z tempuſculo dt ita immutabuntur, ut ſit Fig. 107.

$$dx + \frac{cc - bb}{aa}\, yzdt = \frac{6gee\,(cc - bb)\, dt \cos\eta \cos\vartheta}{aas^3}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb}\, xzdt = \frac{6gee\,(aa - cc)\, dt \cos\zeta \cos\vartheta}{bbs^3}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc}\, xydt = \frac{6gee\,(bb - aa)\, dt \cos\zeta \cos\eta}{ccs^3}.$$

Cum nunc ſit $dx = d\varepsilon$, ob y et z evaneſcentes, erit

$$d\varepsilon = \frac{6gee\,(cc - bb)\, dt \cos\eta \cos\vartheta}{aas^3}$$

 $-\varepsilon d\beta$

$$-\,gd\beta = \frac{6gee\,(aa - cc)\,dt\cos\zeta\cos\vartheta}{bbs^3}$$

$$-\,gd\gamma = \frac{6gee\,(bb - aa)\,dt\cos\zeta\cos\eta}{ccs^3}.$$

Quam variationem quo diligentius exploremus, quaeramus arcum FO, at ob $\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$; $\cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$; $\sin BAF = \frac{\cos\vartheta}{\sin\zeta}$; $\cos BAF = \frac{\cos\eta}{\sin\zeta}$ fit $\sin FAO = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\epsilon\cos\vartheta}{\sin\alpha\sin\zeta}$ et $\cos FAO = \frac{\cos\epsilon\cos\eta + \cos\gamma\cos\vartheta}{\sin\alpha\sin\zeta}$ hincque $\cos FO = \cos\epsilon\cos\eta + \cos\gamma\cos\vartheta + \cos\alpha\cos\zeta$: cujus differentiale dat,

$$(Fo - FO)\sin FO = d\epsilon\cos\eta + d\gamma\cos\vartheta \text{ ob } \sin\epsilon = \sin\gamma = 1 \text{ et } \sin\alpha = 0.$$

Quare cum sit $FO = FA = \zeta$ habebitur

$$(Fo - FO)\sin\zeta = -\frac{6geedt\cos\zeta\cos\eta\cos\vartheta}{gs^3}\left(\frac{aa - cc}{bb} + \frac{bb - aa}{cc}\right)$$

$$\text{seu } Fo - FO = \frac{6gee\,(cc - bb)\,(bb + cc - aa)\,dt\cos\zeta\cos\eta\cos\vartheta}{gbbccs^3} \text{ ob}$$

$$\tang BAO = \frac{\cos\gamma}{\cos\epsilon}.$$

Pro situ autem puncti o inveniendo habemus

$$\text{differentiando: } \frac{-\,OAo}{\cos BAO^2} = \frac{-\,d\gamma\cos\epsilon\sin\gamma + d\epsilon\cos\gamma\sin\epsilon}{\cos\epsilon^2} \text{ ideoque}$$

$OAo = \frac{d\gamma\cos\epsilon\sin\gamma - d\epsilon\cos\gamma\sin\epsilon}{\sin\alpha^2}$ et $Oo = \sqrt{(d\epsilon^2 + d\gamma^2)}$. Tum vero cum sit $d\alpha = \frac{-\,d\epsilon\sin\epsilon\cos\epsilon - d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha}$ oritur $\tang OoA = \frac{d\epsilon\sin\epsilon\cos\gamma - d\gamma\sin\gamma\cos\epsilon}{d\epsilon\sin\epsilon\cos\epsilon + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}$ ob $\cos\alpha = 1$, seu $\tang OoA = \frac{d\epsilon\cos\gamma - d\gamma\cos\epsilon}{d\epsilon\cos\epsilon + d\gamma\cos\gamma}$.

COROLL. 1.

841. Si momenta inertiae respectu axium IB et IC sint aequalia seu $bb = cc$, primo fit $d\alpha = 0$, seu celeritas angularis nullam patitur mutationem: tum vero erit

$d\epsilon$

$$d\zeta = \frac{-6gee(aa-cc)\,dt\,\operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\vartheta}{gccs^3} \text{ et } d\gamma = \frac{6gee(aa-cc)\,dt\,\operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\eta}{gccs^3}$$

ita ut fit $d\zeta \operatorname{cof}\eta + d\gamma \operatorname{cof}\vartheta = 0$.

COROLL. 2.

842. Hoc porro cafu $bb = cc$, fit $Fo - FO = 0$, feu polus gyrationis O ita transfertur in o, ut fpatiolum Oo fit normale ad arcum FO: eft hoc fpatiolum $Oo = \frac{6gee(aa-cc)\,dt\,\operatorname{cof}\zeta\operatorname{fin}\zeta}{gccs^3}$, fed jam quaeritur utrum ab O verfus FA, an contra fit directum.

COROLL. 3.

843. Cum autem fit finFO : finFAO = fin AO : finAFO erit finAFO $= \frac{\operatorname{cof}\gamma\operatorname{cof}\eta - \operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\vartheta}{\operatorname{fin}\zeta\operatorname{fin}FO}$. Iam quia FO non variatur, fiet fecundum figuram, ubi O ad AF accedere fumitur:

$$-OFo.\operatorname{cof}AFO = \frac{-d\gamma\operatorname{cof}\eta + d\zeta\operatorname{cof}\vartheta}{\operatorname{fin}\zeta\operatorname{fin}FO} = \frac{-6gee(aa-cc)\,dt\operatorname{fin}\zeta\operatorname{cof}\zeta}{gccs^3\operatorname{fin}FO}$$

ideoque $OFo = \frac{6gee(aa-cc)\,dt\operatorname{fin}\zeta\operatorname{cof}\zeta}{gccs^3\operatorname{fin}FO\operatorname{cof}AFO}$. Cum igitur fit angulus AFO infinite parvus, et $\operatorname{cof}AFO = 1$, et $FO = FA = \zeta$, erit $OFo = \frac{6gee(aa-cc)\,dt\operatorname{cof}\zeta}{gccs^3}$. Ergo fi $aa > cc$, punctum O ad arcum AF accedit, vel circa A in fenfum CB procedit.

SCHOLION.

843. Cafus hic quo $bb = cc$, ita ut corpus duo habeat momenta principalia refpectu axium IB et IC aequalia, et propemodum circa axem fingularem IA gyretur celeritate angulari g in fenfum BC, praecipue locum habet in motu vertiginis terrae, ideoque meretur plenius evolvi. Quod quo facilius fieri poffit, cum fit $AO = \alpha$, ponatur angulus $BAO = \varrho$ erit $90 - \zeta = \alpha\operatorname{cof}\varrho$ et $90 - \gamma = \alpha\operatorname{fin}\varrho$, unde $\zeta = 90^\circ - \alpha\operatorname{cof}\varrho$ et $\gamma = 90^\circ - \alpha\operatorname{fin}\varrho$. Quodfi ergo brevitatis gratia ponamus $\frac{3gee(aa-cc)}{gccs^3} = N$, ut fit $d\zeta = -2N dt\operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\vartheta$ et $d\gamma = 2N dt\operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\eta$, erit $-d\alpha\operatorname{cof}\varrho + \alpha d\varrho\operatorname{fin}\varrho = -2N dt\operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\vartheta$ et $-d\alpha\operatorname{fin}\varrho - \alpha d\varrho\operatorname{cof}\varrho = 2N dt\operatorname{cof}\zeta\operatorname{cof}\eta$; unde colligitur

$$d\alpha = 2Ndt \cos\zeta (\cos\varrho \cos\vartheta - \sin\varrho \cos\eta)$$
$$\text{et } \alpha d\varrho = -2Ndt \cos\zeta (\sin\varrho \cos\vartheta + \cos\varrho \cos\eta).$$

Si jam centro virium F motum quemcunque tribuamus, etiam tamdiu his formulis uti poterimus, quamdiu arcus $AO = \alpha$ manet tam parvus, ut contractiones adhibitae locum habere possint.

PROBLEMA. 96.

844. Si corpus habeat duo momenta principalia aequalia, ac circa tertium axem singularem propemodum gyretur, centrum autem virium uniformiter in circulo circa centrum inertiae corporis circumferatur, ad quodvis tempus situm et motum corporis determinare.

SOLUTIO.

Fig. 108. Progrediatur centrum virium per circulum maximum XFY celeritate angulari $= \delta$, ac tempore elapso $= t$ ex X pervenerit in F, ut sit $XF = \delta t$. In sphaera igitur consideretur circulus fixus XZY, in quo sit Z polus circuli XFY, ut sit angulus $XZF = \delta t$. Nunc autem versetur axis corporis singularis in A, ponaturque angulus $XZA = \lambda$, et arcus $ZA = p$: tum vero corporis quasi primus meridianus fit AB, distans ab arcu ZA angulo $ZAB = q$. Porro gyretur nunc corpus circa axem IO, ut sit arcus minimus $AO = \alpha$, et angulus $BAO = \varrho$, celeritate angulari $= \varepsilon$, quoniam jam novimus eam fore constantem, et punctum A abibit tempusculo dt in a, ut sit $Aa = \varepsilon dt \sin\alpha = \alpha\varepsilon dt$ et angulus aAO rectus: quare ob $ZAO = q + \varrho$ erit $ZAa = q + \varrho - 90°$, ideoque demisso $a\alpha$ perpendiculo ad ZA, fiet $a\alpha = -\alpha\varepsilon dt \cos(q+\varrho)$ et $A\alpha = \alpha\varepsilon dt \sin(q+\varrho)$, unde colligimus $dp = -\alpha\varepsilon dt \sin(q+\varrho)$ et $d\lambda = \dfrac{\alpha\varepsilon dt \cos(q+\varrho)}{\sin p}$: deinde vero quia corpus quasi circa polum A gyratur, erit $dq = \varepsilon dt$. Denique in triangulo AZF ob $ZA = p$; $ZF = 90°$ et $AZF = \lambda - \delta t$, reperitur $\cos FA = \cos\zeta = \sin p \cos(\lambda - \delta t)$; et $\cot ZAF = -\cos p \cot(\lambda - \delta t)$. Ponamus brevitatis gratia angulum $ZAF = \varphi$, ut sit $\tang\varphi = \dfrac{-\tang(\lambda - \delta t)}{\cos p}$, erit $BAF = \varphi - q$; hincque $\cos BF = \cos(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\eta$ et $\cos CF = \sin(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\vartheta$. Est vero $\sin\varphi \sin\zeta = \sin(\lambda - \delta t)$ et $\cos\varphi \sin\zeta = -\cos p \cos(\lambda - \delta t)$,

$$\text{ideoque } \cos\eta = -\cos p \cos q \cos(\lambda - \delta t) + \sin q \sin(\lambda - \delta t)$$
$$\text{et } \cos\vartheta = \cos q \sin(\lambda - \delta t) + \cos p \sin q \cos(\lambda - \delta t).$$

Unde

Unde si ponatur $\frac{3gee(aa-cc)}{ecc s^3} = N$, colligitur fore

$$d\alpha = 2Ndt \sin p \cos(\lambda - \delta t)(\cos p \sin(q+\varrho)\cos(\lambda-\delta t) + \cos(q+\varrho)\sin(\lambda-\delta t))$$

$$\text{et } \alpha d\varrho = -2Ndt \sin p \cos(\lambda-\delta t)(\sin(q+\varrho)\sin(\lambda-\delta t) - \cos p \cos(q+\varrho)\cos(\lambda-\delta t));$$

quibus si adjungamus $dq = \varepsilon dt$ et $dp = -\alpha\varepsilon dt \sin(q+\varrho)$, ex his quatuor aequationibus quatuor quantitates p, q, α et ϱ definiri oportet. Binae autem priores transformantur in has simpliciores:

$$d\alpha \cos(q+\varrho) - \alpha d\varrho \sin(q+\varrho) = 2Ndt \sin p \sin(\lambda-\delta t)\cos(\lambda-\delta t)$$

$$d\alpha \sin(q+\varrho) + \alpha d\varrho \cos(q+\varrho) = 2Ndt \sin p \cos p (\lambda - \delta t)^2.$$

Cum sit $q = \varepsilon t + C$, ponamus $q + \varrho = \omega$, ut sit $\varrho = \omega - q$, et adjungendo aequationes priores quaternas adhuc habebimus aequationes:

$$dp = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega,\quad d\lambda = \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha\cos\omega - \alpha d\omega \sin\omega + \varepsilon\alpha dt \sin\omega = 2Ndt \sin p \sin(\lambda-\delta t)\cos(\lambda-\delta t)$$

$$d\alpha \sin\omega + \alpha d\omega \cos\omega - \varepsilon\alpha dt \cos\omega = 2Ndt \sin p \cos p \cos(\lambda-\delta t)^2$$

ac si insuper ponamus $\lambda - \delta t = \varphi$, quae littera cum praecedente φ non est confundenda, erunt:

$$dp = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega;\quad d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha \cos\omega - \alpha d\omega \sin\omega + \varepsilon\alpha dt \sin\omega = 2Ndt \sin p \sin\varphi \cos\varphi$$

$$d\alpha \sin\omega + \alpha d\omega \cos\omega - \varepsilon\alpha dt \cos\omega = 2Ndt \sin p \cos p \cos\varphi^2.$$

Ponamus porro $\alpha\cos\omega = x$ et $\alpha \sin\omega = y$, ut habeamus has aequationes

$$1^\circ.\ dp = -\varepsilon y dt,\quad 2^\circ.\ d\lambda = \frac{\varepsilon x dt}{\sin p},\quad 3^\circ.\ d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon x dt}{\sin p}.$$

$$4^\circ.\ dx + \varepsilon y dt = Ndt \sin p \sin 2\varphi$$

$$5^\circ.\ dy - \varepsilon x dt = Ndt \sin p \cos p + Ndt \sin p \cos p \cos 2\varphi,$$

ubi cum x et y sint quantitates minimae, ad veritatem satis appropinquabimus, si in binis postremis aequationibus arcum p et angulum λ ut constantes spectemus. Tribuamus ergo illis valores quasi medios, sitque proxime $p = n$, et $\lambda = m$, ideoque $d\varphi = -\delta dt$, ut habeamus aequationes:

$$4^\circ.\ dx - \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta} = -\frac{Nd\varphi}{\delta}\sin n \sin 2\varphi$$

$$5^\circ.\ dy + \frac{\varepsilon x d\varphi}{\delta} = -\frac{Nd\varphi \sin n \cos n}{\delta} - \frac{Nd\varphi \sin n \cos n \cos 2\varphi}{\delta}$$

 quibus

quibus evidens est satisfieri posse ponendo

$$x = E + F \cos 2\varphi \text{ et } y = G \sin 2\varphi,$$

ac hi coefficientes ita definiuntur, ut sit

$$E = \frac{-N \sin n \cos n}{\varepsilon};\ F = \frac{-N \sin n\ (2\delta + \varepsilon \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta};\ G = \frac{N \sin n\ (2\delta \cos n + \varepsilon)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}.$$

Tum vero quia haec solutio tantum esset particularis, ponatur $x = E + F \cos 2\varphi + u$ et $y = G \sin 2\varphi + v$, orienturque hae aequationes $du - \frac{\varepsilon v d\varphi}{\delta} = 0$ et $dv + \frac{\varepsilon u d\varphi}{\delta} = 0$, ex quibus elicitur $u = h \sin \frac{\varepsilon}{\delta} (\varphi + \zeta)$, et $v = h \cos \frac{\varepsilon}{\delta} (\varphi + \zeta)$, ubi h et ζ sunt constantes arbitrariae. Quocirca habebimus

$$x = \alpha \cos \omega = \frac{-N \sin n \cos n}{\varepsilon} - \frac{N \sin n\ (\varepsilon \cos n + 2\delta)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \cos 2\varphi + h \sin \frac{\varepsilon}{\delta} (\varphi + \zeta)$$

$$y = \alpha \sin \omega = \frac{N \sin n\ (\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \sin 2\varphi + h \cos \frac{\varepsilon}{\delta} (\varphi + \zeta)$$

ubi φ exprimit angulum $FZA = \lambda - \delta t$. Deinde ob $dp = -\varepsilon y dt = \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta}$, nanciscimur integrando:

$$p = n - \frac{\varepsilon N \sin n\ (\varepsilon + 2\delta \cos n)}{2\delta\ (\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \cos 2\varphi + h \sin \frac{\varepsilon}{\delta} (\varphi + \zeta) = ZA.$$

Denique aequatio $d\lambda = \frac{\varepsilon x dt}{\sin p} = \frac{-\varepsilon x d\varphi}{\delta \sin n}$ praebebit:

$$\lambda = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N\ (\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta\ (\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \sin 2\varphi + \frac{h}{\sin n} \cos \frac{\varepsilon}{\delta} (\varphi + \zeta) = XZA.$$

COROLL. 1.

845. Cum sit ex nostris positionibus $\alpha = \sqrt{(xx + yy)}$, patet successu temporis distantiam $AO = \alpha$ non ultra certum limitem augeri posse, qui

qui si fuerit satis exiguus, hypothesi nostra tuto utimur. Simul vero patet hanc distantiam α nunquam plane evanescere, nisi forte fiat tam $x = o$ quam $y = o$.

COROLL. 2.

846. Neglectis inaequalitatibus ab angulis $2\phi = 2$ FZA et $\frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta)$ pendentibus, polus Z uniformiter circa punctum Z in antecedentia regreditur celeritate angulari $= N \cos n$, si quidem $N = \frac{3gee\,(aa - cc)}{\varepsilon ccs^3}$ fuerit numerus positivus, sicque integram revolutionem absolvet tempore $= \frac{2\pi}{N \cos n}$ min. sec. dum centrum virium F revolutionem absolvit tempore $= \frac{2\pi}{\delta}$, et ipsum corpus tempore $= \frac{2\pi}{\varepsilon}$.

COROLL. 3.

847. Praeterea vero tam distantia ZA, quam angulus XZA exiguas inaequalitates patientur, partim ab angulo $2\phi = 2$FZA partim ab angulo $\frac{\varepsilon}{\delta}(\phi + \zeta) = C - \varepsilon t$, hoc est, partim a motu centri virium, partim a motu vertiginis ipsius corporis pendentes. Quare si ponamus angulum ZAB $= \psi$ erit

$$ZA = n - \frac{\varepsilon N \sin n\,(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{2\delta\,(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \cos 2\phi - h \sin(\psi + \zeta)$$

$$XZA = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta\,(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)} \sin 2\phi + \frac{h}{\sin n} \cos(\psi + \zeta).$$

SCHOLION 1.

848. Sumsimus hic corpus in eundem sensum gyrari, in quem centrum virium F circa id circumfertur, quemadmodum fit in terra, quae ab occidente in orientem gyratur, in quem sensum etiam sol et luna motu proprio promoveri cernuntur. Deinde etiam spectavimus numerum $N = \frac{3gee\,(aa - cc)}{\varepsilon ccs^3}$ ut positivum, seu corpus ita comparatum, ut ejus momentum inertiae respectu axis, circa quem proxime gyratur, sit maximum

mum $= Maa$, dum respectu axium in aequatore sumtorum est minimum $= Mcc$, qua proprietate terram esse praeditam observationes circa figuram terrae sphaeroidicam compressam institutae declarant. In hac ergo constitutione axis terrae circa polum eclipticae Z in antecedentia regredi debet, quemadmodum etiam per observationes constat. Praeterea vero neque iste axis motus est aequabilis, neque ejus distantia a polo elepticae Z constans, sed duplici inaequalitati est obnoxia, quarum altera ab angulo $FZA = \phi$ duplicato pendet, altera vero ab ipso motu vertiginis corporis, quae posterior major minorve esse potest, prout initio polus gyrationis O tam ratione poli A quam ratione situs centri virium F fuerit constitutus. Scilicet cum ω denotet angulum ZAO, si initio vel dato saltem tempore innotuerint quantitates $AO = \alpha$, $ZAO = \omega$, $FZA = \phi$, et $ZAB = \psi$, sumto AB pro corporis primo meridiano, ex aequationibus

$$\alpha \cos\omega + \frac{N \sin n \cos n}{\varepsilon} + \frac{N \sin n(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \cos 2\phi + h \sin(\psi + \zeta) = 0$$

$$\alpha \sin\omega - \frac{N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \sin 2\phi - h \cos(\psi + \zeta) = 0$$

binae constantes h et ζ definiuntur. Nisi ergo prodeat $h = 0$, polus A inaequalitates etiam diurnas patietur, ita ut intervallo cujusque revolutionis ad polum eclipticae alternatim accedat ab eoque recedat, simulque alternatim in antecedentia et consequentia nutet. Ob hanc scilicet inaequalitatem polus A singulis revolutionibus circulum describeret: cujus centrum cum quiescat, id potius pro vero polo terrae habebitur, ita ut hae inaequalitates non percipiantur. Tum vero reliquae inaequalitates ab actione centri virium pendentes non hunc polum apparentem, sed ipsum polum axis principalis afficient.

SCHOLION. 2.

849. Praetermissis autem his inaequalitatibus diurnis, quibus forte nutatio axis afficitur, si fuerit $aa > cc$ corpusque in eundem sensum gyratur ac centrum virium, phaenomena ita se habebunt;

Primo distantia poli A a puncto Z, quod est vertex seu polus orbitae, quam centrum virium describit, erit variabilis ac minima quidem deprehendetur, si angulus FZA vel evanescit, vel fit $180°$; maxima autem, si iste angulus fuerit vel $90°$ vel $270°$, differentia inter maximam minimamque distantiam existente $= \frac{\varepsilon N \sin n(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}$.

Secundo polus A circa punctum Z in antecedentia motu non uniformi regredietur, qui si ut moris est per motum medium prosthaphaeresi corrigendum repraesentetur, motu medio regredietur celeritate angulari $= N \cos n$, tum vero correctio seu prosthaphaeresis maxima erit $= \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}$, addenda si angulus FZA sit vel 45° vel 225°, subtrahenda vero si iste angulus fiat vel 135° vel 315°, ubi notandum est, hunc angulum $FZA = \varphi$ reperiri, si longitudo centri virium F a longitudine poli A subtrahatur. Ceterum hic celeritatem motus vertiginis ε prae celeritate centri virium δ ut multo majorem spectamus: si enim esset $\varepsilon = 2\delta$, conationes inventae adeo in infinitum abirent; verum hoc casu integratio nostrarum aequationum singulari modo esset instituenda, ponendo $x = E + F \cos 2\varphi + A\varphi \sin 2\varphi$ et $y = G \sin 2\varphi + B\varphi \cos 2\varphi$, reperireturque $E = \frac{-N \sin n \cos n}{2\delta}$, $A = B = \frac{-N \sin n (1 + \cos n)}{2\delta}$ et $F + G = \frac{N \sin n (1 - \cos n)}{4\delta}$. Verum quia hic x et y continuo crescerent, mox hypothesin factam transgrederentur, totusque calculus non amplius locum haberet. Quare nisi $\varepsilon\varepsilon$ notabiliter discrepet a $4\delta\delta$, formulae nostrae adhiberi nequeunt.

CAPUT XVII.

PLENIOR EXPLICATIO MOTUS TURBINUM SUPER PLANO HORIZONTALI SEMOTA FRICTIONE.

DEFINITIO. 14.

850. **A***xis turbinis* est recta AF ex cuspide F per centrum inertiae I ducta, qui simul sit ejus axis principalis singularis, ita ut respectu omnium axium ad eum normalium IB momenta inertiae sint inter se aequalia. Fig. 109.

COROLL. 1.

851. Aptissima ergo turbinis figura est tornata, quae generatur, si figura quaecunque circa axem AF revolvitur; dummodo ea in cuspidem F desinat, qua super plano horizontali incedere posset.

COROLL. 2.

852. In turbine autem sequentes quantitates cognitas esse oportet, quae in calculum ingrediuntur: 1°. ejus massam vel pondus, quod sit $= M$. 2°. Distantiam cuspidis a centro inertiae, quae sit $IF = f$; 3°. Momentum inertiae respectu axis AF, quod sit $= Maa$ et 4°. Momentum inertiae respectu omnium axium ad illum normalium, quod sit $= Mcc$.

COROLL. 3.

853. Cum ergo supra in genere momenta inertiae principalia cujusque corporis posuerimus Maa, Mbb, et Mcc, hic bina posteriora aequalia statuemus, ut sit $bb = cc$.

COROLL. 4.

854. Dum igitur turbo cuspide F super plano horizontali incedit, ejus axis AF non ultra certum terminum ad horizontem inclinari potest, qui habebitur ducendo ab F ad corpus turbinis rectam extremam Fk tum enim angulus AFk dabit illum terminum.

SCHOLION.

855. Supra tantum ejusmodi turbines consideravimus, in quibus omnia momenta inertiae inter se essent aequalia; quae conditio nimium erat limitata. Nunc igitur motum turbinum in genere exploremus, siquidem conditio, quod AF sit axis principalis, et respectu binorum reliquorum axium momenta inertiae aequalia, cum indole turbinum necessario conjuncta videtur. Principia autem, unde hujus motus determinatio est petenda, supra in Cap. 14. jam sunt exposita, ubi vidimus totum negotium a pressione, qua turbo, dum movetur; cuspide sua F plano horizontali innititur, pendere. Quae pressio, etiamsi nonnisi solutione ad finem perducta cognosci queat, tamen statim ab initio in calculum ingreditur. Sit ergo Π ista pressio, cujus directio a cuspide F semper verticaliter sursum tendit; atque de hac pressione supra §. 767. ostendimus, si inclinatio axis AF ad horizontem ponatur $= \vartheta$, quae tempusculo dt suo differentiali $d\vartheta$ crescat, sumto elemento dt constante, fore $\frac{dd\vartheta \cos\vartheta - d\vartheta^2 \sin\vartheta}{dt^2}$

$$= \frac{2g}{f}\left(\frac{\Pi}{M} - 1\right);\ \text{sive}\ \frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f(dd\vartheta \cos\vartheta - d\vartheta^2 \sin\vartheta)}{2g\,dt^2}$$

$$= 1 + \frac{fd\,.\,d\vartheta \cos\vartheta}{2g\,dt^2} = 1 + \frac{fdd\,.\,\sin\vartheta}{2g\,dt^2}.$$ Cum igitur turbo praeter hanc

vim

vim Π a gravitate tantum urgeri statuatur, ejus centrum inertiae I alium motum recipere nequit, nisi in directione verticali vel ascendendo vel descendendo, dum ejus distantia a plano horizontali est $= f \sin \vartheta$. Sin autem initio ei insuper quidam motus horizontalis fuerit impressus, eum constanter aequabilem conservabit, sicque tota quaestio ad solum motum gyratorium reducitur. Quare cum gravitas ad eum nihil conferat, ejusque perturbationes omnes a sola pressione Π oriantur, hujus vis momenta respectu axium principalium turbinis definiri oportet.

PROBLEMA. 97.

856. Si turbo teneat situm quomodocunque inclinatum ad horizontem, simulque detur pressio Π, qua ejus cuspis horizontali plano innititur, definire hujus vis momenta respectu axium principalium turbinis.

SOLUTIO.

Descripta sphaera circa centrum inertiae turbinis I, in qua sit Z punctum verticale, axis turbinis autem sphaeram trajiciat in punctis A et F, bini reliqui vero axes principales pertingant ad sphaerae puncta B et C: etsi enim hi duo axes per se non determinantur, tamen certas duas lineas tam inter se quam ad axem AF normales accipi convenit, ex quibus deinceps situs turbinis ad quodvis tempus definiatur. Ponatur arcus circulorum maximorum $ZA = l$, $ZB = m$, et $ZC = n$, erit $l = 90° - \vartheta$ denotante ϑ inclinationem axis AF ad horizontem. Cum jam cuspis F, cujus distantia a centro inertiae I est $FI = f$, urgeatur in directione verticali $F\Pi$ vi $= \Pi$, ut sit angulus $AF\Pi = l$, resolvatur ea secundum directiones FA et FV, quarum haec FV sit in plano verticali AZF ad AF normalis, erit vis sec. $FA = \Pi \cos l$, et vis sec. $FV = \Pi \sin l$, quarum illa per centrum inertiae transiens nulla praebet momenta. Haec vero vis $FV = \Pi \sin l$ respectu axis AF quoque nullum praebet momentum; at respectu axis IB dat momentum $= \Pi f \sin l \sin VFB$ in sensum AC, similique modo respectu axis IC momentum $= \Pi f \sin l \sin VFC$ in sensum BA. Verum est ang. Fig. 110.

$$VFB = ZAB, \text{ et } \sin ZAB = -\cos ZAC = -\frac{\cos n}{\sin l}, \text{ tum vero ang. } VFC$$

$$= ZAC \text{ et } \sin ZAC = \cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l}.$$ Quamobrem habebimus

mom. resp. axis IB $= -\Pi f \cos n$ in sensum AC
mom. resp. axis IC $= \Pi f \cos m$ in sensu BA

et quia momenta virium respectu axium IA, IB, IC in sensum BC, CA,

CA, AB supra in genere posuimus P, Q, R, erit pro nostro casu:

$$P = 0; \quad Q = +\Pi f \cos n \text{ et } R = -\Pi f \cos m.$$

PROBLEMA. 98.

857. Si turbo in situ quocunque inclinato gyretur circa axem quemcunque, per ejus centrum inertiae transeuntem, definire variationem momentaneam tam in axe gyrationis quam in celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Fig. 111. Circa centrum inertiae I constituta sphaera immobili, in qua sit Z punctum verticale, et ZX circulus verticalis fixus; teneat jam turbo ejusmodi situm, ut axis turbinis proprius respondeat sphaerae puncto A, bini reliqui autem axes principales punctis B et C, ponanturque horum axium declinationes a verticali seu arcus ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$: tum vero anguli XZA $= \lambda$, XZB $= \mu$, et XZC $= \nu$, quorum relationes ad illos arcus sunt cognitae. Nunc autem turbo gyretur circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, sintque pro polo gyrationis O arcus AO $= \alpha$, BO $= \beta$, et CO $= \gamma$, atque ponendo $\varepsilon \cos\alpha = x$, $\varepsilon \cos\beta = y$, $\varepsilon \cos\gamma = z$ ob momenta virium P $= 0$, Q $= \pi f \cos n$, et R $= -\pi f \cos m$, atque $bb = cc$, variationes tempusculo dt productae sequentibus formulis exprimentur:

$$\text{I. } dx = 0$$

$$\text{II. } dy + \frac{aa - cc}{cc} xzdt = \frac{2\Pi fg\,dt \cos n}{Mcc}$$

$$\text{III. } dz - \left(\frac{aa - cc}{cc}\right) xydt = -\frac{2\Pi fg\,dt \cos m}{Mcc}.$$

Praeterea vero has aequationes pro $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, adjungi oportet:

$$dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m); \quad d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n)$$

$$dm \sin m = dt\,(z \cos l - x \cos n); \quad d\mu \sin m^2 = -dt\,(z \cos n + x \cos l)$$

$$dn \sin n = dt\,(x \cos m - y \cos l); \quad d\nu \sin n^2 = -dt\,(x \cos l + y \cos m).$$

Cum autem inclinatio axis ad horizontem sit $= 90° - l$ quae supra posita est ϑ, ob $\sin\vartheta = \cos l$ erit $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd\,.\cos l}{2gdt^2}$. Ad haec magis contrahenda statuamus:

$$\cos l = p; \quad \cos m = q; \quad \cos n = r$$

et habebimus $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fddp}{2gdt^2}$, ac praeterea has aequationes:

I. dx

I. $dx = 0$

II. $dy + \frac{(aa - cc)\,xzdt}{cc} = \frac{2\Pi fgrdt}{Mcc}$

III. $dz - \frac{(aa - cc)\,xydt}{cc} = \frac{-2\Pi fgqdt}{Mcc}$

IV. $dp = dt\,(qz - ry)$; VII. $d\lambda = \frac{-dt\,(qy + rz)}{1 - pp}$

V. $dq = dt\,(rx - pz)$; VIII. $d\mu = \frac{-dt\,(rz + px)}{1 - qq}$

VI. $dr = dt\,(py - qx)$; IX. $d\nu = \frac{-dt\,(px + qy)}{1 - rr}$

ubi notandum est, esse $pp + qq\ rr = 1$.

COROLL. 1.

858. Si turbo circa ipsum axem IA gyretur, ut sit $\alpha = 0$ et $\zeta = \gamma = 90°$, erit $x = \varepsilon$, $y = 0$ et $z = 0$, et $dx = d\varepsilon$, $dy = -\varepsilon d\zeta$, $dz = -\varepsilon d\gamma$. Fiet ergo

$$d\varepsilon = 0;\ d\zeta = \frac{-2\Pi fgrdt}{\varepsilon Mcc},\ d\gamma = \frac{2\Pi fgqdt}{\varepsilon Mcc};$$

$$dp = 0;\ dq = \varepsilon rdt;\ dr = -\varepsilon qdt,\ \text{et}\ d\lambda = 0,$$

tum ergo primo instanti neque celeritas angularis ε, neque situs puncti A, mutationem patitur.

COROLL. 2.

859. Cum sit $dp = dt\,(qz - ry)$ erit differentiando $ddp = dt\,(qdz - rdy) + dt\,(zdq - ydr)$, et substitutis valoribus datis reperietur:

$$\frac{ddq}{dt^2} = \frac{(aa - cc)\,x}{cc}\,(qy + rz) - \frac{2\Pi fg}{Mcc}\,(qq + rr) + x\,(qy + rz) - p\,(yy + zz)$$

unde fit

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f(aa - cc)\,x}{2gcc}\,(qy + rz) - \frac{\Pi ff}{Mcc}\,(qq + rr) + \frac{fx\,(qy + rz)}{2g} - \frac{fp\,(yy + zz)}{2g}$$

 seu

seu $\frac{\Pi}{M}\left(1+\frac{ff(qq+rr)}{cc}\right)=1+\frac{faax(qy+rz)}{2gcc}-\frac{fp(yy+zz)}{2g}$,

hincque $\frac{\Pi}{M}=\frac{2gcc+faa(qy+rz)-fccp(yy+zz)}{2gcc+2gff(qq+rr)}$.

C O R O L L. 3.

860. Ex aequationibus IV. V. VI. colligitur, ut jam ante notavimus, $xdp+ydq+zdr=0$, quae aequatio, cum sit $pp+qq+rr=1$, loco aequationum V. et VI. usurpari potest. At aequationum VII. VIII. IX unicam tractasse sufficiet, quod negotium postremo loco erit suscipiendum.

C O R O L L. 4.

861. Inventis autem quantitatibus x, y et z, ob $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$ erit celeritas angularis $\varepsilon=\sqrt{(xx+yy+zz)}$ hincque vicissim arcus α, β, γ concluduntur; nempe

$$\cos\alpha=\frac{x}{\varepsilon};\ \cos\beta=\frac{y}{\varepsilon}\text{ et }\cos\gamma=\frac{z}{\varepsilon}.$$

P R O B L E M A 99.

862. Aequationes differentiales ante inventas, quibus motus turbinis exprimitur, ad integrationem perducere, quantum fieri licet.

S O L U T I O.

Primo statim patet esse $x=$ const: ponamus ergo $x=A$, et reliquae aequationes integrandae erunt

$$1^\circ.\ dy+\frac{A(aa-cc)zdt}{cc}=\frac{2\Pi fgrdt}{Mcc}$$

$$2^\circ.\ dz-\frac{A(aa-cc)ydt}{cc}=\frac{-2\Pi fgqdt}{Mcc}$$

$$3^\circ.\ dp=dt(qz-ry)$$

$$4^\circ.\ ydq+zdr=-Adp$$

existente $\frac{\Pi}{M}=1+\frac{fddp}{2gdt^2}$ et $pp+qq+rr=1$.

Nunc $1^\circ.q+2^\circ.r$ suppeditat hanc aequationem

$$qdy+rdz+\frac{A(aa-cc)}{cc}dt(qz-ry)=0$$

quae ob $dt(qz-ry)=dp$ abit in hanc:

qdy

$$qdy + rdz = \frac{-A(aa - cc)}{cc}\, dp$$ huc addatur 4°

$$ydq + zdr = -Adp$$

erit $qdy + ydq + rdz + zdr = \frac{-aa}{cc} Adp$ cujus integrale est

$$qy + rz = B - \frac{aa}{cc} Ap.$$

Porro colligendo 1°. y + 2°. z prodit:

$$ydy + zdz = \frac{2\Pi fgdt}{Mcc}(ry - qz) = \frac{-2\Pi fgdp}{Mcc}$$

quare cum sit $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fddp}{2gdt^2}$ erit

$$ydy + zdz = \frac{-2fgdp}{cc} - \frac{ffdpddp}{ccdt^2}$$

unde integrando nanciscimur:

$$yy + zz = C - \frac{4fgp}{cc} - \frac{ffdp^2}{ccdt^2}.$$

Cum jam sit $\frac{dp}{dt} = qz - ry$, obtinemus novam aequationem finitam:

$$yy + zz = C - \frac{4fgp}{cc} - \frac{ff}{cc}(qz - ry)^2$$

ex qua cum sit

$$(qz - ry)^2 = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} - \frac{cc(yy + zz)}{ff}$$

ex ante inventa autem

$$(qy + rz)^2 = \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2$$

prodibit his addendis

$$(qq + rr)(yy + zz) = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} - \frac{cc(yy + zz)}{ff} + \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2$$

unde ob $qq + rr = 1 - pp$ elicitur

(1 − pp

$$\left(1-pp+\frac{cc}{ff}\right)(yy+zz)=\frac{Ccc}{ff}-\frac{4gp}{f}+\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2, \text{ seu}$$

$$yy+zz=\frac{Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff-ffpp}$$

$$(qz-ry)^2=\frac{(Ccc-4fgp)(1-pp)-cc\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff-ffpp}.$$

Cum ergo jam has quantitates $qy+rz$, $yy+zz$ et $qz-ry$ per solam p definiverimus, statim pressionem Π per eandem solam p ita reperimus expressam

$$\frac{\Pi}{M}=\frac{2gcc+faaA\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)}{2g(cc+ff-ffpp)}-\frac{fccp\left(Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}{2g(cc+ff-ffpp)^2},$$

deinde vero etiam elementum temporis dt obtinebimus

$$dt=\frac{dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{\left((Ccc-4fgp)(1-pp)-cc\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}}$$

ex quo pariter per p erit $d\lambda=\dfrac{-dt\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)}{1-pp}$:

atque celeritas angularis ε ita definietur, ut sit

$$\varepsilon\varepsilon=AA+\frac{Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff-ffpp}.$$

Ex ε autem porro cognoscitur arcus $AO=\alpha$, ita ut, quoniam tempus t per p datur, quantitates ε, α, p et λ ad datum tempus assignari queant. Denique etsi parum refert, nosse quantitates y et z seorsim: tamen ex 1° et 2° fit

$$zdq-ydz+\frac{A(aa-cc)(yy+zz)}{cc}dt=\frac{2\Pi fgdt}{Mcc}(rz+qy) \text{ ideoque}$$

$$\frac{ydz-zdy}{yy+zz}=\frac{A(aa-cc)dt}{cc}-\frac{2\Pi fgdt\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)(cc+ff-ffpp)}{Mcc\left(Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}$$

quae

quae cum etiam ſit integrabilis, dabit A tang $\frac{z}{y}$ ideoque rationem inter y et z, ex qua cum $yy + zz$ conjunctim, utraque y et z ſeorſim datur: quibus inventis etiam q et r ſeorſim ex valoribus formularum $qy + rz$ et $qz - ry$ eliciuntur.

PROBLEMA. 100.

863. Si turbini initio in data inclinatione impreſſus fuerit motus gyratorius circa proprium axem data celeritate angulari, definire ejus ſitum et motum ad quodvis tempus inde elapſum.

SOLUTIO.

Ponamus initio quo $t = 0$, axem turbinis fuiſſe in a diſtantia ſeu arcu exiſtente $Za = \mathfrak{l}$, ac ponatur $\cos \mathfrak{l} = \mathfrak{p}$, ut fuerit $f\mathfrak{p}$ altitudo centri inertiae ſupra planum horizontale, eodem autem tempore arcus AB fuerit in ab, ita ut pro initio habeatur $l = \mathfrak{l}$, $m = 90 - \mathfrak{l}$, $n = 90°$, et $\lambda = 0$; ideoque $p = \mathfrak{p}$, $q = \sqrt{(1 - \mathfrak{pp})}$, et $r = 0$. Deinde initio turbo circa ipſum axem IA acceperit in ſenſum BC motum gyratorium celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut fuerit $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, et $\gamma = 90°$, ideoque $\vartheta = \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $y = 0$, et $z = 0$. Hinc ergo ſi conſtantes ſupra per integrationem ingreſſae definiantur, obtinebimus: Fig. 111.

$$1°.\ A = \varepsilon;\quad 2°.\ B = \frac{\varepsilon aa\mathfrak{p}}{cc}\ \text{et}\ 3°.\ C = \frac{4fg\mathfrak{p}}{cc}.$$

Hic autem valoribus ſubſtitutis primo inter t et p haec reperitur aequatio

$$dt = \frac{c\,dp\sqrt{(cc + ff - ffpp)}}{\sqrt{(\mathfrak{p} - p)(4ccfg(1 - pp)) - \varepsilon\varepsilon a^4(\mathfrak{p} - p))}}.$$

Deinde angulus XZA $= \lambda$ ita definitur, ut ſit

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon aadt\,(\mathfrak{p} - p)}{cc\,(1 - pp)} = \frac{-\varepsilon aadp\sqrt{(\mathfrak{p} - p)(cc + ff - ffpp)}}{c\,(1 - pp)\sqrt{4ccfg\,(1 - pp) - \varepsilon\varepsilon a^4\,(\mathfrak{p} - p))}}.$$

Porro celeritas angularis ϑ in ſenſum ABC ita exprimitur

$$\vartheta\vartheta = \varepsilon\varepsilon + \frac{4c^4fg\,(\mathfrak{p} - p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff\,(\mathfrak{p} - p)^2}{c^4\,(cc + ff - ffpp)}$$

hincque $\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{\vartheta}$; at pro $\cos\beta = \frac{y}{\vartheta}$ et $\cos\gamma = \frac{z}{\vartheta}$ eſt primo

$$yy + zz = \frac{4c^4fg\,(\mathfrak{p} - p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff\,(\mathfrak{p} - p)^2}{c^4\,(cc + ff - ffpp)} = \vartheta - \varepsilon\varepsilon.$$

Ccc Prae-

Praeterea vero invenimus:

$$qy + rz = \frac{\varepsilon aa}{cc}(\mathfrak{p} - p) \text{ et}$$

$$qz - ry = \frac{\sqrt{(\mathfrak{p} - p)(4ccfg(1 - pp) - \varepsilon\varepsilon a^4(\mathfrak{p} - p))}}{c\sqrt{(cc + ff - ffpp}}$$

atque pressionem, quam nunc turbo cuspide sua exerit in planum horizontale

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2c^4 g + \varepsilon\varepsilon a^4 f(\mathfrak{p} - p)}{2ccg(cc + ff - ffpp)} - \frac{fp(\mathfrak{p} - p)(4c^4 fg + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(\mathfrak{p} - p))}{2ccg(cc + ff - ffpp)^2}.$$

Denique ad quantitates y et z seorsim definiendas habetur haec aequatio

$$\frac{ydz - zdy}{yy + zz} = \frac{\varepsilon(aa - cc)dt}{cc} - \frac{\Pi}{M} \cdot \frac{\varepsilon aafgdt(cc + ff - ffpp)}{4c^4 fg + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(\mathfrak{p} - p)} \text{ seu}$$

$$\frac{ydz - zdy}{yy + zz} = \frac{\varepsilon(aa - cc)dt}{cc} - \frac{\varepsilon aadt(2c^4 fg + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(\mathfrak{p} - p))}{2cc(4c^4 fg + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(\mathfrak{p} - p))}$$
$$+ \frac{\varepsilon aaffpdt(\mathfrak{p} - p)}{2cc(cc + ff - ffpp)}.$$

Inventis autem y et z, etiam q et r per eas determinantur.

COROLL. 1.

864. Arcus ZA $= l$ usque ad angulum rectum augeri, seu turbo procidere potest, quamdiu $\varepsilon\varepsilon a^4\mathfrak{p} < 4ccfg$. Ne ergo turbo prolabatur, necesse est, ut ejus celeritas angularis primo impressa major sit quam $\frac{2c}{aa}\sqrt{\frac{fg}{\mathfrak{p}}}$, ubi est $\mathfrak{p} = \cos Za$. Unde, si turbo initio fuerit verticalis, debet esse $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg}}{aa}$ nisi enim haec conditio observetur; levissima causa turbinum deturbare valebit.

COROLL. 2.

865. Sin autem fuerit $\varepsilon\varepsilon a^4\mathfrak{p} > 4ccfg$, quemadmodum quantitas p nunquam superare potest $\mathfrak{p}$, ita dabitur limes, infra quem nunquam diminuetur, qui definitus ex aequatione, $4ccfgpp = 4ccfg - \varepsilon\varepsilon a^4\mathfrak{p} + \varepsilon\varepsilon a^4 p$ prodit $p = \frac{\varepsilon\varepsilon a^4 - \sqrt{(\varepsilon^4 a^8 - 16\varepsilon\varepsilon a^4 ccfg\mathfrak{p} + 64c^4 ffgg)}}{8ccfg}$

unde

unde fit proxime $p = \mathfrak{p} - \frac{4ccfg(1-\mathfrak{pp})}{eea^4 - 8ccfg\mathfrak{p}}$ pro minimo valore ipsius $p = \cos ZA$, seu pro maximo arcu ZA.

COROLL. 3.

866. Sin autem in fig. 109. spectemus ad angulum IFk, quo inclinatio axis ad horizontem, cujus sinus est $= p$, minor fieri non potest: motus turbinis gyratorius perennis esse nequit, nisi valor minimus ipsius p adhuc fuerit major quam sinus anguli IFk. Quare posito sin IF$k = k$, debet esse $ee > \frac{4ccfg(1-kk)}{a^4(\mathfrak{p}-k)}$.

SCHOLION 1.

867. Hic ergo duos casus constitui convenit, alterum quo celeritas angularis turbini primum impressa e minor est, quam $\frac{2c\sqrt{fg(1-kk)}}{aa\sqrt{(\mathfrak{p}-k)}}$, alterum quo hac quantitate est major. Priori casu quo $e < \frac{2c\sqrt{fg(1-kk)}}{aa\sqrt{(\mathfrak{p}-k)}}$, turbo mox procidet, quoniam ad minimam inclinationem pervenire nequit, quin corpore suo planum horizontale attingat, sicque motus gyratorius destruatur. Posteriori vero casu quo $e > \frac{2c\sqrt{fg(1-kk)}}{aa\sqrt{(\mathfrak{p}-k)}}$, motus gyratorius perpetuo durabit, quandoquidem a frictione omnibusque motus obstaculis mentem abstrahimus. Ut ergo motus gyratorius prodeat perennis, necesse est turbini primum majorem celeritatem angularem e imprimi, quam ista formula exhibet. Patet autem, quo major turbini celeritas angularis imprimatur, eo minus eum ad horizontem inclinatum iri, ac si celeritas illa foret infinita, turbo eandem inclinationem perpetuo conservaret. Quando autem motus gyratorius est perennis, turbo ab initio magis ad horizontem inclinabitur, donec maximam inclinationem attigerit, tum iterum se eriget usque ad statum initialem, quo ubi pervenerit, quasi unam motus sui periodum absolvisse est censendus, deinceps simili modo progressurus; nunquam enim turbo magis fiet erectus, quam fuerat initio, si quidem nulla affuerit frictio. Namque si turbo, dum cuspide super plano horizontali incedit, frictionem offendat, ejus effectus in erigendo turbine consumetur, quatenus is ob minutam celeritatem angularem non prolabi cogitur. Quare nemini mirum videri debet, si experientia nostro calculo minus conveniat, cum aberrationes frictioni sint tribuendae.

SCHOLION. 2.

868. Ex his etiam ratio constructionis turbinum perspicitur, ut facillime motum gyratorium recipiant, seu ut minima celeritas angularis ad hoc sufficere possit. Scilicet cum celeritas angularis initio impressa major esse debeat quam $\frac{2c\sqrt{fg}}{aa}$, patet turbinis figuram ejusmodi esse oportere, ut ejus momentum inertiae respectu axis AF sit maximum prae momento respectu axium ad hunc normalium. Quare figura aptissima erit discus planus hasta tenuissima transfixus, quo casu fit $aa = 2cc$: ac si radius ejus disci fuerit $= h$: erit $aa = \frac{1}{2}hh$, et $cc = \frac{1}{4}hh$, hincque $\varepsilon > \frac{2\sqrt{fg}}{h}$. Deinde quo brevior fuerit cuspis seu intervallum $IF = f$, eo magis celeritas angularis ε ad durationem gyrationis requisita minuitur: verum tum etiam in minore inclinatione turbo planum horizontale corpore suo attinget. Ponamus $h = \frac{1}{2}$ dig. et $f = \frac{1}{4}$ dig. quoniam $g = 187\frac{1}{2}$ dig. sumi debet $\varepsilon > \sqrt{750}$: quare si capiatur ε duplo major vel $\varepsilon = 55$, turbo uno minuto secundo conficiet arcum $= 55$, seu $\frac{55}{2\pi}$, hoc est fere novem revolutiones absolvet. Pro turbinibus autem majoris moduli celeritas angularis minor secundum rationem subduplicatam laterum sufficiet.

PROBLEMA. 101.

869. Si turbini initio datam inclinationem tenenti impressus fuerit motus gyratorius satis insigni celeritate angulari, ut inclinatio ejus minimas subeat mutationes, definire ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, uti in problemate praecedente sunt constituta, assumimus hic $\varepsilon\varepsilon$ multis vicibus excedere quantitatem $\frac{4ccfg}{a^4\mathfrak{p}}$. Ponamus ergo $\varepsilon\varepsilon = \frac{4nccfg}{a^4\mathfrak{p}}$, ut n hic denotet numerum satis magnum, ac primo pro relatione inter t et p hanc habebimus aequationem, quia ab initio quantitas p decrescit $dt = \frac{-dp\sqrt{\mathfrak{p}(cc+ff-ffpp)}}{2\sqrt{fg(\mathfrak{p}-p)(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}pp-n\mathfrak{p}+np)}}$.

Cum

Cum igitur p quam minimum a $\mathfrak{p}$ deficiat, ponamus $p = \mathfrak{p} - u$, ut u sit particula vehementer exigua, fietque

$$dt = \frac{+ du \surd \mathfrak{p}(cc + ff - \mathfrak{pp})}{2 \surd fgu (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^3 - nu)} \text{ hincque}$$

$$t = \frac{+ \surd \mathfrak{p}(cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{2 \surd nfg} \int \frac{du}{\surd \left(\frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^3}{n} u - uu\right)} = C +$$

$$\frac{\surd \mathfrak{p}(cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{2 \surd nfg} \text{ A sin verf. } \frac{2nu}{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^3}$$

ubi debet esse $C = o$. Quare ab initio ubi $u = o$ seu $p = \mathfrak{p}$ usque ad tempus, quo inclinatio fit maxima $u = \frac{\mathfrak{p}(1 - \mathfrak{pp})}{n}$, seu $p = \mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{p}(1 - \mathfrak{pp})}{n}$, erit tempus $= \frac{\pi \surd \mathfrak{p}(cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{2 \surd nfg}$, quod ergo eo est brevius, quo major fuerit numerus n. Deinde vero fit $d\lambda = \frac{- 2 \surd nfg}{c(1 - \mathfrak{pp}) \surd \mathfrak{p}}$. udt sive

$$\lambda = \frac{- \surd (cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{c(1 - \mathfrak{pp})} \int \frac{du \surd u}{\surd \left(\frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^3}{n} - u\right)}, \text{ unde elicitur}$$

$$\lambda = \frac{- \surd (cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{c(1 - \mathfrak{pp})} \left(\frac{\mathfrak{p}(1 - \mathfrak{pp})}{2n} \text{ A sin verf. } \frac{2nu}{\mathfrak{p}(1 - \mathfrak{pp})} - \surd \left(\frac{\mathfrak{p}(1 - \mathfrak{pp})}{n} u - uu\right)\right).$$

Arcus scilicet ZA in sensum oppositum progreditur, et elapso tempore $t = \frac{\pi \surd \mathfrak{p}(cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{2 \surd nfg} = \frac{\pi c \surd (cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{gaa}$ quo turbo maxime ad horizontem inclinatur, fit $\lambda = - \frac{\pi \mathfrak{p} \surd (cc + ff - ff\mathfrak{pp})}{2nc}$. Non quidem axis A motu aequabili circa verticem Z circumferetur, sed neglecta motus inaequalitate, erit celeritas angularis media $= \frac{\surd \mathfrak{p}fg}{c \surd n} = \frac{2fg}{gaa}$, ob $n = \frac{gga^4 \mathfrak{p}}{4ccfg}$, ita ut haec celeritas angularis ipsius axis turbinis circa ver-

 ticem

ticem Z fit reciproce, ut celeritas angularis turbinis circa proprium axem. Deinde dum turbo maximam habet inclinationem, ut fit $p = \mathfrak{p} - \frac{4ccfg(1-\mathfrak{pp})}{eea^4}$, celeritas angularis ε ita definitur ut fit

$$\varepsilon\varepsilon = ee + \frac{16ffgg(1-\mathfrak{pp})}{eea^4} \text{ feu } \varepsilon = e + \frac{8ffgg(1-\mathfrak{pp})}{e^3 a^4},$$

eritque $\cos\alpha = \cos AO = 1 - \frac{8ffgg(1-\mathfrak{pp})}{e^4 a^2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha\alpha$

feu ipfe arcus minimus $\alpha = AO = \frac{4fg\surd(1-\mathfrak{pp})}{eeaa}$.

Pro preffione autem cufpidis F in planum horizontale habetur pro motus initio, feu ubi $p = \mathfrak{p}$, et axis turbinis maxime erectus $\frac{\Pi}{M} = \frac{cc}{cc+ff-ff\mathfrak{pp}}$: at quando turbo maxime inclinatur:

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{cc+2ff(1-\mathfrak{pp})}{cc+ff-ff\mathfrak{pp}} - \frac{8ccf^3g\mathfrak{p}(1-\mathfrak{pp})}{eea^4(cc+ff-ff\mathfrak{pp})}.$$

Haecque ad motus cognitionem fufficiunt.

COROLL. 1.

870. Si axis turbinis initio fuerit in a, pofito $Za = \mathfrak{l}$ cum fit $\mathfrak{p} = \cos\mathfrak{l}$, fi A fit maxima elongatio axis a vertice, pofito $ZA = l$, quia eft $p = \cos l = \cos\mathfrak{l} - \frac{4ccfg \sin\mathfrak{l}^2}{eea^4}$ erit $l = \mathfrak{l} + \frac{4ccfg \sin\mathfrak{l}}{eea^4}$.

COROLL. 2.

871. Quia in maxima turbinis inclinatione arcus ZA eft maximus, evidens eft polum gyrationis O tum in ipfum arcum ZA cadere debere, ut fit $ZO < ZA$, et tum intervallum hoc AO erit $= \frac{4fg\surd(1-\mathfrak{pp})}{eeaa}$.

SCHOLION.

872. Hactenus fumfimus turbini initio motum gyratorium imprimi circa ipfum axem AF, qui eft cafus maxime communis. Verum tamen fieri poteft, ut ipfi circa alium axem motus imprimatur, quod evenit, fi axis verus AF, dum turbo circa eum gyratur, fimul impulfionem accipiat, qua

qua ad horizontem vel magis inclinetur, vel inde magis erigatur. Hoc enim eodem redit, ac si turbini circa alium axem motus gyratorius imprimeretur, nisi quatenus inde simul motus progressivus oritur, qui cum nihil habeat difficultatis, ad eum non respiciamus. Casus quidem jam ante tractatus huc referri potest, si statum quendam medium, quo turbo jam circa alium axem praeter AF gyratur, tanquam initialem spectemus, sed quoniam ibi axis turbinis se nunquam ad situm verticalem erigere potest, in eo non omnes motus continentur. Quare conveniet adhuc eum casum pertractari, quo turbinis axis AF primo quidem tenet situm verticalem, ipsi autem motus gyratorius circa alium axem ad horizontem inclinatum imprimitur, quem casum etiam per formulas generales ante evolutas resolvere poterimus.

PROBLEMA 102.

873. Si turbinis axis initio fuerit verticalis, eique circa axem quendam inclinatum impressus sit motus gyratorius data celeritate angulari, determinare motum turbinis.

SOLUTIO.

Cum ergo initio punctum A fuerit in Z, ponamus arcum AC in circulum ZX incidisse, ita ut arcus AB fuerit ad ZX normalis. Quare facto $t = 0$, erat $l = 0$, $m = 90°$ et $n = 90°$, ideoque $p = 1$, $q = 0$, et $r = 0$: ac $\mu = 90°$, $\nu = 0$, manente λ indefinito, tum vero initio turbini impressus fuerit motus gyratorius celeritate angulari $= \epsilon$ in sensum ABC circa polum in arcu AC situm, ita ut posito $t = 0$, fuerit $\alpha = a$, $\beta = 90$, et $\gamma = 90° - a$, ideoque $x = \epsilon \cos a$, $y = 0$, et $z = \epsilon \sin a$. His positis statum turbinis post tempus $= t$ ex §. 862. definiemus, si constantes per integrationem ingressas his conditionibus convenienter determinemus. Primo ergo fiet $A = \epsilon \cos a$, deinde $B = \frac{aa}{cc} \epsilon \cos a$; tertio

$$\frac{Ccc}{ff} - \frac{4g}{f} - \frac{\epsilon\epsilon cc \sin a^2}{ff} = 0, \text{ sive } C = \frac{4fg}{cc} + \epsilon\epsilon \sin a^2;$$

His autem valoribus substitutis obtinebimus $qy + rz = \frac{\epsilon aa \cos a}{cc}(1 - p)$

$$qz - ry = \frac{\sqrt{(\epsilon\epsilon c^4 (1-pp) \sin a^2 + 4ccfg(1-p)(1-pp) - \epsilon\epsilon a^4 (1-p)^2 \cos a^2)}}{c\sqrt{(cc + ff - ffpp)}}$$

$$yy + zz = \frac{\epsilon\epsilon c^6 \sin a^2 + 4c^4 fg(1-p) + \epsilon\epsilon a^4 ff (1-p)^2 \cos a^2}{c^4 (cc + ff - ffpp)} \text{ hincque}$$

$dt =$

$$dt = \frac{-cdp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4ccfg(1-pp)+eec^4(1+p)\sin\alpha^2-eea^4(1-p)\cos\alpha^2)}}$$

quoniam initio quantitas p minuitur.

Porro ob $gg = xx + yy + zz$ et $x = g \cos\alpha$ erit

$$gg = ee\cos\alpha^2 + \frac{eec^6\sin\alpha^2 + 4c^4fg(1-p) + eea^4ff(1-p)^2\cos\alpha^2}{c^4(cc+ff-ffpp)}$$

ac tandem $d\lambda = \dfrac{-eaadt\cos\alpha}{cc(1+p)}$.

COROLL. 1.

874. Ex formula pro dt inventa judicare licet, utrum turbo sit prolapsurus, nec ne? ponatur enim $p = 0$, et denominatoris factor $4ccfg + eec^4\sin\alpha^2 - eea^4\cos\alpha^2$, quoties est positivus, turbinem ad lapsum proclivem indicat: quod ergo evenit, si $4ccfg + eec^4\sin\alpha^2 > eea^4\cos\alpha^2$.

COROLL. 2.

875. Ne ergo turbo prolabatur, primo necesse est, ut sit $a^4\cos\alpha^2 > c^4\sin\alpha^2$ seu $\tang\alpha < \dfrac{aa}{cc}$, deinde vero esse oportet $ee > \dfrac{4ccfg}{a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2}$; seu celeritas angularis primum impressa superare debet limitem $\dfrac{2c\sqrt{fg}}{\sqrt{(a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2)}}$: et quidem notabiliter, ne turbo, dum inclinatur, corpore suo horizontem attingat.

COROLL. 3.

876. Quando autem est tam $\tang\alpha < \dfrac{aa}{cc}$ quam $ee > \dfrac{4ccfg}{a^4\cos\alpha^2 - c^4\sin\alpha^2}$, axis turbinis non ad horizontem usque inclinari, seu quantitas p ad nihilum usque diminui potest: sed minimus ejus valor prodiens ex aequatione

$$4ccfgpp = eep(a^4\cos\alpha^2 + c^4\sin\alpha^2) - eea^4\cos\alpha^2 + eec^4\sin\alpha^2 + 4ccfg$$

reperitur $p =$

$$\frac{ee(a^4\cos\alpha^2+c^4\sin\alpha^2)-\sqrt{(e^4(a^4\cos\alpha^2+c^2\sin\alpha^2)^2-16eeccfg(a^4\cos\alpha^2-c^4\sin\alpha^2)+64c^4ffgg)}}{8ccfg}$$

COROLL.

COROLL. 4.

877. Sin autem fuerit $\tang \alpha = \frac{aa}{cc}$ seu $a^4 \cos a^2 = c^4 \sin a^2$, aequatio inter p et t erit $dt = \frac{-dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4fg(1-pp)+2\varepsilon\varepsilon ccp \sin a^2)}}$ atque p non solum ad nihilum usque, sed etiam ad valorem negativum minui poterit, qui foret:

$$p = \frac{\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2 - \sqrt{(\varepsilon^4 c^4 \sin a^4 + 16ffgg}}{4fg}$$

sed tantam inclinationem status quaestionis excludit.

SCHOLION.

878. Status initialis talem motum exhibens in fig. 112. repraesentatur, ubi axis turbinis A in ipso vertice versatur, bini reliqui vero in B et C, et circulum quidem verticalem fixum AX ita assumsimus, ut in eo esset quadrans AC, et alter AB ad istum normalis. Initio motus ergo erat $l=0$, $m=90°$, $n=90°$, ideoque $p=1$, $q=0$, $r=0$, tum vero $\mu=90°$ et $\nu=0$, existente λ indefinito. Deinde vero turbini initio motum gyratorium impressum esse sumo circa axem IO, existente arcu $AO=a$, eumque celeritate ε in sensum ABC: sicque posito $t=0$ erat $\alpha=a$, $\beta=90$, $\gamma=90°-a$, et $g=\varepsilon$, hincque $x=\varepsilon \cos a$, $y=0$ et $z=\varepsilon \sin a$. Ne igitur hoc casu turbo prolabatur, binae conditiones requiruntur, altera ut sit $\tang a$ seu $\tang AO < \frac{aa}{cc}$, et altera ut sit $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{fg}}{\sqrt{(a^4 \cos a^2 - c^4 \sin a^2)}}$. Ac si velimus ut axis quam minime inclinetur, fiatque $p=1-\omega$ existente ω particula valde parva, reperitur $\omega = \frac{2\varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2}{\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2 - 8ccfg}$, quare arcus $AO=a$ quam minimus esse, deinde vero $\varepsilon\varepsilon a^4$ multum excedere debet $8ccfg$ ut fit $\varepsilon > \frac{2c\sqrt{2fg}}{aa}$. Quod si eveniat, motus satis erit regularis, quem accuratius determinasse juvabit. Fig. 112.

PROBLEMA. 103.

879. Si turbini in situ erecto constituto circa axem quam minime declinantem impressus fuerit motus gyratorius satis celer, ut turbo parumper tantum a statu erecto recedat, ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Sumimus ergo arcum AO = a initio fuisse valde parvum, et celeritatem angularem initio impressam ε tantam ut fuerit $\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 > 8ccfg$. Ponamus ergo $\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 = 8nccfg$ ut sit $n > 1$, et habebimus

$$dt = \frac{-cdp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4ccfg(1-pp)-8nccfg(1-p)+\varepsilon\varepsilon c^4(1+p)\sin a^2}}.$$

Quia ergo novimus p parum infra unitatem diminui, statuamus $p = 1 - u$, fietque neglectis terminis minimis

$$dt = \frac{cdu}{\sqrt{u(8fgu - 8nfgu + 2\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2 - \varepsilon\varepsilon ccu \sin a^2)}}$$

cujus integrale est

$$t = \frac{c}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2 + 8(n-1)fg)}}\ \text{A sin verf.}\ \frac{u(\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2 + 8(n-1)fg)}{\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2}.$$

Cum nunc maximus valor ipsius u sit $= \dfrac{2\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2}{\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2 + 8(n-1)fg}$: tempus usque ad maximam turbinis inclinationem est $= \dfrac{\pi c}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2 + 8(n-1)fg)}}$

$$= \frac{\pi cc}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2 - 8ccfg)}}$$

atque turbo tum declinabit a situ erecto angulo exiguo, cujus sinus versus est $= \dfrac{2\varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2}{\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2 - 8ccfg}$ et ipse angulus $=$ $\dfrac{2\varepsilon cc \sin a}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2 - 8ccfg)}}$. Deinde cum sit $d\lambda = \dfrac{-\varepsilon aadt \cos a}{cc(1+p)}$, hicque p ut constans $= 1$ considerari possit, tempore quo turbo ad maximam inclinationem pertingit, ejus axis versabitur in plano verticali, quod
Fig. 111. a circulo ZX declinat angulo XZA $= 90° -$ $\dfrac{\pi\varepsilon aa \cos a}{2\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 \cos a^2 + \varepsilon\varepsilon c^4 \sin a^2 - 8ccfg)}}$ primo enim initio, quo A circa O gyratur fig. 112. angulus λ est rectus seu $= \dfrac{\pi}{2}$.

COROLL. 1.

889. Cum arcus initialis AO $= a$ sit quasi infinite parvus, et angulus XZA $= \lambda$ initio fuerit $= 90°$, elapso tempore t, fiet hic angulus $\lambda =$

$\lambda = 90^\circ - \frac{\varepsilon aat}{2cc}$. Axis ergo turbinis ex puncto verticali egressus in antecedentia movetur, et integrum circuitum absolvit tempore $= \frac{4\pi cc}{\varepsilon aa}$ min. sec.

COROLL. 2.

881. Cum initio esset $u = 0$, elapso tempore t fiet

$$1 - \frac{u(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}{\varepsilon\varepsilon c^4 \sin\alpha} = \cos\frac{t\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}{cc};$$

Posito autem arcu ZA minimo $= l$, ob $p = \cos l = 1 - \frac{1}{2}ll$, erit $u = \frac{1}{2}ll$, hincque $l = \frac{2\varepsilon cc \sin\alpha}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}} \sin\frac{t\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}{2cc}$ ita ut ad quodvis tempus t assignare valeamus λ et l.

COROLL. 3.

882. Cum axis turbinis ex Z digressus ad maximam declinationem pertingit, praeterlabitur tempus $= \frac{\pi cc}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}$, quo tempore is circa Z in antecedentia circumfertur per angulum $= \frac{\pi\varepsilon aa}{2\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}$; qui ergo recto est major: atque in verticem Z revertetur absoluto angulo $= \frac{\pi\varepsilon aa}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}$ majore duobus rectis.

SCHOLION.

883. Hujusmodi motibus evolvendis fusius non immoror, cum omnia phaenomena facile ex formulis inventis derivari queant. Probe autem meminisse oportet, hic nullam frictionis rationem esse habitam, quae quamvis parva statuatur, phaenomena hic definita vehementer perturbat. Ex frictione enim, quam cuspis F super plano horizontali incedens patitur, nascitur vis horizontalis, qua turbini motus progressivus imprimitur, et quia directio illius vis continuo mutatur, facile causa perspicitur, cur turbines motu curvilineo incedere observentur. Verum motus ob frictionem perturbati singularem exigunt tractationem: quare sepositis hujusmodi impedimentis ad alia quaedam motus genera, in quibus gyratio occurrit, progrediamur; et quoniam hic ejusmodi corpora sum

 con-

contemplatus, quae cuſpide ſuper plano horizontali incedunt, ita ut cuſpis ſit quaſi baſis eorum cenſenda, hic ad alia corporum genera ducimur, quae baſi quacunque ſuper plano incedant. Ac de baſi quidem plana vel anguloſa vix quicquam proferri poteſt attentione dignum, cum vel nullus motus gyratorius locum inveniat; ideoque motus determinatio nihil habeat difficultatis, vel ſaltem per ſaltus gyratio ſe immiſceat, dum contactus ad aliam hedram transfertur, ubi ſimul conflictus ſe exerit, cujus explicatio ad aliam Mechanicae partem eſt referenda. Hic igitur ejusmodi tantum baſes, quibus corpora ſuper plano immobili incedant, contemplari convenit, quae curvatura continua ſint praeditae, ne ullus ſaltus in motu occurrat. Nimias autem ambages, quae in calculos inextricabiles perducerent, evitaturi, duo tantum corporum genera, cylindrica ſcilicet ac ſphaerica, potiſſimum evolvamus, quorum nimirum figura externa, qua plano applicantur, ſit vel cylindrica vel ſphaerica, quomodocunque materia intrinſecus fuerit deſtributa, cujus ratio ex centro inertiae et axibus principalibus determinatur. Hinc ad genus cylindricum referuntur ea pendula, quae non ab axe lineari, ut ſupra aſſumſimus, ſunt ſuſpenſa, ſed axiculis cylindricis utrinque plano horizontali incumbant. Deinde etiam huc pertinet motus vacillatorius motui cunarum reciproco ſimilis, cujusmodi corpora, quatenus ſuper plano incumbunt, tanquam cylindrica ſpectari poſſunt. Deinde etiam, quomodo hujusmodi corpora ſuper plano inclinato deſcendant, operae pretium erit ſcrutari. Ad corpora porro ſphaerica refero non ſolum ea, quorum tota figura eſt globoſa, ſed etiam quae inferius, ubi planum attingunt, in hemisphaerium ſunt efformata, veluti ſunt turbines, quorum axes infra non in cuſpidem ſed quaſi in hemisphaerium deſinunt; ubi quidem centrum inertiae magis eſt elevatum, quam centrum hemisphaerii, quando autem profundius eſt ſitum, aliud motus genus oriri poteſt, quo corpus quaſi titubando oſcillationes peragit, in quo motu mira motus gyratorii perturbatio locum habere poteſt.

CAPUT

CAPUT XVIII.

DE MOTU CORPORUM BASI SPHAERICA PRAEDITORUM SUPER PLANO HORIZONTALI.

PROBLEMA. 104.

884. Si corpus basi sphaerica praeditum plano horizontali quomodocunque incumbat, definire vires, quibus sollicitatur, earumque effectum in motu corporis progressivo turbando.

SOLUTIO.

Sit EH planum horizontale et T punctum, ubi corpus ei insistit, Fig. 113. in corpore autem notetur primo centrum baseos sphaericae MTN; quod sit in G, deinde centrum inertiae corporis I, ac tabula repraesentet planum, in quo haec tria puncta sunt sita. Ducatur radius GT, qui cum sit ad horizontem EH normalis, situm habebit verticalem, ideoque ipsum planum TGI erit verticale. Iam quia pro motu progressivo totam corporis massam, quae sit $= M$, tanquam in centro inertiae I collectam concipere licet, ducta IP ipsi GT parallela corpus primo ob gravitatem urgetur in directione IP vi $= M$; deinde vero ubi planum horizontale in T tangit, ab eo certa quadam vi urgebitur sursum in directione TG, et pressioni aequali, quae vis sit $= \Pi$. Quare nisi hae duae vires se destruant, corpus in quiete persistere nequit: ex quo perspicuum est, statum quietis exigere, ut producta recta GI in F corpus puncto F plano horizontali insistat, sicque recta DIGF fiat verticalis. Figura ergo repraesentat statum corporis inclinatum, et inclinatio indicatur angulo FGT, qui sit $= \rho$, quo evanescente corpus in statu aequilibrii versatur. Ponamus porro radium basis sphaericae $GF = GT = e$, et intervallum punctorum G et I nempe $GI = f$, quatenus centrum inertiae I longius distat a puncto F quam centrum figurae G: ita ut si proprius caderet, quantitas f negative esset accipienda. Hinc ergo erit $IP = e + f \cos \rho$, quae est altitudo centri inertiae I supra planum horizontale EH, et quae a viribus sollicitantibus sola afficitur. Translata autem vi $TG = \Pi$ in centrum inertiae I, punctum I deor-

deorsum sollicitatur vi $= M - \Pi$; et quia ejus celeritas deorsum directa est $= \frac{fd\varrho \sin\varrho}{dt}$, posita ea $= u$ erit $du = \frac{2g(M - \Pi)\,dt}{M}$, denotante dt elementum temporis, ex quo habetur $f(dd\varrho \sin\varrho + d\varrho^2 \cos\varrho) = 2g\left(1 - \frac{\Pi}{M}\right)dt^2$ sumto dt constante: neque aliter motus progressivus afficietur.

COROLL. 1.

885. Vicissim ergo si ratio motus progressivi detur, vel saltem ut data consideretur, inde pressio Π definietur, cum sit $\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{f(dd\varrho \sin\varrho + d\varrho^2 \cos\varrho)}{2gdt^2}$ seu $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$.

COROLL. 2.

886. Si fuerit $f = 0$, seu centrum inertiae I in ipsum centrum sphaerae G incidat, prodit $\Pi = M$, et corpus in omni situ aequilibrii proprietate gaudet.

COROLL. 3.

887. Si fuerit $f > 0$ seu FI > FG, statim ac corpus tantillum inclinatur, a vi sollicitante inclinatio augebitur, sin autem sit $f < 0$ seu FI < FG, inclinatio minuetur, corpusque in situm aequilibrii, quo punctum F plano insistit, restituetur: dum priori casu procumbit, alium quaerens aequilibrii situm.

SCHOLION. 1.

888. Quamcunque autem corpus habuerit figuram, in eo semper ad minimum duo dantur aequilibrii situs, quorum alter ita est comparatus, ut si corpus ex eo parumper declinetur, sponte sua se restituat, alter vero, ut penitus prolabatur: quorum prior *status aequilibrii stabilis*, posterior vero *labilis* vocari solet. Quodcunque enim corpus plano horizontali incumbit, in aequilibrio versatur, si recta a centro inertiae ad punctum contactus ducta fuerit verticalis: id quod semper duplici saltem modo evenire potest. Namque si ex centro inertiae ad omnia superficiei puncta rectae concipiantur ductae, quoniam nulla earum vel evanescit,

ve

vel sit infinita, inter eas necesse est dari et maximam et minimam: utraque autem ad planum tangens erit normalis: quare si corpus alterutro eorum punctorum, a quibus centrum inertiae vel maxime vel minime distat, plano horizontali incumbat, recta ex centro inertiae ad punctum contactus ducta erit verticalis, ideoque situm aequilibrii dabit, eumque stabilem, si recta ista fuerit minima, contra vero labilem, si maxima: unde intelligitur, centrum inertiae semper infimum locum quaerere, ubi acquiescat. Saepenumero autem plures dantur aequilibrii situs, alii stabiles alii labiles, qui se alternatim excipere debent, quoniam corpus ex situ labili digressum in stabilem perveniant necesse est.

SCHOLION. 2.

889. In praesente casu, quo corporis superficiem sphaericam statuimus, recta per centrum inertiae I et centrum figurae G ducta dabit duo illa puncta F et D, quibus si corpus plano horizontali incumbat, situm aequilibrii teneat: ac dum puncto F planum horizontale tangit, situs aequilibrii erit stabilis, si $FI < FG$ seu $f < 0$, labilis autem si $FI > FG$ seu $f > 0$: neque praeter hos duos situs aequilibrii alius hic dabitur, nisi fuerit $f = 0$, quo casu subito omnes plane situs aequilibrii indolem recipiunt. Etsi autem hic totam corporis superficiem ut sphaericam considero, tamen ad institutum nostrum sufficit, si ea saltem portio, qua durante motu planum horizontale contingit, fuerit sphaerica: atque hinc ista tractatio etiam ad eos turbines patet, quorum axes inferius non in cuspidem, ut ante assumsimus, sed in haemisphaerium vel etiam minus sphaerae segmentum efformantur, ita ut forma supra considerata hinc prodeat, si radius sphaerae $GF = e$ evanescat, sicque haec tractatio superiorem in se complectatur. Recta igitur DIGF per centrum inertiae I et centrum basis sphaericae G ducta proprium turbinis axem exhibet, quae quidem, uti turbines construi solent, simul unus est axium principalium corporis, bini vero reliqui momenta inertiae habent paria, qualem formam jam supra statuimus. Verum quo haec tractatio latius pateat, simulque ad titubationes corporum quorumque basi sphaerica praeditorum accommodari queat, axes corporis principales utcumque ab axe proprio DF diversos considerabo, eorumque respectu momenta virium explorabo.

PROBLEMA 105.

890. Data pressione Π, quo corpus basi sphaerica praeditum plano horizontali incumbit, definire momenta inde orta respectu axium princi-

principalium corporis, quomodocunque hi ratione axis proprii corporis fuerint dispositi.

SOLUTIO.

Fig. 114. Circa corporis centrum inertiae I descripta sphaera, sit Z ejus punctum verticale, axisque proprius teneat jam situm DIG, ut ejus declinatio a situ verticali sit $DZ = \varrho$. Cum ergo directio pressionis Π sit verticalis et per punctum G transeat existente $IG = f$, referat recta verticalis $G\Pi$ hanc pressionem $= \Pi$, ita ut $ZDG\Pi$ sit planum verticale, in quo resolvatur vis $G\Pi = \Pi$ secundum directiones GI et GV, quarum haec ad illam sit normalis, et ob angulum $DG\Pi = \varrho$ prodit vis secundum $GI = \Pi \cos \varrho$ et vis secundum $GV = \Pi \sin \varrho$: quarum illa per centrum inertiae I transiens nulla suggerit momenta. Sint nunc IA, IB, IC, corporis tres axes principales, datum situm ratione axis proprii ID tenentes, ac per puncta A, B, C ex D ducantur semicirculi DAG, DBG, DCG. Quodsi axis IA esset normalis ad planum IGV, ejus respectu foret momentum vis GV $= \Pi f \sin \varrho$, quod autem nunc in ratione sinus totius tam ad sinum arcus GA quam ad sinum anguli VGA minui debet, ita ut ex vi pressionis resultet

mom. respectu axis $IA = \Pi f \sin \varrho \,.\, \sin GA \,.\, \sin VGA$ in sensum CB
mom. respectu axis $IB = \Pi f \sin \varrho \,.\, \sin GB \,.\, \sin VGB$ in sensum AC
mom. respectu axis $IC = \Pi f \sin \varrho \,.\, \sin GC \,.\, \sin VGC$ in sensum BA.

Haec autem terna momenta supra litteris P, Q, R indicavimus, quatenus quidem in sensum contrarium agere statuuntur, quare omnibus ad punctum D translatis habebimus:

$$P = -\Pi f \sin DZ \,.\, \sin DA \,.\, \sin ZDA = -\Pi f \sin ZD \,.\, \sin ZA \,.\, \sin DZA$$
$$Q = -\Pi f \sin DZ \,.\, \sin DB \,.\, \sin ZDB = -\Pi f \sin ZD \,.\, \sin ZB \,.\, \sin DZB$$
$$R = -\Pi f \sin DZ \,.\, \sin DC \,.\, \sin ZDC = -\Pi f \sin ZD \,.\, \sin ZC \,.\, \sin DZC.$$

COROLL. 1.

891. Assumsimus hic, centrum basis G proprius esse termino imo F quam centrum inertiae I: sin autem secus eveniat, ut intervallum FI minus sit intervallo $FG = e$, intervallum $GI = f$ negative capi debet. At si fuerit $GI = 0$, momenta inventa evanescunt, seu corpus in omni situ aequilibrium tenebit.

COROLL. 2.

892. Si pro situ axis proprii ID respectu axium corporis principalium ponatur arcus $AD = \zeta$, $BD = \eta$, $CD = \vartheta$, tum vero angulus ZDA

ZDA $= \varphi$, existente arcu ZD $= \varrho$, ob $\cos ADB = -\frac{\cos\zeta \cos\eta}{\sin\zeta \sin\eta}$ et $\sin ADB = \frac{-\cos\vartheta}{\sin\zeta \sin\eta}$, quia $\sin ADB : \sin DAB$ seu $\sin ADB : -\cos DAC$ $= 1 : \sin BD = 1 : \sin\eta$, erit $\sin ZDB = \frac{-\cos\zeta \cos\eta \sin\varphi + \cos\vartheta \cos\varphi}{\sin\zeta \sin\eta}$, at $\cos DAC = \frac{\cos CD}{\sin AD} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\zeta}$, ideoque $P = -\Pi f \sin\varrho \sin\zeta \sin\varphi$, atque $Q = \frac{\Pi f \sin\varrho(\cos\zeta\cos\eta\sin\varphi - \cos\vartheta\cos\varphi)}{\sin\zeta}$ et $R = \frac{\pi f \sin\varrho(\cos\zeta\cos\vartheta\sin\varphi - \cos\eta\cos\varphi)}{\sin\zeta}$.

COROLL. 3.

893. Si axis proprius ID congrueret cum axe principali IA, foret $\zeta = 0$ atque $\eta = \vartheta = 90°$, ut esset $\cos\eta = \cos\vartheta = \sin\zeta$ et angulus φ maneret indefinitus. At ex prioribus formulis fient momenta virium:

$P = 0$, $Q = -\Pi f \sin\varrho \sin ZAB$, et $R = -\Pi f \sin\varrho \sin ZAC$
seu $P = 0$, $Q = \Pi f \cos ZC$ et $R = -\Pi f \cos ZB$.

COROLL. 4.

894. Quodsi vero ut supra ponamus ZA $= l$, ZB $= m$ et ZC $= n$, reperiemus momenta virium in genere

$P = \Pi f(\cos\vartheta \cos m - \cos\eta \cos n)$; $Q = \Pi f(\cos\zeta \cos n - \cos\vartheta \cos l)$
atque $R = \Pi f(\cos\eta \cos l - \cos\zeta \cos m)$,
unde illa si $\zeta = 0$, et $\eta = \vartheta = 90°$ sponte sequuntur.

EXPLICATIO.

895. Ratio investigationis harum posteriorum formularum ita se habet: Primo cum sit $\sin DZ \sin ZDA = \sin ZA \sin ZAD$ erit $P = -\Pi f \sin DA \sin ZA \sin ZAD$; at est ZAD $=$ BAD $-$ BAZ, et

$$\sin BAD = -\cos CAD = \frac{-\cos\vartheta}{\sin DA};\ \cos BAD = \frac{\cos\eta}{\sin DA}$$

$$\sin BAZ = -\cos CAZ = \frac{-\cos n}{\sin ZA};\ \cos BAZ = \frac{\cos m}{\sin ZA}$$

unde $\sin ZAD = \frac{-\cos m \cos\vartheta + \cos n \cos\eta}{\sin ZA \sin DA}$ et $P = +\Pi f(\cos\vartheta \cos m - \cos\eta \cos n)$.

 Reli-

Reliqua duo momenta Q et R praebet analogia sine ulteriori calculo. Deinde vero est $\cos DZ = \cos\rho = = \cos\zeta \cos l + \cos\eta \cos m + \cos\vartheta \cos n$, quae expressio uti unitatem nunquam superare potest, ita unitati aequalis esse nequit, seu $DZ = 0$, nisi sit $l = \zeta$, $m = \eta$ et $n = \vartheta$, scilicet has ternas determinationes simul suppeditat haec aequatio, $\cos\zeta \cos l + \cos\eta \cos m + \cos\vartheta \cos n = 1$. Cum enim praeterea sit

$$\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2 = 1 \text{ et } \cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1,$$

si a summa harum illius duplum subtrahatur, prodit

$$(\cos\zeta - \cos l)^2 + (\cos\eta - \cos m)^2 + (\cos\vartheta - \cos n)^2 = 0,$$

trium autem quadratorum summa nihilo aequari nequit, nisi singula sint nulla.

SCHOLION.

896. Cum neque in his expressionibus pro momentis virium, P, Q, R inventis, neque in pressione $\Pi = M\left(1 + \frac{fdd.\cos\rho}{2gdt^2}\right)$ radius sphaerae e basin constituentis insit, omnia quae supra de motu turbinis infra in cuspidem desinentis sunt tradita, etiam valent de ejusmodi turbinibus, qui desinunt in haemisphaerium seu aliam sphaerae partem, dummodo punctum F, quod ante cuspidem denotabat, hic in centro figurae sphaericae G constituatur. Perinde ergo est, sive turben gyretur super cuspide, sive super hemisphaerio, dummodo f sit distantia centri inertiae I a centro basis sphaericae, quantuscunque enim fuerit radius hujus basis e, is in computum non ingreditur, eo autem evanescente basis turbinis abit in cuspidem. Totum igitur caput praecedens hic inseri intelligatur, ita ut Theoria turbinum sine ullo labore haud mediocriter amplificata sit censenda. Basin autem sphaericam faciendo casus occurrit ante exclusus, scilicet quo centrum inertiae I fundo proprius est, quam centrum sphaericitatis, hicque fit quantitas f negativa. Sive jam tale corpus sit globus completus, sive basin habeat MFN portionem sphaerae, centro G descriptae, qua plano horizontali incumbat, ejus motum, quatenus contactus in hanc basin cadit, investigemus. Hic autem cogimur corpori talem indolem tribuere, ut axis proprius AGIF, qui si fuerit verticalis, statum quietis exhibet, simul sit corporis axis principalis, reliqui vero bini axes principales habeant momenta inter se aequalia. Scilicet si respectu axis IA momentum inertiae sit $= Maa$ respectu binorum reliquorum vero Mbb, et Mcc, statuemus $bb = cc$. Hujusmodi ergo corpus quemcunque receperit motum impressum, quomodo motum sit continuaturum, determinemus.

Fig. 115.

PROBLE-

PROBLEMA. 106.

897. Si corpus basi sphaerica MFN instructum, in quo axis aequilibrii AGIF sit axis principalis, ejusque respectu momentum inertiae $= Maa$, respectu binorum reliquorum autem aequalia $= Mcc$, motum acceperit quemcunque, determinare motus continuationem.

SOLUTIO.

Sit radius basis sphaericae $FG = e$, centrum autem inertiae I cadat infra centrum basis G ad intervallum $GI = f$. Pro motu progressivo, si centrum inertiae I habuerit motum secundum directionem horizontalem, eum constantem in directum conservabit, quatenus autem motu verticali cietur, is cognita pressione, quae sit $= \Pi$, inde definietur, quod si declinatio axis AF a situ verticali ponatur $= \rho$, sit $\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{fdd.\cos\rho}{2gdt^2}$, existente M corporis massa seu pondere. Verum ipsa haec pressio Π, quam corpus in planum horizontale exerit, non nisi ex motu gyratorio cognosci potest. Teneat ergo corpus nostrum respectu Fig. 111.
sphaerae fixae, in qua Z est punctum verticale, nunc elapso tempore t ejusmodi situm, ut ejus axes principales in A, B, C pertingant, ponanturque arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, tum vero anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$, ita ut sit $l = \rho$. Nunc autem gyretur circa polum O in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, ac positis arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ sit brevitatis gratia $\varepsilon\cos\alpha = x$, $\varepsilon\cos\beta = y$, $\varepsilon\cos\gamma = z$. Momenta autem virium ex pressione Π orta sunt $P = 0$, $Q = -\Pi f\cos n$; $R = +\Pi f\cos m$, unde colligimus sequentes aequationes:

$$dx = 0;\ dy + \frac{aa - cc}{cc}xzdt = \frac{-2\Pi fgdt\cos n}{Mcc};\ dz + \frac{cc - aa}{cc}xydt = \frac{2\Pi fgdt\cos m}{Mcc}$$

$$dl\sin l = dt(y\cos n - z\cos m);\quad d\lambda\sin l^2 = -dt(y\cos m + z\cos n)$$
$$dm\sin m = dt(z\cos l - x\cos n);\quad \text{reliqui anguli } \mu \text{ et } \nu \text{ hinc sponte}$$
$$dn\sin n = dt(x\cos m - y\cos l);\quad \text{dantur.}$$

Si porro ponamus $\cos l = p$, $\cos m = q$, $\cos n = r$, quoniam hae aequationes congruunt cum iis, quas supra probl. 99. integravimus, nisi quod f capiatur negative, habebimus in finitis has aequationes: $x = A$ et

$$\text{I. } qy + rz = B - \frac{Aaap}{cc}$$

$$\text{II. } (qz - ry)^2 = \frac{(Ccc + 4fgp)(1-pp) - cc\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc + ff(1-pp)}$$

$$\text{III. } yy + zz = \frac{(Ccc + 4fgp + ff\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc + ff(1-pp)}$$

$$\text{IV. } \frac{\Pi}{M} = \frac{2gcc - Afaa\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)}{2g(cc + ff(1-pp)} + \frac{fccp\left(Ccc + 4fgp + ff\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}{2g(cc + ff(1-pp))^2}$$

$$\text{V. } dt = \frac{dp\sqrt{(cc + ff(1-pp))}}{\sqrt{\left((Ccc + 4fgp)(1-pp) - cc\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}}$$

$$\text{VI. } d\lambda = \frac{-dt}{1-pp}\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)$$

$$\text{VII. } ss = AA + \frac{Ccc + 4fgp + ff\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc + ff(1-pp)}$$

$$\text{VIII. } \frac{ydz - zdy}{yy + zz} = \frac{A(aa - cc)dt}{cc} + \frac{2\Pi fgdt\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)(cc + ff - ffpp)}{Mcc\left(Ccc + 4fgp + ff\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}$$

ubi constantes A, B, C et reliquae per integrationem ingressurae ex statu corporis initiali debent definiri.

COROLL. 1.

898. Si corpus initio quieverit, axisque principalis A fuerit in a declinatione ejus existente $Za = \mathfrak{l}$ et $\cos\mathfrak{l} = \mathfrak{p}$, initio erat $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, ob $s = 0$; atque $p = \mathfrak{p}$. Fit ergo $A = 0$; $B = 0$, et $Ccc = -4fg\mathfrak{p}$: Hinc elapso tempore t erit $x = 0$; $qy + rz = 0$;

$$qz - ry = \frac{2\sqrt{fg(p-\mathfrak{p})(1-pp)}}{\sqrt{(cc + ff(1-pp))}}; \; yy + zz = \frac{4fg(p - \mathfrak{p})}{cc + ff(1-pp)}$$
$$= ss,$$

$= gg$, et $\frac{\Pi}{M} = \frac{cc}{cc + ff(1 - pp)} + \frac{afftcp(p - \mathfrak{p})}{(cc + ff(1 - pp))^2}$.

COROLL. 2.

899. Praeterea vero in eodem casu est $d\lambda = 0$, ideoque axis, qui initio in a erat, per ipsum arcum aZ movebitur, eritque $dt = \frac{dp\sqrt{(cc + ff)(1 - pp)}}{2\sqrt{fg(p - \mathfrak{p})(1 - pp)}}$, unde quia $p > \mathfrak{p}$ seu $l < \mathfrak{l}$ axis ab a recta ad Z progreditur. Denique ob $ydz - zdy = 0$, fit $z = \delta y$, et $y = \frac{2\sqrt{fg(p - \mathfrak{p})}}{\sqrt{(1 + \delta\delta)(cc + ff(1 - pp))}}$: atque $q(yy + zz) = \frac{2z\sqrt{fg(p - \mathfrak{p})(1 - pp)}}{\sqrt{(cc + ff(1 - pp))}}$ seu $q = \frac{\delta\sqrt{(1 - pp)}}{\sqrt{(1 + \delta\delta)}}$ et $r = \frac{-\sqrt{(1 - pp)}}{\sqrt{(1 + \delta\delta)}}$, unde fit cof ZAB $\frac{q}{\sqrt{(1 - pp)}} = \frac{\delta}{\sqrt{(1 + \delta\delta)}}$, qui ergo angulus manet constans.

COROLL. 3.

900. Si ergo corpus initio quiescat, ejusque axis principalis IA tenuerit situm inclinatum Ia, inde recta se eriget ex a ad Z ascendens, gyrabitur autem circa punctum O, ut ob $x = s \cos\alpha = 0$ arcus AO sit quadrans, et quia $\cos ZO = \cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n = \frac{qy + rz}{s} = 0$, erit etiam ZO quadrans, sicque O erit polus circuli XZY.

Et cum axis in Z pervenerit, erit celeritas angularis $s = \frac{2\sqrt{fg(1 - \mathfrak{p})}}{c}$.

SCHOLION 1.

901. Si corpus initio non quieverit, sed motum quemcunque acceperit, continuatio motus ex iisdem formulis determinatur, dummodo constantes A, B, C statui initiali convenienter definiantur; ubi autem ad ejusmodi formulas integrandas devenitur, quae nonnisi concessis quadraturis superioris ordinis expediri possunt. Quin etiam casus hic simplicissimus, quo corpus initio in situ inclinato quievit, ab integratione formulae hujus $dt = \frac{dp\sqrt{(cc + ff(1 - pp))}}{2\sqrt{fg(p - \mathfrak{p})(1 - pp)}}$ pendet, quae neque per logarithmos neque arcus circulares absolvi potest. At si declinatio initialis

tum vero sint corporis momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc respectu axium principalium IA, IB, IC. Nunc autem corpus gyretur circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, sintque arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$: ac ponatur $\varepsilon \cos\alpha = x$, $\varepsilon \cos\beta = y$, $\varepsilon \cos\gamma = z$. Quoniam igitur initio ubi $t = 0$, corpus ex quiete motum incipere assumitur, erat tum $x = 0$, $y = 0$, et $z = 0$. Tum vero quia motus corporis perpetuo manet tardissimus, quantitates x, y, z semper manebunt minimae, ita ut binarum producta xy, xz, et yz prae singulis pro evanescentibus haberi queant. Cum ergo momenta virium sollicitantium P, Q, R, modo sint definita ex §. 810. sequentes adipiscimur aequationes.

$$dx = \frac{2fg\,dt}{aa}(r\cos\eta - q\cos\vartheta)$$

$$dy = \frac{2fg\,dt}{bb}(p\cos\vartheta - r\cos\zeta)$$

$$dz = \frac{2fg\,dt}{cc}(q\cos\zeta - p\cos\eta).$$

Deinde quia est $\cos l = \cos\zeta + p$, $\cos m = \cos\eta + q$, et $\cos n = \cos\vartheta + r$ ob ζ, η, ϑ constantes erit $dl \sin l = -dp$; $dm \sin m = -dq$ et $dn \sin n = -dr$, unde insuper hae ternae aequationes accedunt

$-dp = dt(y\cos\vartheta - z\cos\eta)$; ubi producta yr, zq, zp, xr, xq,
$-dq = dt(z\cos\zeta - x\cos\vartheta)$; yp ut minima prae terminis
$-dr = dt(x\cos\eta - y\cos\zeta)$; hic exhibitis omittimus.

Denique si arcus ZA a circulo quodam verticali fixo nunc declinare statuatur angulo λ, ob $\sin l^2 = \sin\zeta^2 - 2p\cos\zeta$ habebimus hanc aequationem:
$d\lambda = \frac{-dt(y\cos\eta + z\cos\vartheta)}{\sin\zeta^2 - 2p\cos\zeta}$. Quia autem in superioribus aequationibus quantitates x, y, z et p, q, r ubique unam dimensionem occupant, atque x, y, z posito $t = 0$ evanescere debent, manifestum est, tam huic conditioni, quam sex illis aequationibus satisfieri posse ponendo:

$$x = A\sin\delta t,\ y = B\sin\delta t;\ z = C\sin\delta t;$$

$$p = D\cos\delta t;\ q = E\cos\delta t,\ r = F\cos\delta t,$$

tum enim ternae priores aequationes per $\cos\delta t$ divisae, et ternae posteriores per $\sin\delta t$ divisae dabunt.

$$A\delta = \frac{2fg}{aa}(F\cos\eta - E\cos\vartheta);\quad D\delta = B\cos\vartheta - C\cos\eta$$

$$B\delta = \frac{2fg}{bb}(D\cos\vartheta - F\cos\zeta);\quad E\delta = C\cos\zeta - A\cos\vartheta$$

Cδ

$$C\delta = \frac{2fg}{cc}(E\cos\zeta - D\cos\eta);\quad F\delta = A\cos\eta - B\cos\zeta.$$

Ex posterioribus substituantur valores coefficientium D, E, F in prioribus et obtinebimus:

$$\frac{A\delta\delta aa}{2fg} = A\cos\eta^2 - B\cos\zeta\cos\eta - C\cos\zeta\cos\vartheta + A\cos\vartheta^2$$

$$\frac{B\delta\delta bb}{2fg} = B\cos\vartheta^2 - C\cos\eta\cos\vartheta - A\cos\zeta\cos\eta + B\cos\zeta^2$$

$$\frac{C\delta\delta cc}{2fg} = C\cos\zeta^2 - A\cos\zeta\cos\vartheta - B\cos\eta\cos\vartheta + C\cos\eta^2.$$

Quodsi jam brevitatis gratia ponamus $A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\vartheta = G$, ob $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2 = 1$ erit

$$A\left(1 - \frac{\delta\delta aa}{2fg}\right) = G\cos\zeta,\quad B\left(1 - \frac{\delta\delta bb}{2fg}\right) = G\cos\eta$$

$$\text{et } C\left(1 - \frac{\delta\delta cc}{2fg}\right) = G\cos\vartheta.$$

Ponamus brevitatis causa $\frac{\delta\delta}{2fg} = u$; ut fiat

$$A = \frac{G\cos\zeta}{1 - aau};\quad B = \frac{G\cos\eta}{1 - bbu};\quad C = \frac{G\cos\vartheta}{1 - ccu}.$$

Cum autem sit $A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\vartheta = G$, erit

$$\frac{\cos\zeta^2}{1 - aau} + \frac{\cos\eta^2}{1 - bbu} + \frac{\cos\vartheta^2}{1 - cc} = 1,$$

qua aequatione evoluta consequimur per u dividendo,

$$\left.\begin{aligned} aa\,bb\,cc\,uu - bb\,cc\,u\,(\sin\zeta^2 &+ aa\cos\zeta^2) \\ - aa\,cc\,u\,(\sin\eta^2 &+ bb\cos\eta^2) \\ - aa\,bb\,u\,(\sin\vartheta^2 &+ cc\cos\vartheta^2) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Statuantur quantitates cognitae

$$bb\,cc\sin\zeta^2 + aa\,cc\sin\eta^2 + aa\,bb\sin\vartheta^2 = K\,aa\,bb\,cc$$

$$aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2 = L\,aa\,bb\,cc$$

ut sit $uu - Ku + L = 0$, hincque

$$u = \frac{\delta\delta}{2fg} = \tfrac{1}{2}K + \sqrt{(\tfrac{1}{4}KK - L)}$$

et quantitas G manet indefinita ex statu initiali definienda, dum contra quan-

Fff

quantitates K et L ſunt ex natura corporis datae. Cum igitur hinc inventus ſit valor ipſius u, inde habemus $\delta = \surd\, 2fgu$, et

$$A = \frac{G \operatorname{cof} \zeta}{1 - aau};\; B = \frac{G \operatorname{cof} \eta}{1 - bbu};\; C = \frac{G \operatorname{cof} \vartheta}{1 - ccu}$$

$$D = \frac{Gu\,(bb - cc) \operatorname{cof} \eta \operatorname{cof} \vartheta}{(\delta\, 1 - bbu)(1 - ccu)};\; E = \frac{Gu\,(cc - aa) \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \vartheta}{\delta\,(1 - ccu)\,(1 - aau)}$$

$$\text{et } F = \frac{Gu\,(aa - bb) \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \eta}{\delta(1 - aau)\,(1 - bbu)}.$$

Si jam initio fuerit arcus ZD $= \mathfrak{r}$, qui nunc eſt ϱ, cum ſit initio $p = D$: $q = E$; $r = F$, habebimus

$$DD + EE + FF = \mathfrak{rr},$$

unde per $\mathfrak{r}$ invenitur conſtans G. Denique pro angulo λ inveniendo prodit $\lambda = \frac{-\,dt\;(B \operatorname{cof} \eta + C \operatorname{cof} \vartheta) \operatorname{fin} \delta t}{\operatorname{fin} \zeta^2}$, ideoque $\lambda = \frac{(B \operatorname{cof} \eta + C \operatorname{cof} \vartheta)(\operatorname{cof} \delta t - 1)}{\delta \operatorname{fin} \zeta^2}$ ſi quidem arcus ZA initio fuerit in verticali fixo, indeque in ſenſum XOY moveri ſumatur, quatenus ergo haec expreſſio pro λ eſt negativa, in ſenſum contrarium axis IA circa Z gyrari eſt cenſendus.

Denique cum ſit $pp + qq + rr = \varrho\varrho$, erit $\varrho = \mathfrak{r} \operatorname{cof} \delta t$, ob $\mathfrak{r} = \surd(DD + EE + FF)$, unde patet axem ID in ſitum verticalem erigi elapſo tempore $= \frac{\pi}{2\delta}$ et titubationes iſochronas fore oſcillationibus penduli, cujus longitudo eſt $= \frac{2g}{\delta\delta} = \frac{1}{fu} = \frac{K - \surd(KK - 4L)}{2Lf}$.

COROLL. 1.

904. Cum ſit $DD + EE + FF = \mathfrak{rr}$, erit

$$\delta\delta\,\mathfrak{rr} = AA\,(\operatorname{cof} \eta^2 + \operatorname{cof} \vartheta^2) + BB\,(\operatorname{cof} \zeta^2 + \operatorname{cof} \vartheta^2) + CC\,(\operatorname{cof} \zeta^2 + \operatorname{cof} \eta^2) - 2BC \operatorname{cof} \eta \operatorname{cof} \vartheta - 2AC \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \vartheta - 2AB \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \eta$$

et quia $G = A \operatorname{cof} \zeta + B \operatorname{cof} \eta + C \operatorname{cof} \vartheta$, hujus quadratum eo additum dabit

$$\delta\delta\,\mathfrak{rr} + GG = AA + BB + CC,$$

ubi ſi brevitatis gratia ponatur $\frac{1}{1 - aau} = \mathfrak{P}$; $\frac{1}{1 - bbu} = \mathfrak{Q}$; $\frac{1}{1 - ccu} = \mathfrak{R}$, ob $\mathfrak{P} \operatorname{cof} \zeta^2 + \mathfrak{Q} \operatorname{cof} \eta^2 + \mathfrak{R} \operatorname{cof} \vartheta^2 = 1$ et $A = G\mathfrak{P} \operatorname{cof} \zeta$; $B = G\mathfrak{Q} \operatorname{cof} \eta$ et $C = G\mathfrak{R} \operatorname{cof} \vartheta$, fiet

$\delta\delta\,\mathfrak{rr}$

$$\delta\delta rr = GG(\mathfrak{PP}\cos\zeta^2 + \mathfrak{QQ}\cos\eta^2 + \mathfrak{RR}\cos\vartheta^2 - 1)$$

ideoque ob $\mathfrak{PP} - \mathfrak{P} = \frac{aau}{(1-aau)^2}$ habebitur

$$\delta\delta rr = GGu\left(\frac{aa\cos\zeta^2}{(1-aau)^2} + \frac{bb\cos\eta^2}{(1-bbu)^2} + \frac{cc\cos\vartheta^2}{(1-ccu)^2}\right).$$

COROLL. 2.

905. Quia porro est $\delta\delta = 2fgu$, si in subsidium vocetur aequatio $uu - Ku + L = o$, reperietur

$$GG = \frac{-2fgrr(1-aau)(1-bbu)(1-ccu)}{aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2 - aabbccuu}.$$

EXPLICATIO.

906. Haec expressio pro GG satis concinna sequenti modo eruitur: Posito brevitatis gratia $\frac{1}{aa} = \mathfrak{a}$, $\frac{1}{bb} = \mathfrak{b}$, $\frac{1}{cc} = \mathfrak{c}$, habemus:

I. $K = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} - \mathfrak{a}\cos\zeta^2 - \mathfrak{b}\cos\eta^2 - \mathfrak{c}\cos\vartheta^2$

II. $L = \mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\zeta^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{c}\cos\eta^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\vartheta^2$

III. $1 = \cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2$.

Hinc deducitur ob $uu - Ku + L = o$

$$\cos\zeta^2 = \frac{\mathfrak{a}K - L - \mathfrak{aa}}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})}, \text{ et } u\cos\zeta^2 = \frac{(\mathfrak{a}-u)(L-\mathfrak{a}u)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})}$$

ideoque

$$\frac{\delta\delta rr}{GG} = \frac{\mathfrak{a}(L-\mathfrak{a}u)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})(\mathfrak{a}-u)} + \frac{\mathfrak{b}(L-\mathfrak{b}u)}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{b}-u)} + \frac{\mathfrak{c}(L-\mathfrak{c}u)}{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})(\mathfrak{c}-u)}$$

ex qua aequatione reducta illa expressio obtinetur.

SCHOLION.

907. Quoniam haec ad titubationes omnium corporum, quorum basis est portio sphaerica, patent, quomodocunque ejus axes principales ratione axis naturalis DGIF fuerint dispositi, eorumque respectu momenta inertiae inaequalia, ne in tanta amplitudine confundamur, conveniet primo formulas nostras ad species corporum simpliciores accommodari, quo inde facilius ad species magis complicatas progredi liceat. Ac primo quidem casus, quo omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia, seu aa

 $= bb$

$= bb = cc$, omnium est simplicissimus, quia tum axis DF pro principali haberi potest, et titubationes eaedem prodire debent, quas jam ante definivimus. Tum vero duo saltem momenta inertiae aequalia statuamus, scilicet $bb = cc$.

CASUS. I.

quo $aa = bb = cc$.

908. Hoc ergo casu habemus:

$$A = \frac{G \operatorname{cof} \zeta}{1 - aau}; \; B = \frac{G \operatorname{cof} \eta}{1 - aau}; \; C = \frac{G \operatorname{cof} \vartheta}{1 - aau},$$

hincque $G = \dfrac{G \operatorname{cof} \zeta^2 + G \operatorname{cof} \eta^2 + G \operatorname{cof} \vartheta^2}{1 - aau} = \dfrac{G}{1 - aau}$, ita ut

sit $u = 0$. Verum iisdem quoque formulis satisfit ponendo $u = \dfrac{1}{aa}$ et

$G = 0$, ut sit $A \operatorname{cof} \zeta + B \operatorname{cof} \eta + C \operatorname{cof} \vartheta = 0$, neque quicquam praeterea determinetur, sicque habebimus $\delta = \dfrac{\surd 2fg}{a}$: tum vero

$$D = \frac{B \operatorname{cof} \vartheta - C \operatorname{cof} \eta}{\delta}; \; E = \frac{C \operatorname{cof} \zeta - A \operatorname{cof} \vartheta}{\delta}; \; F = \frac{A \operatorname{cof} \eta - B \operatorname{cof} \zeta}{\delta}$$

atque $\delta\delta rr = AA + BB + CC$: ut sit $\varrho = r \operatorname{cof} \delta t$. Videamus jam circa quemnam polum O corpus sit gyraturum, ac primo habemus $\operatorname{cof} OD = \operatorname{cof} \alpha \operatorname{cof} \zeta + \operatorname{cof} \beta \operatorname{cof} \eta + \operatorname{cof} \gamma \operatorname{cof} \vartheta$, seu

$s \operatorname{cof} OD = x \operatorname{cof} \zeta + y \operatorname{cof} \eta + z \operatorname{cof} \vartheta = 0$, sicque arcus OD quadrans. Deinde est $\operatorname{cof} OZ = \operatorname{cof} \alpha \operatorname{cof} l + \operatorname{cof} \beta \operatorname{cof} m + \operatorname{cof} \gamma \operatorname{cof} n$ seu

$$s \operatorname{cof} OZ = x \operatorname{cof} l + y \operatorname{cof} m + z \operatorname{cof} n = 0 + px + qy + rz = 0$$

ob $AD + BE + CF = 0$, eritque ergo etiam OZ quadrans. Ex quo perspicitur corpus circa punctum O, quod est polus circuli verticalis ZDX gyrari, sicque axem ex D recta in situm verticalem Z erigi, ita ut elapso tempore t sit $\varrho = r \operatorname{cof} \dfrac{t\surd 2fg}{a}$. Quare hae titubationes isochronae erunt oscillationibus penduli, cujus longitudo est $= \dfrac{aa}{f}$.

CASUS II.

quo duo tantum momenta principalia sunt aequalia seu $bb = cc$.

909. Hoc ergo casu est $K = \dfrac{cc \operatorname{fin} \zeta^2 + aa \operatorname{fin} \eta^2 + aa \operatorname{fin} \vartheta^2}{aacc}$

=

$= \frac{cc \sin\zeta + aa + aa \cos\zeta^2}{aacc}$, et $L = \frac{aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2}{aac^4}$: sive cum aequatio, unde u definiri debet, sit $\frac{\cos\zeta^2}{1 - aau} + \frac{\sin\zeta^2}{1 - ccu} = 1$, erit

$$aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2 = aaccu, \text{ ideoque } u = \frac{aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2}{aacc}$$

qui valor etiam ex generali forma elicitur, nisi quod hoc modo radix inutilis $u = \frac{1}{cc}$ excluditur. Quamobrem habebimus

$$\delta = \frac{\sqrt{2fg(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)}}{ac}, \text{ tum vero}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{Gcc}{(aa + cc)\cos\zeta}; \quad \mathfrak{B} = \frac{Gaa \cos\eta}{(aa - cc)\sin\zeta^2}; \quad \mathfrak{C} = \frac{Gaa \cos\vartheta}{(aa - cc)\sin\zeta^2}.$$

Deinde pro G ex $\mathfrak{r}$ inveniendo fit

$$\delta\delta\mathfrak{rr} + GG = \frac{GG(a^4 \cos\zeta^2 + c^4 \sin\zeta^2)}{(aa - cc)^2 \sin\zeta^2 \cos\zeta^2} \text{ sive}$$

$$\delta\delta\mathfrak{rr} = \frac{GG(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)^2}{(aa - cc)^2 \sin\zeta^2 \cos\zeta^2}, \text{ et } G = \frac{(aa - cc)\delta\mathfrak{r} \sin\zeta \cos\zeta}{aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2}$$

vel $G = \frac{(aa - cc)\mathfrak{r} \sin\zeta \cos\zeta \sqrt{2fg}}{ac\sqrt{(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)}}$. Deinde vero obtinemus

$$\mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{r} \cos\vartheta}{\sin\zeta}; \quad \mathfrak{F} = \frac{-\mathfrak{r} \cos\eta}{\sin\zeta}; \text{ atque}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{-c\mathfrak{r} \sin\zeta \sqrt{2fg}}{a\sqrt{(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)}}; \quad \mathfrak{B} = \frac{a\mathfrak{r} \cos\zeta \cos\eta \sqrt{2fg}}{c \sin\zeta \sqrt{(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)}};$$

$$\mathfrak{C} = \frac{a\mathfrak{r} \cos\zeta \cos\vartheta \sqrt{2fg}}{c \sin\zeta \sqrt{(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)}}$$

ex quibus consequimur

$x = s \cos\alpha = \mathfrak{A} \sin\delta t$; $y = s \cos\beta = \mathfrak{B} \sin\delta t$; $z = s \cos\gamma = \mathfrak{C} \sin\delta t$

$p = \cos l - \cos\zeta = \mathfrak{D} \cos\delta t$; $q = \cos m - \cos\eta = \mathfrak{E} \cos\delta t$; $r = \cos n - \cos\vartheta = \mathfrak{F} \cos\delta t$,

$$\text{atque } \lambda = \frac{-a\mathfrak{r} \sin\zeta \cos\zeta (1 - \cos\delta t)\sqrt{2fg}}{\delta c\sqrt{(aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2)}} = \frac{-aa\mathfrak{r} \sin\zeta \cos\zeta (1 - \cos\delta t)}{aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2}$$

estque λ angulus VZA, existente ZV circulo verticali fixo, a quo declinationem poli A computamus. Deinde vero est $\rho = \mathfrak{r} \cos\delta t$, et ut obtinea-

tineamus angulum DZV, quaeramus angulum DZA, ex formula cof DZA

$$= \frac{\cos\zeta - \cos l \cos\varrho}{\varrho \sin l} = \frac{\cos\zeta - \cos\zeta \cos\varrho - p\cos\varrho}{\varrho \sin\zeta} = \tfrac{1}{2}\varrho \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta},$$

ob D = o ideoque $p = 0$, ergo $\cos DZA = \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta \cos\delta t}{2\sin\zeta}$, qui cum fit infinite parvus, patet angulum DZA esse rectum proxime et angulo ZDA aequalem. Quare cum initio angulus ZDA fuerit non rectus, haec solutio, quippe quae manifesto tantum est particularis, eo non extenditur. Ceterum vero et hae titubationes erunt isochronae oscillationibus penduli, cujus longitudo est $= \frac{aacc}{f(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}$.

Denique cum fit $u = \sin\delta t \,.\, \surd(AA + BB + CC)$, prodibit

$$u = \frac{\mathfrak{r}\surd 2fg(a^4\cos\zeta^2 + c^4\sin\zeta^2)}{ac\surd(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)} \,.\, \sin\delta t.$$

Pro polo autem gyrationis O invenimus:

$$u\cos OD = (A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\vartheta)\sin\delta t = G\sin\delta t \text{ et}$$

$$u\cos OZ = (A\cos l + B\cos m + C\cos n)\sin\delta t = G\sin\delta t,$$

ita ut fit OD = OZ, ob $Ap + Bq + Cr = 0$.

SCHOLION.

910. Mirum non est, hanc solutionem non esse generalem, cum enim ex data indole corporis, quantitatibus aa, bb, cc et angulus ζ, η, ϑ comprehensa, et ex situ axis DF initiali ejusve declinatione $\mathfrak{r}$ a situ verticali omnes coefficientes A, B, C, D, E, F cum numero δ determinentur, ex iis angulus ADZ, quo arcus DA initio ab arcu DZ deviabat, sponte determinatur, neque amplius arbitrio nostro, uti natura rei postulat, relinquitur. Verum cum in genere pro quantitate u geminum valorem elicuerimus, quorum neutrum prae altero rejicere fas est, si utrumque simul adhibeamus, solutionem ampliorem obtinebimus, unde simul effici potest, ut angulus ADZ initio fuerit dato angulo aequalis. Cum enim in aequationibus differentialibus quantitates x, y, z, et p, q, r ubique unicam habeant dimensionem, si iis duplici modo satisfieri queat, pro qualibet quantitate summa binorum ejus valorum statui poterit, hincque solutionem generalem impetrabimus, quam hic exponamus.

PROBLEMA. 109.

911. Si corpus basi sphaerica praeditum de situ aequilibrii quomodocunque infinite parum declinetur, subitoque demittatur, definire motum titubatorium, quo agitabitur.

SOLU-

SOLUTIO.

Retentis denominationibus superioris problematis, quoniam posito

$$\frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\sin\eta^2}{bb} + \frac{\sin\vartheta^2}{cc} = K \text{ et } \frac{\cos\zeta^2}{bbcc} + \frac{\cos\eta^2}{aacc} + \frac{\cos\vartheta^2}{aabb} = L$$

pro u geminum invenimus valorem, sint ii

$$u = \tfrac{1}{2}K + \surd(\tfrac{1}{4}KK - L) \text{ et } u' = \tfrac{1}{2}K - \surd(\tfrac{1}{4}KK - L)$$

unde pro δ etiam binos adipiscimur valores, qui sint $\delta = \surd 2fgu$ et $\delta' = \surd 2fgu'$

atque hinc pro senis quantitatibus x, y, z et p, q, r sequentes impetrabimus valores

$$x = z\cos\alpha = \frac{G\cos\zeta\sin\delta t}{1 - aau} + \frac{H\cos\zeta\sin\delta' t}{1 - aau'}$$

$$y = z\cos\beta = \frac{G\cos\eta\sin\delta t}{1 - bbu} + \frac{H\cos\eta\sin\delta' t}{1 - bbu'}$$

$$z = z\cos\gamma = \frac{G\cos\vartheta\sin\delta t}{1 - ccu} + \frac{H\cos\vartheta\sin\delta' t}{1 - ccu'}$$

tum vero porro

$$p = \cos l - \cos\zeta = \frac{Gu(bb - cc)\cos\eta\cos\vartheta\cos\delta t}{\delta(1 - bbu)(1 - ccu)} + \frac{Hu'(bb - cc)\cos\eta\cos\vartheta\cos\delta' t}{\delta'(1 - bbu')(1 - ccu')}$$

$$q = \cos m - \cos\eta = \frac{Gu(cc - aa)\cos\zeta\cos\vartheta\cos\delta t}{\delta(1 - ccu)(1 - aau)} + \frac{Hu'(cc - aa)\cos\zeta\cos\vartheta\cos\delta' t}{\delta'(1 - ccu')(1 - aau')}$$

$$r = \cos n - \cos\vartheta = \frac{Gu(aa - bb)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta t}{\delta(1 - aau)(1 - bbu)} + \frac{Hu(aa - bb)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta' t}{\delta'(1 - aau')(1 - bbu')}.$$

Hic jam habemus binas quantitates constantes arbitrarias G et H, atque hi valores ita satisfaciunt, ut facta substitutione in aequationibus differentialibus termini tam per G quam per H affecti seorsim se destruant. Verum si initio arcus ZD fuerit $= r$, posito $t = o$, fieri debet $pp + qq + rr = rr$. Deinde vero si initio fuerit angulus ZDA $= f$, ob

cos f

$\cos f = \frac{\cos l - \cos\zeta \cos r}{\sin\zeta \sin r} = \frac{\cos\zeta(1 - \cos r) + p}{\sin\zeta \sin r} = \frac{r \cos\zeta}{\sin\zeta} + \frac{p}{r \sin\zeta}$ et ob r infinite parvum, erit $p = r \sin\zeta \cos f$. Si hic ergo pro p ejus valor superior posito $t = 0$ substituatur, habebitur alia aequatio ex qua cum illa conjuncta binae constantes G et H determinabuntur. At posito angulo VZA $= \lambda$ erit $d\lambda = \frac{-dt\,(y \cos\eta + z \cos\vartheta)}{\sin\zeta^2}$, cujus integrale facile exhibetur. Simili autem modo positis angulis VZB $= \mu$ et VZC $= \nu$, erit $d\mu = \frac{-dt\,(z \cos\vartheta + x \cos\zeta)}{\sin\eta^2}$; et $d\nu = \frac{-dt\,(x \cos\zeta + y \cos\eta)}{\sin\vartheta^2}$

Hic autem notari convenit, si sit $bb = cc$, fore binos valores $u = \frac{1}{cc}$ et $u' = \frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\cos\zeta^2}{cc}$, ideoque pro priore fractionum superiorum quasdam numeratores ac denominatores simul evanescere. Ad earum ergo valores investigandos ponatur $\frac{1}{bb} = \frac{1}{cc} + \omega$, existente ω quantitate evanescente, reperieturque

$$u = \frac{1}{cc} + \frac{\omega \cos\vartheta^2}{\sin\zeta^2} \text{ et } u' = \frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\cos\zeta^2}{cc};$$ hincque si

$\frac{G}{\omega}$ ponatur $= I$, ut sit $G = I\omega = 0$, fiet

$$x = v \cos\alpha = \frac{H \cos\zeta \sin\delta' t}{1 - aau'} = \frac{-Hcc \sin\delta' t}{(aa - cc)\cos\zeta}$$

$$y = v \cos\beta = \frac{I \sin\zeta^2 \sin\delta t}{cc \cos\eta} + \frac{H \cos\eta \sin\delta' t}{1 - ccu'} = \frac{I \sin\zeta^2 \sin\delta t}{cc \cos\eta} + \frac{Haa \cos\eta \sin\delta' t}{(aa - cc)\sin\zeta^2}$$

$$z = v \cos\gamma = \frac{-I \sin\zeta^2 \sin\delta t}{cc \cos\vartheta} + \frac{H \cos\vartheta \sin\delta' t}{1 - ccu'} = \frac{-I \sin\zeta^2 \sin\delta t}{cc \cos\vartheta} + \frac{Haa \cos\vartheta \sin\delta' t}{(aa - cc)\sin\zeta^2}$$

deinde

deinde vero

$$p = \cos l - \cos\zeta = -\frac{I \sin\zeta^2 \cos\delta t}{\delta cc \cos\eta \cos\vartheta}$$

$$q = \cos m - \cos\eta = \frac{-I \sin\zeta^2 \cos\zeta \cos\delta t}{\delta cc \cos\vartheta} - \frac{Hu'(aa-cc)\cos\zeta\cos\vartheta\cos\delta' t}{\delta'(1-aau')(1-ccu')}$$

$$r = \cos n - \cos\vartheta = \frac{-I \sin\zeta^2 \cos\zeta \cos\delta t}{\delta cc \cos\eta} + \frac{Hu'(aa-cc)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta' t}{\delta'(1-aau')(1-ccu')}$$

ubi est $\frac{aa-cc}{(1-aau')(1-ccu')} = \frac{-aacc}{(aa-cc)\sin\zeta^2\cos\zeta^2}$.

Vel si ponamus $I = \frac{-\mathfrak{G}\delta cc \cos\eta\cos\vartheta}{\sin\zeta^2}$ et $H = \frac{\mathfrak{H}\delta'(aa-cc)\sin\zeta^2\cos\zeta}{aacc}$

ob $u = \frac{1}{cc}$ et $u' = \frac{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}{aacc}$, ideoque $\delta = \frac{\sqrt{2fg}}{c}$ et δ'
$= \frac{\sqrt{2fg(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}}{ac}$

erit $x = z\cos\alpha = \frac{-\mathfrak{H}\delta'\sin\zeta^2\sin\delta' t}{aa}$

$y = z\cos\beta = \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\cos\eta\sin\delta' t}{cc} + \mathfrak{G}\delta\cos\vartheta\sin\delta t$

$z = z\cos\gamma = \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\cos\vartheta\sin\delta' t}{cc} - \mathfrak{G}\delta\cos\eta\sin\delta t$

$p = \cos l - \cos\zeta = \mathfrak{G}\sin\zeta^2\cos\delta t$

$q = \cos m - \cos\eta = -\mathfrak{G}\cos\zeta\cos\eta\cos\delta t + \mathfrak{H}u'\cos\vartheta\cos\delta' t$

$r = \cos n - \cos\vartheta = -\mathfrak{G}\cos\zeta\cos\vartheta\cos\delta t - \mathfrak{H}u'\cos\eta\cos\delta' t$

quae formulae jam sine ulla difficultate ad omnes casus accommodari possunt.

COROLL. 1.

912. Haec integralia adhuc latius extendi possunt, cum x, y, z et p, q, r partes constantes recipiant; ac forma litterarum G et H mutata, habebimus:

$x = \cos\zeta(\mathfrak{E} + \mathfrak{G}(1-bbu)(1-ccu)\sin\delta t + \mathfrak{H}(1-bbu')$
$(1-ccu')\sin\delta' t)$

$y = \cos\eta(\mathfrak{E} + \mathfrak{G}(1-aau)(1-ccu)\sin\delta t + \mathfrak{H}(1-aau')$
$(1-ccu')\sin\delta' t)$

$z = \cos\vartheta(\mathfrak{E} + \mathfrak{G}(1-aau)(1-bbu)\sin\delta t + \mathfrak{H}(1-aau')$
$(1-bbu')\sin\delta' t)$

 atque

atque

$$p = \mathfrak{F}\cos\zeta + (bb - cc)\cos\eta\cos\vartheta\left(\frac{\mathfrak{G}u(1 - aau).\cos\delta t}{\delta} + \frac{\mathfrak{H}u'(1 - aau')\cos\delta' t}{\delta'}\right)$$

$$q = \mathfrak{F}\cos\eta + (cc - aa)\cos\zeta\cos\vartheta\left(\frac{\mathfrak{G}u(1 - bbu)\cos\delta t}{\delta} + \frac{\mathfrak{H}u'(1 - bbu')\cos\delta' t}{\delta'}\right)$$

$$r = \mathfrak{F}\cos\vartheta + (aa - bb)\cos\zeta\cos\eta\left(\frac{\mathfrak{G}u(1 - ccu)\cos\delta t}{\delta} + \frac{\mathfrak{H}u'(1 - ccu')\cos\delta' t}{\delta'}\right).$$

COROLL. 2.

913. Angulorum etiam δt et $\delta' t$ uterque quantitate constante augeri potest, ac si eorum loco scribamus $\delta t + \mathfrak{g}$ et $dt + \mathfrak{h}$, integralia continebunt sex constantes arbitrarias $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, ideoque erunt integralia completa harum sex aequationum differentialium:

$$aadx = 2fgdt\,(r\cos\eta - q\cos\vartheta);\quad dp = dt\,(z\cos\eta - \eta\cos\vartheta)$$
$$bbdy = 2fgdt\,(p\cos\vartheta - r\cos\zeta);\quad dq = dt\,(x\cos\vartheta - z\cos\zeta)$$
$$ccdz = 2fgdt\,(q\cos\zeta - p\cos\eta);\quad dr = dt\,(y\cos\zeta - x\cos\eta).$$

COROLL. 3.

915. Si corpus initio quieverit, ut in problemate assumsimus, ita ut tum fuerit $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$; poni debet $\mathfrak{E} = 0$, $\mathfrak{g} = 0$, et $\mathfrak{h} = 0$; reliquas autem constantes ex situ corporis initiali definiri oportet.

COROLL. 4.

915. Nempe si pro initio, quo $t = 0$, ponantur anguli ZDA $= \mathfrak{l}$, ZDB $= \mathfrak{m}$, et ZDC $= \mathfrak{n}$; ut sit

$$\sin(\mathfrak{l} - \mathfrak{m}) = \frac{-\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\eta};\quad \sin(\mathfrak{m} - \mathfrak{n}) = \frac{-\cos\zeta}{\sin\eta\sin\vartheta};$$

$$\sin(\mathfrak{n} - \mathfrak{l}) = \frac{-\cos\eta}{\sin\zeta\sin\vartheta}$$

cos(l

$$\cos(l-m) = \frac{-\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \cos(m-n) = \frac{-\cos\eta\cos\vartheta}{\sin\eta\sin\vartheta};$$

$$\cos(n-l) = \frac{-\cos\zeta\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\vartheta};$$

pro initio $t = o$, constantes ita definiri oportet, ut si tum fuerit $ZD = \mathfrak{r}$, fiat $p = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos l$; $q = \mathfrak{r}\sin\eta\cos m$; $r = \mathfrak{r}\sin\vartheta\cos n$.

EXPLICATIO.

916. Ad constantes $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ in genere ex statu initiali modo descripto definiendas, ponamus brevitatis gratia

$$aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2 = \mathfrak{A}$$

$$bbcc\cos\zeta^2 + aacc\cos\eta^2 + aabb\cos\vartheta^2 = \mathfrak{B}$$

sitque $\frac{\mathfrak{G}u\cos\mathfrak{g}}{\delta} = X$, et $\frac{\mathfrak{H}u'\cos\mathfrak{h}}{\delta} = Y$, quo calculus facilius expediatur. Eo autem absoluto reperietur

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta\cos l + \mathfrak{r}\sin\eta\cos\eta\cos m + \mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos n$$

$$X+Y = \frac{+\frac{\mathfrak{r}\sin\zeta\cos l}{\cos\eta\cos\vartheta}(\mathfrak{B}-bbcc) + \frac{\mathfrak{r}\sin\eta\cos m}{\cos\zeta\cos\vartheta}(\mathfrak{B}-aacc) + \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta\cos n}{\cos\zeta\cos\eta}(\mathfrak{B}-aabb)}{(bb-cc)(cc-aa)(aa-bb)}$$

$$uX+u'Y = \frac{-\frac{\mathfrak{r}\sin\zeta\cos l}{\cos\eta\cos\vartheta}(\mathfrak{A}-aa) - \frac{\mathfrak{r}\sin\eta\cos m}{\cos\zeta\cos\vartheta}(\mathfrak{A}-bb) - \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta\cos n}{\cos\zeta\cos\vartheta}(\mathfrak{A}-cc)}{(bb-cc)(cc-aa)(aa-bb)}$$

Ex his autem valoribus $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ est pro superioribus

$$L = \frac{\mathfrak{A}}{aabbcc} \text{ et } K = \frac{aabb + aacc + bbcc - \mathfrak{B}}{aabbcc}$$

ex quibus fit

$$u = \tfrac{1}{2}K - \surd(\tfrac{1}{4}KK - L) \text{ et } u' = \tfrac{1}{2}K + \surd(\tfrac{1}{4}KK - L)$$

ita ut sit $u + u' = K$ et $u' = \surd(KK - 4L)$.

Haec analysis in genere valet, etiamsi corpori initio motus fuerit impressus, quoniam loco angulorum δt et $\delta' t$ hic adhibuimus $\delta t + \mathfrak{g}$ et $\delta' t + \mathfrak{h}$. Simili modo, quo hic ex situ initiali constantes $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ definivimus, ex motu initio impresso, quantitates x, y, z datos obtinebunt valores, quibus si formulae coroll 1. traditae et pro δt et $\delta' t$ scribendo $\delta t + \mathfrak{g}$ et $\delta' t + \mathfrak{h}$ extensae, posito $t = o$ aequentur, determinabuntur reliquae constantes $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$: quae quidem, uti jam ante notavimus evanescunt, si motus a quiete incipiat.

SCHOLION.

917. Pro casu ergo ejusmodi corporum pro quibus est $bb = cc$, erit $u = \frac{1}{cc}$, $u' = \frac{aa \cos\zeta^2 + cc \sin\zeta^2}{aacc}$, atque $\delta = \sqrt{2fgu}$, $\delta' = \sqrt{2fgu'}$, integralia in genere ita se habebunt:

$$x = \mathfrak{E}\cos\zeta \qquad - \frac{\mathfrak{H}\delta' \sin\zeta^2 \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{aa}$$

$$y = \mathfrak{E}\cos\eta + \mathfrak{G}\delta\cos\vartheta \sin(\delta t + \mathfrak{g}) + \frac{\mathfrak{H}\delta' \cos\zeta \cos\eta \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{cc}$$

$$z = \mathfrak{E}\cos\vartheta - \mathfrak{G}\delta\cos\eta \sin(\delta t + \mathfrak{g}) + \frac{\mathfrak{H}\delta' \cos\zeta \cos\vartheta \sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{cc}$$

atque

$$p = \mathfrak{F}\cos\zeta + \mathfrak{G}\sin\zeta^2 \cos(\delta t + \mathfrak{g})$$
$$q = \mathfrak{F}\cos\eta - \mathfrak{G}\cos\zeta\cos\eta\cos(\delta t + \mathfrak{g}) + \mathfrak{H}u'\cos\vartheta\cos(\delta' t + \mathfrak{h})$$
$$r = \mathfrak{F}\cos\vartheta - \mathfrak{G}\cos\zeta\cos\vartheta\cos(\delta t + \mathfrak{g}) - \mathfrak{H}u'\cos\eta\cos(\delta' t + \mathfrak{h}).$$

Quare si initio $t = 0$ fuerit

$$p = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l};\quad q = \mathfrak{r}\sin\eta\cos\mathfrak{m};\quad r = \mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\mathfrak{n}$$

reperitur

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{r}\sin\eta\cos\vartheta\cos\mathfrak{m} - \mathfrak{r}\cos\eta\sin\vartheta\cos\mathfrak{n}}{u'\sin\zeta^2\cos\mathfrak{h}}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{r}\sin\zeta^3\cos\mathfrak{l} - \mathfrak{r}\sin\eta\cos\zeta\cos\eta\cos\mathfrak{m} - \mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\zeta\cos\vartheta\cos\mathfrak{n}}{\sin\zeta^2\cos\mathfrak{g}}$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta\cos\mathfrak{l} + \mathfrak{r}\sin\eta\cos\eta\cos\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\mathfrak{n}.$$

At datis angulis $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, simul dantur ζ, η, ϑ

$$\cos\zeta^2 = \frac{\cos(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})\cos(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})}{\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})};\quad \cos\eta^2 = \frac{\cos(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\cos(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})}{\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})};$$

$$\cos\vartheta^2 = \frac{\cos(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})\cos(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}{\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}$$

$$\sin\zeta^2 = \frac{-\cos(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}{\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})};\quad \sin\eta^2 = \frac{-\cos(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})}{\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})\sin(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})};$$

$$\sin\vartheta^2 = \frac{-\cos(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})}{\sin(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})\sin(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})}.$$

Ex his autem formulis colligitur, esse

$$\sin\zeta\cos\zeta\cos\mathfrak{l} + \sin\eta\cos\eta\cos\mathfrak{m} + \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\mathfrak{n} = 0,$$

ita

ita ut constans supra definita $\mathfrak{F}$ semper sit $= 0$. Simili vero modo est $\frac{\sin\zeta \cos l}{\cos\eta \cos\vartheta} - \frac{\sin\eta \cos m}{\cos\zeta \cos\vartheta} + \frac{\sin\vartheta \cos n}{\cos\zeta \cos\eta} = 0$
unde valores coefficientium supra definiti multo simplicius determinantur, ita ut litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ex illis prorsus elidantur. Valent haec in genere etiamsi non sit $bb = cc$.

PROBLEMA 110.

918. Si corpus basi sphaerica praeditum habeat duos axes principales pares, eique cum de situ quietis infinite parum fuerit declinatum, motus minimus quicunque fuerit impressus, definire motus continuationem.

SOLUTIO.

Sit ID axis corporis aequilibrii per centrum inertiae I et centrum basis G transiens, sitque hoc illo altius situm existente intervallo GI $= f$. Fig. 116.
Sit porro IA axis corporis singularis principalis ejusque respectu momentum inertiae $= Maa$, respectu axium omnium autem ad hunc normalium $= Mcc$, quos cum aeque pro principalibus habere liceat, sumatur alter IB in arcu DA producto, eritque alter IC, ut quadrans AC sit ad AD normalis, ideoque DC etiam quadrans ad AD normalis. Posito ergo DA $= \zeta$, erit DB $= \eta = \zeta + 90°$ et DC $= \vartheta = 90°$. Initio autem quo $t = 0$, fuerit arcus DZ $= r$, et angulus ZDA $= l$, erit ZDB $= m = l$ et ZDC $= n = l + 90°$. Ex formulis ergo praecedentibus habebimus

$$u = \frac{1}{cc};\ u' = \frac{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}{aacc};\ \delta = \frac{\sqrt{2fg}}{c};\ \delta' = \frac{\sqrt{2fg(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}}{ac}$$

tum vero ex hoc situ initiali fiet primo $\mathfrak{F} = 0$, tum vero

$$r\sin\zeta\cos l = \mathfrak{G}\sin\zeta^2\cos g;\quad \text{ergo}$$

$$r\cos\zeta\cos l = \mathfrak{G}\sin\zeta\cos\zeta\cos g;\ \mathfrak{G} = \frac{r\cos l}{\sin\zeta\cos g}$$

$$-r\sin l = \mathfrak{H}u'\sin\zeta\cos h;\ \mathfrak{H} = \frac{-r\sin l}{u'\sin\zeta\cos h}.$$

Deinde initio corpori motus sit impressus circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, existente OA $= a$, OB $= b$, OC $= c$, fierique debet

$$\varepsilon\cos a = \mathfrak{E}\cos\zeta - \frac{\mathfrak{H}\delta'\sin\zeta^2\sin h}{aa}$$

 $\varepsilon\cos b$

$$\varepsilon\cos\mathfrak{b} = -\mathfrak{E}\sin\zeta - \frac{\mathfrak{H}\delta^{\nu}\sin\zeta\cos\zeta\sin\mathfrak{h}}{cc}$$

$$\varepsilon\cos\mathfrak{c} = \mathfrak{G}\delta\sin\zeta\sin\mathfrak{g}$$

unde concludimus

$$\varepsilon(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta) = \mathfrak{E}(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)$$

et $\varepsilon(\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta) = -\mathfrak{H}\delta^{\nu}\sin\zeta\sin\mathfrak{h}\left(\frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\cos\zeta^2}{cc}\right)$.

Ergo $$\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{c}}{\delta\sin\zeta\sin\mathfrak{g}}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{-\varepsilon(\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)}{\delta^{\nu}u'\sin\zeta\sin\mathfrak{h}}$$

hinc erit $\tang\mathfrak{g} = \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{c}}{\delta\mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}}$, et $\tang\mathfrak{h} = \frac{\varepsilon(\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)}{\delta^{\nu}\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}}$

unde anguli $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}$ hincque numeri $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ innotescunt.

His definitis teneat corpus elapso tempore t situm in figura repraesentatum, sitque $ZD = \rho$, $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$: ac ponatur $\cos l = \cos\zeta + p$, $\cos m = \cos\eta + q$; $\cos n = \cos\vartheta + r$ seu $\cos m = -\sin\zeta + q$ et $\cos n = r$. Deinde gyretur nunc circa axem IO celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC existentibus arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, ac ponendo $\varepsilon\cos\alpha = x$, $\varepsilon\cos\beta = y$ et $\varepsilon\cos\gamma = z$, habebimus ex §. 917.

$$\varepsilon\cos\alpha = \frac{\varepsilon\cos\zeta(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2} + \frac{\delta^{\nu}\mathfrak{r}\sin\zeta\sin\mathfrak{l}\sin(\delta^{\nu}t + \mathfrak{h})}{aau'\cos\mathfrak{h}}$$

$$\varepsilon\cos\beta = \frac{-\varepsilon\sin\zeta(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2} + \frac{\delta^{\nu}\mathfrak{r}\cos\zeta\sin\mathfrak{l}\sin(\delta^{\nu}t + \mathfrak{h})}{aau'\cos\mathfrak{h}}$$

$$\varepsilon\cos\gamma = \frac{\delta\mathfrak{r}\cos\mathfrak{l}\sin(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$$

tum vero praeterea:

$$p = \frac{\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{l}\cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}},$$

$$q = \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta\cos\mathfrak{l}\cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$$

$$r = \frac{-\mathfrak{r}\sin\mathfrak{l}\cos(\delta^{\nu}t + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h}}.$$

Ex his si ponatur arcus $ZD = \varrho$, erit

$$\varrho = r\sqrt{\left(\frac{\cos l^2 \cos(\delta t + g)^2}{\cos g^2} + \frac{\sin l^2 \cos(\delta' t + \mathfrak{h})^2}{\cos \mathfrak{h}^2}\right)}.$$

Porro ex triangulo AZD est $\cos ADZ = \frac{\cos l - \cos\zeta \cos\varrho}{\sin\zeta \sin\varrho} = \frac{p + \frac{1}{2}\varrho\varrho\cos\zeta}{\varrho \sin\zeta}$

$= \frac{p}{\varrho \sin\zeta}$ evanescente termino $\frac{\varrho \cos\zeta}{2 \sin\zeta}$, hinc ergo erit

$$\cos ADZ = \frac{\cos l \cos(\delta t + g)}{\cos g} : \sqrt{\left(\frac{\cos l^2 \cos(\delta t + g)^2}{\cos g^2} + \frac{\sin l^2 \cos(\delta' t + \mathfrak{h})^2}{\cos \mathfrak{h}^2}\right)}$$

ideoque $\tang ADZ = \frac{\cos g \tang l \cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\cos \mathfrak{h} \cos(\delta t + g)}$.

Praeter arcum autem $DZ = \varrho$ et angulum ADZ nosse oportet angulum XZD a circulo verticali fixo ZX computatum; est vero $DZA = 180^\circ - ADZ$, seu $\tang DZA = \frac{-\cos g \cos(\delta t + \mathfrak{h})}{\cos \mathfrak{h} \cos(\delta t + g)} \tang l$, cum initio esset $DZA = 180^\circ - l$ et $\tang DZA = -\tang l$. Deinde vero posito angulo $XZA = \lambda$, est $d\lambda = \frac{-dt(y\cos\eta + z\cos\vartheta)}{\sin\zeta^2} = \frac{y\,dt}{\sin\zeta}$, hincque $\lambda =$

$$\text{Const.} - \frac{et(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2} - \frac{r\cos\zeta\sin l\cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{ccu'\sin\cos\mathfrak{h}}.$$

Quodsi ponamus initio angulum XZD evanuisse, initio fuerat $\lambda = 180^\circ - l$, sicque constans hic ingressa est:

$$\text{Const.} = 180^\circ - l + \frac{r\cos\zeta\sin l}{ccu'\sin\zeta}$$

unde habebimus:

$$\lambda = 180^\circ - l - \frac{et(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2} + \frac{r\cos\zeta\sin l}{ccu'\sin\zeta}\left(1 - \frac{\cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h}}\right)$$

hincque $XZD = \lambda - DZA$, ex quibus ad tempus t situs corporis perfecte cognoscitur, in hacque determinatione simul motus continetur.

COROLL.

COROLL. 1.

919. Si motus corpori initio impressus evanescat, est $\mathfrak{g} = 0$ et $\mathfrak{h} = 0$; hincque

$$x = s \cos\alpha = \frac{\delta'\mathfrak{r} \sin\zeta \sin\mathfrak{l} \sin\delta' t}{aau'}$$

$$y = s \cos\beta = \frac{\delta'\mathfrak{r} \cos\zeta \sin\mathfrak{l} \sin\delta' t}{ccu'}$$

$$z = s \cos\gamma = \delta\mathfrak{r} \cos\mathfrak{l} \sin\delta t$$

$$p = \mathfrak{r} \sin\zeta \cos\mathfrak{l} \cos\delta t;\ q = \mathfrak{r} \cos\zeta \cos\mathfrak{l} \cos\delta t;\ r = -\mathfrak{r} \sin\mathfrak{l} \cos\delta' t$$

$$\operatorname{tang} ADZ = \operatorname{tang}(180^\circ - DZA) = \frac{\cos\delta' t}{\cos\delta t} \operatorname{tang}\mathfrak{l}, \text{ et } \lambda = 180^\circ - \mathfrak{l}$$

$$+ \frac{\mathfrak{r} \cos\zeta \sin\mathfrak{l}}{ccu' \sin\zeta} (1 - \cos\delta' t).$$

COROLL. 2.

920. Sin autem corpori initio motus fuerit impressus celeritate angulari ε, haec non multo major esse debet quam $\mathfrak{r}$. Si enim $\frac{\varepsilon}{c}$ esset numerus praemagnus, anguli $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ prodirent fere recti, eorumque cosinus fere evanescentes, sicque numeri p, q, r nimis fierent magni, quam ut tanquam valde parvae, uti natura solutionis exigit, considerari possent. Namque arcus $ZD = \varrho$ semper minimus esse debet.

COROLL. 3.

921. Cum sit $s = \surd(xx + yy + zz)$, nisi ternae quantitates x, y, z seorsim evanescant, fieri nequit, ut corpus unquam ad quietem redigatur. Atque etiamsi corpus a quiete moveri inceperit, tamen fieri potest, ut corpus deinceps nunquam ad quietem revertatur, hocque adeo semper eveniet, nisi fuerit vel $\sin\mathfrak{l} = 0$ vel $\cos\mathfrak{l} = 0$; quin etiam tum axis corporis naturalis DF nunquam in situm verticalem perveniet.

COROLL. 4.

922. Cum sit $\mathfrak{r}$ quantitas valde exigua, si corpus initio nullum motum acceperit, ut sit $\varepsilon = 0$, erit satis exacte $\lambda = 180 - \mathfrak{l}$; scilicet angulus XZA manebit constans, motusque axis IA ita comparatus, ut in arcu ZA modo ad punctum verticale Z propius accedat modo ab eo longius recedat, erit autem $AZ = \zeta - \mathfrak{r} \cos\mathfrak{l} \cos\delta t$, et ang. $ZAD = \frac{\mathfrak{r} \sin\mathfrak{l} \cos\delta' t}{\sin\zeta}$.

COROLL.

COROLL. 5.

923. In genere autem quicunque motus corpori initio fuerit impressus, erit $XZA = \lambda = 180^\circ - \mathfrak{l} - \frac{\varepsilon t\,(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - ac\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$ sicque arcus ZA uniformiter circa punctum verticale Z circumferetur: deinde vero cum sit $\sin AD : \sin DZA = ZD\ (\varrho) : ZAD$, erit $ZAD = \frac{r\sin\mathfrak{l}\cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\sin\zeta\cos\mathfrak{h}}$ atque arcus $ZA = \zeta - \frac{r\cos\mathfrak{l}\cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$. Seu pro $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ substituendis valoribus:

angulus $ZAD = \frac{r\sin\mathfrak{l}\cos\delta' t}{\sin\zeta} - \frac{\varepsilon(\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)\sin\delta' t}{\delta'\sin\zeta}$

et arcus $ZA = \zeta - r\cos\mathfrak{l}\cos\delta t + \frac{\varepsilon\cos\mathfrak{c}\sin\delta t}{\delta^2}$.

SCHOLION. 1.

924. Hae tres postremae formulae, angulos XZA, ZAD cum arcu ZA exhibentes, totam problematis solutionem complectuntur. Quodsi enim has res ad quodvis tempus assignare possimus, situm corporis perfecte cognoscimus. Quare si pro δ et δ' valores supra inventos substituamus, universa problematis solutio his formulis continebitur:

$$\text{ang. } XZA = 180^\circ - \mathfrak{l} - \frac{\varepsilon t\,(aa\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$$

$$\text{arc. } ZA = \zeta - r\cos\mathfrak{l}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c} + \frac{\varepsilon c\cos\mathfrak{c}}{\sqrt{2fg}}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

$$\text{ang. } ZAD = \frac{r\sin\mathfrak{l}}{\sin\zeta}\cos\frac{t\sqrt{2fg}\,(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}{ac}$$
$$- \frac{\varepsilon ac(\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)}{\sin\zeta\sqrt{2fg}(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}\sin\frac{t\sqrt{2fg}(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}{ac}.$$

Quodsi ergo omnia momenta inertiae fuerint aequalia, scilicet $aa = cc$, erit ang. $XZA = 180^\circ - \mathfrak{l} - \varepsilon t(\cos\mathfrak{a}\cos\zeta - \cos\mathfrak{b}\sin\zeta)$

$$\text{arc. } ZA = \zeta - r\cos\mathfrak{l}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c} + \frac{\varepsilon c\cos\mathfrak{c}}{\sqrt{2fg}}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

$$\text{ang. } ZAD = \frac{r\sin\mathfrak{l}}{\sin\zeta}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c} - \frac{\varepsilon c(\cos\mathfrak{a}\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)}{\sin\zeta\sqrt{2fg}}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

quo casu positio puncti A est plane arbitraria.

SCHOLION. 2.

925. Argumentum, quod in hoc capite potissimum evolvendum suscepimus, motum scilicet titubatorium corporum basi sphaerica praeditorum, perfecte pertractavimus, dummodo titubationes fuerint quam minimae, quae hypothesis etiam in doctrina oscillationum statui solet: formulae enim §. 912. et seqq. exhibitae perfectam continent hujus quaestionis solutionem, si quidem ibi anguli ∂t et $\partial' t$ constantibus g et h augeantur. Constantes autem ex statu initiali definire docuimus in §. 916. quae operatio vehementer sublevatur annotatione sub finem §. 917. adjuncta; quare ad motum corporum cylindricorum explicandum progrediamur.

CAPUT XIX.

DE MOTU CORPORUM CYLINDRICORUM SUPER PLANO HORIZONTALI.

THEOREMA 11.

926. **D**um corpus cylindricum plano horizontali movetur, pressio, qua plano innititur, est verticalis, et per centrum cujusdam sectionis cylindri ad longitudinem normaliter factae transit.

DEMONSTRATIO.

Corpus cylindricum plano horizontali incumbit secundum lineam rectam axi cylindri parallelam, in qua vires existunt cylindrum sustentantes, fierique potest ut hae vires per totam illam rectam sint dispersae. Cum autem istae vires omnes sint ad planum horizontale normales, ideoque verticales, ac parallelae inter se, una dabitur vis iis omnibus aequivalens: cujus ergo directio pariter erit verticalis, certoque rectae contactus puncto insistet. Quodsi igitur in hoc puncto cylindrus ad longitudinem normaliter secetur, sectio erit circulus, et vis omnibus pressionibus aequivalens, quia est in hac sectione ad punctum contactus verticalis per ejus centrum transibit. Nisi ergo haec sectio transeat per centrum inertiae corporis, directio media pressionis non in sectione per centrum inertiae ad longitudinem normaliter facta versabitur.

EXPLI-

EXPLICATIO.

927. Corpora igitur hic consideramus cylindrica, in quibus primo notetur eorum axis quasi geometricus, ad quem omnes sectiones normaliter factae, sint circuli aequales, ita ut corpus sit cylindrus rectus, cujus motus, dum plano horizontali perpetuo incumbit, sumus exploraturi. Si centrum inertiae in ipso axe geometrico esset, in omni situ cylindrus aequilibrium teneret: sin autem secus, consideretur sectio cylindri ad axem normalis per centrum inertiae I facta, cujus centrum sit in G, atque ad statum aequilibrii requiritur, ut recta GI sit verticalis, ex quo duplex datur aequilibrii situs, alter quo centrum inertiae I infra G alter quo supra G versatur, quorum ille *stabilis*, hic *labilis* vocetur. In omni autem cylindri situ axis geometricus est horizontalis, rectae contactus verticaliter imminens. Deinde ternos axes mechanicos cylindri nosse oportet, qui si qualemcunque materiae distributionem admittimus, utcunque ab axe geometrico seu secundum longitudinem ducto differre possunt, a quorum positione motus determinatio potissimum pendet. Per centrum inertiae I etiam ducta concipiatur recta axi geometrico parallela, quae plerumque axis principalis esse solet, et semper manet horizontalis. His igitur notatis, quomodocunque cylindrus plano horizontali incumbat, in sectione LMFN per centrum inertiae I facta notetur punctum T, ubi hic circulus planum horizontale tangit, deinde etiam illa sectio huic parallela probe notetur, in qua media directio pressionum versatur, quae rectae TG erit parallela; ac tam quam quantitas pressionis, quam distantia sectionis, in qua versatur, a sectione per centrum inertiae facta, erit incognita, demum ex motu deinceps determinanda: siquidem hac vi effici debet, ut axis cylindri longitudinalis perpetuo manet horizontalis, et cylindrus plano horizontali incumbat. Fig. 117.

SCHOLION.

928. In his motibus investigandis non opus est, ut totum corpus in figuram cylindri sit efformatum, sed sufficit, si in locis, quibus plano horizontali incumbit, talem habuerit formam. Huc ergo pertinent motus omnium eorum corporum, quae in terminos cylindricos desinunt, quibus tantum planis horizontalibus aeque elevatis utrinque incumbant, dum intra eos moles corporis utcunque fuerit extensa, quemadmodum evenit in cunis, quae motu vacillatorio super terminis, quos tanquam circulos spectare licet, agitantur: deinde etiam huc referendus est motus pendulorum, quae non circa axem linearem, uti supra assumsimus, sed materialem utrinque in cylindrum abeuntem oscillantur, dum his binis cylindris planis horizon-

rizontalibus incumbunt, intra quae massa penduli dependet. Etsi igitur his casibus sectiones mediae non sunt circuli, tamen binas illas sectiones, in quarum altera centrum inertiae versatur, in altera vero vis pressionis, tanquam circulos spectare licet, quoniam figura eatenus tantum in censum venit, quatenus corpus plano horizontali incumbit. Tum vero etiam nisi hujusmodi corpora integras circumvolutiones peragant, ne opus quidem est, ut toti termini sint cylindrici, sed sufficit, si eorum portio, qua fit contactus, talem habeat figuram, cujus axem longitudinalem per totum corpus extensum probe notasse convenit. Quocirca haec tractatio ad plurimos casus extenditur, de quo motu primum tenendum, centrum inertiae a viribus sollicitantibus alium motum nisi in eadem recta verticali recipere non posse; ita ut nullum consequatur motum horizontalem, nisi extrinsecus talem acceperit, quem autem deinceps uniformiter esset prosecuturum, in quo cum nulla insit difficultas, ad eum hic non attendimus.

PROBLEMA. 111.

929. Si corpus cylindricum super plano horizontali moveatur, detur que pressio, qua plano initur, definire motum progressivum, quo centrum inertiae corporis incedet.

SOLUTIO.

Fig. 118. Ad axem cylindri fiat sectio normalis per centrum inertiae I, quae sive corpus sit cylindrus continuus, sive tantum terminis cylindricis sit praeditum, spectetur tanquam circulus LMFN basibus aequalis, cujus centrum sit in G, centrum autem inertiae corporis in I, existente intervallo $GI = f$, ita ut in statu quietis recta LIGF teneat situm verticalem, in quo centrum inertiae I supra centrum circuli G in figura repraesentatur, quod si fuerit profundius, intervallum $GI = f$ negative est capiendum. Nunc autem contactus respondeat puncto T, ita ut recta ad planum circuli in T normalis sit linea contactus in planum horizontale Hh cadens. Ducta igitur per centrum circuli recta ΠGT ad contactum T, parallela erit directioni pressionis, qua corpus a plano horizontali repellitur, quae vis, in quacunque alia sectione versetur, ponatur $= \Pi$, quam tanquam cognitam spectamus. Sit porro pondus cylindri $= M$, radius circuli GF $= GT = e$, et angulus declinationis $\Pi GL = \rho$; erit elevatio centri inertiae I supra horizontem $IP = e + f\cos\rho$, quae ponatur $= v$. Quoniam igitur in motum progressivum inquirimus, et gravitas deorsum urget secundum IP vi $= M$, pressionis vis Π ipsi centro inertiae I sursum secundum IV applicata concipiatur, ita ut jam tota vis deorsum sollicitans sit

$= M$

$= M - \Pi$, et massa movenda $= M$: unde ex principiis motus habetur $ddv = \frac{-2g(M - \Pi)}{M} dt^2$, hincque $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{ddv}{2g dt^2}$ seu $\Pi = M\left(1 + \frac{f dd . \cos\varrho}{2g dt^2}\right)$, qua aequatione angulus $\Pi GL = \varrho$, ex eoque elevatio centri inertiae $IP = e + f \cos\varrho$ innotescit: ac nisi corpori motus horizontalis fuerit impressus, punctum I in recta PIV agitaretur, in ea vel ascendens vel descendens, ita ut punctum P maneret fixum, ex quo punctum contactus T definitur, quia est $PT = f \sin\varrho$. Sin autem corpus acceperit motum horizontalem, eum constanter servaret uniformem in directum, motusque puncti I ex hoc aequabili rectilineo horizontali et illo verticali foret compositus.

SCHOLION.

930. Praeterea autem in hoc corpore motus gyratorius generari potest, ita tamen ut tam punctum G quam recta ad circulum LMFN in G normalis, quae est axis proprius cylindri, perpetuo maneat in eodem plano horizontali. Ad hunc motum gyratorium investigandum, seposito motu progressivo centrum inertiae I tanquam in quiete spectabimus, circa quod sphaera descripta, in ea circulus LMFN perpetuo erit verticalis, ad quem si recta normalis per I ducatur, erit ea axis cylindri longitudinalis. Qua conditione observata, omnes motus gyratorii, quorum cylindrus est capax, facile in figura repraesentari possunt. Hic autem ante omnia ad situm axium principalium probe attendi oportet, quorum respectu momenta ex vi pressionis nata sunt definienda.

PROBLEMA 112.

931. Si corpus cylindricum plano horizontali incumbens habeat situm quemcunque, deturque tam pressio Π quam sectio cylindri transversa, in qua versatur, invenire ejus momenta respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Sectio cylindri per centrum inertiae I ad longitudinem normaliter facta cadat in planum tabulae, in qua recta IZ sit normalis, et recta LIG per centrum hujus sectionis G transeat, ita ut sit intervallum $IG = f$, et angulus $ZIL = \varrho$. Ex G erigatur ad planum tabulae normalis GH usque ad sectionem, in qua vis pressionis Π versatur, sitque intervallum GH Fig. 119.

 $= h$,

$= h$, ac supra vidimus esse $\Pi = M\left(1 + \frac{fdd \,.\, \cos\rho}{2gdt^2}\right)$ cujus vis directio erit $H\Pi$ verticalis ideoque parallela ipsi IZ. Iam radio arbitrario $= 1$, circa centrum inertiae I sphaera concipiatur descripta, ad cujus superficiei puncta A, B, C axes corporis principales dirigantur, vocenturque arcus pro horum punctorum determinatione $LA = \zeta$, $LB = \eta$, $LC = \vartheta$; item $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$ existente $ZL = \rho$; tum vero anguli $ZLA = \mathfrak{f}$, $ZLB = \mathfrak{g}$, $ZLC = \mathfrak{h}$, ut sit

$$\cos l = \cos\zeta\cos\rho + \cos\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\rho;\ \cos m = \cos\eta\cos\rho + \cos\mathfrak{g}\sin\eta\sin\rho;$$
$$\cos n = \cos\vartheta\cos\rho + \cos\mathfrak{h}\sin\vartheta\sin\rho.$$

Ac primo quidem vis $H\Pi = \Pi$ resolvatur secundum directiones axibus principalibus parallelas, quae resolutio perinde instituitur, ac si vis haec in centro I secundum directionem IZ esset applicata: inde autem nascitur vis sec. $IA = \Pi\cos l$; vis sec. $IB = \Pi\cos m$; vis sec. $IC = \Pi\cos n$, quae autem vires jam in puncto H applicatae sunt intelligendae. Ducatur recta IH quae erit $= \sqrt{(ff + hh)}$, secans sphaeram in F, erit $\tang GIH = \frac{h}{f}$, et arcus LF cum arcu ZL faciet angulum ZLF rectum. Ponatur arcus $LF = e$, erit $h = -f\tang e$ et $IH = \frac{-f}{\cos e}$, ita ut loco intervalli $GH = h$ commode arcum $LF = e$ in calculo retineamus. Nunc autem investigari oportet, quomodo recta IF ad axes principales inclinetur, quae inclinatio per arcus FA, FB et FC definitur. Reperitur autem

$$\cos AF = \cos\zeta\cos e + \sin\mathfrak{f}\sin\zeta\sin e$$
$$\cos BF = \cos\eta\cos e + \sin\mathfrak{g}\sin\eta\sin e$$
$$\cos CF = \cos\vartheta\cos e + \sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\sin e.$$

Fig. 120. Repraesentent jam rectae inter se normales IA, IB, IC axes principales corporis, inter quos existat recta $IH = \frac{-f}{\cos e}$ eruntque coordinatae pro puncto H axibus parallelae

$$IN = IH\cos AF;\ NM = IH\cos BF;\ MH = IH\cos CF$$

et vires in H applicatae axibusque parallelae erunt

$$\text{vis } Ha = \Pi\cos l;\ \text{vis } Hb = \Pi\cos m;\ \text{vis } Hc = \Pi\cos n,$$

unde respectu axium principalium nascuntur momenta:

$$\text{Mom. respectu axis IA in sensum BC} = \Pi \,.\, IH(\cos n\cos BF - \cos m\cos CF)$$

Mom.

Mom. respectu axis IB in sensum CA $= \Pi \,.\, IH\,(\cos l \cos CF -$
$\cos n \cos AF)$

Mom. respectu axis IC in sensum AB $= \Pi \,.\, IH\,(\cos m \cos AF -$
$\cos l \cos BF)$.

Quae momenta cum supra litteris P, Q, R indicaverimus, si valores supra exhibitos substituamus, obtinebimus:

$$P = \frac{-\Pi f}{\cos e}\left(\begin{array}{l}\sin e \cos \varrho (\sin \mathfrak{g} \sin \eta \cos \vartheta - \sin \mathfrak{h} \cos \eta \sin \vartheta) + \cos e \sin \varrho (\cos \mathfrak{h} \cos \eta \sin \vartheta - \cos \mathfrak{g} \sin \eta \cos \vartheta) \\ \qquad + \sin \eta \sin \vartheta \sin e \sin \varrho (\sin \mathfrak{g} \cos \mathfrak{h} - \cos \mathfrak{g} \sin \mathfrak{h})\end{array}\right)$$

At est $\sin \mathfrak{g} \cos \mathfrak{h} - \cos \mathfrak{g} \sin \mathfrak{h} = \sin (\mathfrak{g} - \mathfrak{h}) = \dfrac{-\cos \zeta}{\sin \eta \sin \vartheta}$, tum vero

$$\sin \mathfrak{g} \sin \eta \cos \vartheta - \sin \mathfrak{h} \cos \eta \sin \vartheta = \cos \mathfrak{f} \sin \zeta$$
$$\cos \mathfrak{h} \cos \eta \sin \vartheta - \cos \mathfrak{g} \sin \eta \cos \vartheta = \sin \mathfrak{f} \sin \zeta$$

ita ut tam pro P quam pro Q et R ex analogia habeamus

$$P = \frac{-\Pi f}{\cos e}(\cos \mathfrak{f} \sin \zeta \sin e \cos \varrho + \sin \mathfrak{f} \sin \zeta \cos e \sin \varrho - \cos \zeta \sin e \sin \varrho)$$

$$Q = \frac{-\Pi f}{\cos e}(\cos \mathfrak{g} \sin \eta \sin e \cos \varrho + \sin \mathfrak{g} \sin \eta \cos e \sin \varrho - \cos \eta \sin e \sin \varrho)$$

$$R = \frac{-\Pi f}{\cos e}(\cos \mathfrak{h} \sin \vartheta \sin e \cos \varrho + \sin \mathfrak{h} \sin \vartheta \cos e \sin \varrho - \cos \vartheta \sin e \sin \varrho).$$

COROLL. 1.

932. Cum sit $-f \tan e = h$, et h denotet intervallum GH, quo sectio, in quam cadit pressio, antrorsum distat a sectione, in qua est centrum inertiae, erit

$$P = -\Pi f \sin \mathfrak{f} \sin \zeta \sin \varrho + \Pi h (\cos \mathfrak{f} \sin \zeta \cos \varrho - \cos \zeta \sin \varrho)$$
$$Q = -\Pi f \sin \mathfrak{g} \sin \eta \sin \varrho + \Pi h (\cos \mathfrak{g} \sin \eta \cos \varrho - \cos \eta \sin \varrho)$$
$$R = -\Pi f \sin \mathfrak{h} \sin \vartheta \sin \varrho + \Pi h (\cos \mathfrak{h} \sin \vartheta \cos \varrho - \cos \vartheta \sin \varrho).$$

COROLL. 2.

933. Dum ergo motus corporis determinatur, non solum quantitatem pressionis Π sed etiam intervallum GH $= h$ definiri oportet, ut habeatur locus, ubi media directio pressionum est applicata.

EXPLICATIO.

934. Relatio inter arcus ζ, η, ϑ et angulos $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ insignes suppeditat proprietates, inter quas substitutiones in solutione abitae continentur. Primo enim pro illorum angulorum differentiis invenimus

cos(f

$$\cos(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = \frac{-\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \cos(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = \frac{-\cos\eta\cos\vartheta}{\sin\eta\sin\vartheta};$$

$$\cos(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = \frac{-\cos\zeta\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\vartheta}$$

$$\sin(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = \frac{-\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \sin(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = \frac{-\cos\zeta}{\sin\eta\sin\vartheta};$$

$$\sin(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = \frac{-\cos\eta}{\sin\zeta\sin\vartheta}.$$

Hinc jam anguli $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ ad angulum $\mathfrak{f}$ reduci possunt, ob $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} - (\mathfrak{f}-\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{f} + (\mathfrak{h}-\mathfrak{f})$, unde colligitur

$$\sin\mathfrak{g} = \frac{-\sin\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\eta + \cos\mathfrak{f}\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \sin\mathfrak{h} = \frac{-\sin\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\vartheta - \cos\mathfrak{f}\cos\eta}{\sin\zeta\sin\vartheta}.$$

$$\cos\mathfrak{g} = \frac{-\cos\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{f}\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \cos\mathfrak{h} = \frac{-\cos\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\vartheta + \sin\mathfrak{f}\cos\eta}{\sin\zeta\sin\vartheta}.$$

Quodsi binis conjungendis vel $\cos\mathfrak{f}$ vel $\sin\mathfrak{f}$ elidatur, obtinentur sequentes formulae:

I. $\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + \sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$

II. $\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + \cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + \cos\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$

III. $\sin\mathfrak{f}\sin\zeta = -\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\vartheta + \cos\mathfrak{h}\cos\eta\sin\vartheta$

IV. $\sin\mathfrak{g}\sin\eta = -\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\zeta + \cos\mathfrak{f}\cos\vartheta\sin\zeta$

V. $\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta = -\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta + \cos\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta$

VI. $\cos\mathfrak{f}\sin\zeta = \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\vartheta - \sin\mathfrak{h}\cos\eta\sin\vartheta$

VII. $\cos\mathfrak{g}\sin\eta = \sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\zeta - \sin\mathfrak{f}\cos\vartheta\sin\zeta$

VIII. $\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = \sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta$

IX. $\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2 + \sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + \sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta^2 = 0$

X. $\sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + \sin\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + \sin\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 = 1$

XI. $\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + \cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + \cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 = 1$:

quarum ope aequationes, ad quas motus determinatio perducitur, simpliciores reddi possunt.

PROBLEMA. 113.

Fig. 121. 935. Si corpus cylindricum quodcunque super plano horizontali moveatur utcunque, aequationes exhibere, quibus ad quodvis tempus ejus situs et motus gyratorius determinetur.

SOLU-

SOLUTIO.

Manentibus denominationibus in praecedente problemate factis, consideretur centrum inertiae I ut quiescens, circa quod descripta sit sphaera, cujus punctum verticale Z, et circulus verticalis fixus ZDX, in quo recta centralis IL initio situm ID tenuerit. Elapso autem tempore t ea pervenerit in L, ac ponatur arcus ZL $= \varrho$ et angulus XZL $= \phi$, atque hinc situs axium principalium, quorum poli sint A, B, C ita definitur, ut sint arcus LA $= \zeta$, LB $= \eta$, LC $= \vartheta$, et anguli ZLA $= \mathfrak{f}$, ZLB $= \mathfrak{g}$, ZLC $= \mathfrak{h}$, qui sunt quantitates constantes, ex quibus cum arcu variabili ZL $= \varrho$, ita definiuntur arcus ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$ ut sit:

$$\cos l = \cos\zeta \cos\varrho + \cos\mathfrak{f} \sin\zeta \sin\varrho;\ \cos m = \cos\eta \cos\varrho \pm \cos\mathfrak{g} \sin\eta \sin\varrho;\ \cos n = \cos\vartheta \cos\varrho + \cos\mathfrak{h} \sin\vartheta \sin\varrho.$$

Quodsi jam momenta inertiae corporis respectu axium principalium IA, IB, IC sint Maa, Mbb, Mcc existente M massa corporis, Π autem sit pressio, et sectio in qua ea versatur ab I antrorsum distet intervallo $= s$, quod quia est variabile, in superioribus formulis loco h scribi debet s. Gyretur nunc corpus circa polum O celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, positisque arcubus OA $= \alpha$, OB $= \beta$, OC $= \gamma$ sit $\varepsilon \cos\alpha = x$, $\varepsilon \cos\beta = y$, $\varepsilon \cos\gamma = z$, ac primo habemus $\Pi = M\left(1 + \frac{fdd \,.\, \cos\varrho}{2gdt^2}\right)$, tum vero has tres aequationes

$$aadx + (cc - bb)\, yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}\, dt \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \sin\varrho + \frac{2\Pi gs}{M}\, dt\, (\cos\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\varrho - \cos\zeta \sin\varrho)$$

$$bbdy + (aa - cc)\, xzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}\, dt \sin\mathfrak{g} \sin\eta \sin\varrho + \frac{2\Pi gs}{M}\, dt\, (\cos\mathfrak{g} \sin\eta \cos\varrho - \cos\eta \sin\varrho)$$

$$ccdz + (bb - aa)\, xydt = \frac{-2\Pi fg}{M}\, dt \sin\mathfrak{h} \sin\vartheta \sin\varrho + \frac{2\Pi gs}{M}\, dt\, (\cos\mathfrak{h} \sin\vartheta \cos\varrho - \cos\vartheta \sin\varrho).$$

Praeterea habemus has tres aequationes

$$dl \sin l = dt\, (y \cos n - z \cos m) = d\varrho\, (\cos\zeta \sin\varrho - \cos\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\varrho)$$
$$dm \sin m = dt\, (z \cos l - x \cos n) = d\varrho\, (\cos\eta \sin\varrho - \cos\mathfrak{g} \sin\eta \cos\varrho)$$
$$dn \sin n = dt\, (x \cos m - y \cos l) = d\varrho\, (\cos\vartheta \sin\varrho - \cos\mathfrak{h} \sin\vartheta \cos\varrho)$$

quarum autem binas tantum sumsisse sufficit, ita ut supersint sex aequationes, ex quibus variabiles totidem x, y, z, Π, s et ϱ ad datum tempus

 t de-

t determinari oporteat. Denique vero positis angulis $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$, fit $d\lambda \sin l^2 = - dt\,(y \cos m + z \cos n)$ quam unam resolvisse sufficit. At cum sit $LZA = \lambda - \phi$, erit $\cos(\lambda - \phi) = \frac{\cos\zeta - \cos l \cos\varrho}{\sin l \sin\varrho}$ et $\sin(\lambda - \phi) = \frac{\sin f \sin\zeta}{\sin l}$, unde $(d\lambda - d\phi)\cos(\lambda - \phi) = \frac{-dl \sin f \sin\zeta \cos l}{\sin l^2} = \frac{(d\lambda - d\phi)(\cos\zeta - \cos l \cos\varrho)}{\sin l \sin\varrho}$, ideoque

$$d\phi = \frac{-dt\,(y \cos m + z \cos n)}{\sin l^2} + \frac{dl \sin f \sin\zeta \cos l \sin\varrho}{\sin l\,(\cos\zeta - \cos l \cos\varrho)},$$

hincque etiam ad datum tempus angulus ϕ definitur: ex quibus rebus motus corporis perfecte cognoscitur.

C O R O L L. 1.

936. Cum sit $\cos\zeta - \cos l \cos\varrho = \sin\varrho\,(\cos\zeta \sin\varrho - \cos f \sin\zeta \cos\varrho) = \frac{dl \sin l \sin\varrho}{d\varrho}$ erit $d\phi = \frac{-dt\,(y \cos m + z \cos n)}{\sin l^2} + \frac{d\varrho \sin f \sin\zeta \cos l}{\sin l^2}$, hincque

$$d\phi \sin l^2 = - dt\,(y \cos m + z \cos n) + d\varrho \cos\varrho \sin f \sin\zeta \cos\zeta + a\varrho \sin\varrho \sin f \cos f \sin\zeta^2.$$

Similes autem expressiones pro $d\phi \sin m^2$ et $d\phi \sin n^2$ reperiuntur, quae in unam summam collectae, ob $\sin l^2 + \sin m^2 + \sin n^2 = 2$, dabunt

$$d\phi = - dt\,(x \cos l + y \cos m + z \cos n) \text{ per n}^\circ \text{ 1 et IX. §. 934.}$$

ubi $x \cos l + y \cos m + z \cos n$ denotat cosinum arcus ZO per s multiplicatum.

C O R O L L. 2.

937. Ex aequationibus pro $dl \sin l$, $dm \sin m$, $dn \sin n$ inventis colligimus, $dl \sin l \cos\zeta + dm \sin m \cos\eta + dn \sin n \cos\vartheta = d\varrho \sin\varrho$ ac valoribus per dt substitutis, impetrabimus,

$$d\varrho = - dt\,(x \sin f \sin\zeta + y \sin g \sin\eta + z \sin h \sin\vartheta)$$

ope reductionum supra traditarum.

C O R O L L. 3.

938. Ex tribus autem prioribus aequationibus deducimus, ob $xdl \sin l + ydm \sin m + zdn \sin n = 0$, hanc aequationem

$$aaxdx + bbydy + cczdz = \frac{-2\Pi fg}{M}\, dt \sin\varrho\,(x \sin f \sin\zeta + y \sin g \sin\eta + z$$

$\sin h$

$\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta) = \frac{2\Pi fg}{M}\,d\varrho\sin\varrho = -2fgd\,.\cos\varrho\left(1+\frac{fdd\,.\cos\varrho}{2gdt^2}\right),$

cujus ergo integrale est

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 4fg\cos\varrho - \frac{ffd\varrho^2\sin\varrho^2}{dt^2},$$

SCHOLION.

939. Si in sphaera nostra dicatur circulus maximus horizontalis YMX, in eo perpetuo axis cylindri longitudinalis reperiatur necesse est. Pertingat ejus terminus anterior in M, et quia tam ML quam MZ sunt quadrantes, erunt anguli MZL et MLZ recti, ideoque angulus ZML $= \varrho$ et arcus XM = angulo XZM $= 90° + \phi$. Tum vero quia punctum M aliter nisi in circulo XY moveri nequit, polus gyrationis O necessario in quadrante ZM situs sit necesse est. Hinc si arcus OM ponatur $= \omega$, ob celeritatem angularem $= \varepsilon$ in sensum ABC tendentem, punctum M tempusculo dt regreditur versus X per arculum $= \varepsilon dt\sin\omega$: est vero $\sin\omega = \cos OZ = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$, ideoque $\varepsilon\sin\omega = x\cos l + y\cos m + z\cos n$, ita ut sit $-d\phi = dt\,(x\cos l + y\cos m + z\cos n)$ uti in coroll. 1. invenimus. Deinde cum in triangulo OZL sit ZO $= 90° - \omega$, ZL $= \varrho$ Fig. 122. et OZL $= 90°$, erit arcus $\cos OL = \sin\omega\cos\varrho$, $\sin OLZ = \frac{\cos\omega}{\sin OL}$ et $\cos OLZ = \frac{\sin\omega\sin\varrho}{\sin OL}$ ob $\cot OLZ = \frac{\sin\varrho\sin\omega}{\cos\omega}$. Quare si tempusculo dt punctum L circa O gyretur in l, erit $Ll = \varepsilon dt\sin OL$, et angulus OL$l$ rectus; hinc ducto circulo $l\lambda$ ad Zl perpendiculari fiet $L\lambda = Ll\cos ZLl = Ll\sin OLZ = \varepsilon dt\cos\omega$, at est $L\lambda = -d\varrho$ ideoque $d\varrho = -\varepsilon dt\cos\omega$. Quae formula comparata cum ea, quam §. 937. invenimus, dat

$$\varepsilon\cos\omega = x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta$$

et est $xx + yy + zz = \varepsilon\varepsilon = (x\cos l + y\cos m + z\cos n)^2 + (x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta)^2$ quae aequalitas per aequationem $xdl\sin l + ydm\sin m + zdn\sin n = 0$ confirmatur. Verum ne multitudine litterarum obruamur, evolvamus casum, quo axis cylindri longitudinalis simul est axis principalis.

PROBLEMA 114.

940. Si corporis cylindrici axis longitudinalis per ejus centrum inertiae ductus simul fuerit axis principalis, idque super plano horizontali utcunque moveatur, definire ejus motum. Fig. 123.

SOLUTIO.

Cum puncta A et M in unum incidant, bini reliqui poli principales B et C in circulo verticali ZL existent, eritque propterea: $LA = \zeta = 90°$; $LB = \eta$; $LC = \vartheta = 90° - \eta$: $ZLA = \mathfrak{f} = 90°$, $ZLB = \mathfrak{g} = 180°$; $ZLC = \mathfrak{h} = 0$; hincque $ZA = l = 90$; $ZB = m = \eta + \varrho$ et $ZC = n = \varrho - \vartheta = \eta + \varrho - 90°$. Quibus valoribus substitutis, habebimus istas aequationes: $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd \,.\, \cos\varrho}{2gdt^2}$

$$aadx + (cc - bb)\, yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}\, dt \sin\varrho$$

$$bbdy + (aa - cc)\, xzdt = \frac{-2\Pi gs}{M}\, dt \sin(\eta + \varrho)$$

$$ccdz + (bb - aa)\, xydt = \frac{2\Pi gs}{M}\, dt \cos(\eta + \varrho)$$

$$y \sin(\eta + \varrho) - z\cos(\eta + \varrho) = 0$$

$$- xdt \sin(\eta + \varrho) = d\varrho \sin(\eta + \varrho) \text{ seu } d\varrho = - xdt$$

$$\text{et } d\varphi = - dt\, (y\cos(\eta + \varrho) + z \sin(\eta + \varrho)).$$

Ponatur $y = u\cos(\eta + \varrho)$ et $z = u\sin(\eta + \varrho)$, ac pro dt scribatur $- \frac{d\varrho}{x}$, seu $x = \frac{-d\varrho}{dt}$, quo facto nostrae aequationes erunt

$$\text{I. } \frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd \,.\, \cos\varrho}{2gdt^2}$$

$$\text{II. } - aadd\varrho + \tfrac{1}{2}(cc - bb)\, uudt^2 \sin 2(\eta + \varrho) + \frac{2\Pi}{M} fgdt^2 \sin\varrho = 0$$

$$\text{III. } bbdu \cos(\eta + \varrho) - (aa + bb - cc)\, ud\varrho \sin(\eta + \varrho) = \frac{-2\Pi}{M} gsdt \sin(\eta + \varrho)$$

$$\text{IV. } ccdu \sin(\eta + \varrho) + (aa - bb + cc)\, ud\varrho \cos(\eta + \varrho) = \frac{2\Pi}{M} gsdt \cos(\eta + \varrho)$$

$$\text{et V. } d\varphi = - udt.$$

Ex tertia et quarta eliminando s nanciscimur,

$$bbdu \cos(\eta + \varrho)^2 + ccdu \sin(\eta + \varrho)^2 - 2\,(bb - cc)\, ud\varrho \sin(\eta + \varrho) \cos(\eta + \varrho) = 0$$

cujus

cujus integrale est

$$u = \frac{C}{bb + cc + (bb - cc)\cos(2\eta + 2\varrho)}$$

qui valor in II substitutus praebet

$$-2aadd\varrho + \frac{CC(cc - bb)\,dt^2 \sin^2(\eta+\varrho)}{(bb + cc + (bb - cc)\cos 2(\eta+\varrho))^2} + dt^2 \sin\varrho \left(4fg + \frac{2ffdd.\cos\varrho}{dt^2}\right) = 0$$

quae aequatio per $d\varrho$ multiplicata et integrata dat,

$$-aad\varrho^2 - \frac{\frac{1}{2}CCdt^2}{bb + cc + (bb - cc)\cos 2(\eta + \varrho)} - 4fgdt^2 \cos\varrho - ffd\varrho^2 \sin\varrho^2 + Ddt^2 = 0$$

seu $d\varrho^2(aa + ff\sin\varrho^2) = dt^2\left(D - 4fg\cos\varrho - \frac{\frac{1}{2}CC}{bb+cc+(bb-cc)\cos 2(\eta+\varrho)}\right)$

unde fit

$$dt = \frac{d\varrho\sqrt{(aa+ff\sin\varrho^2)(bb+cc+(bb-cc)\cos 2(\eta+\varrho))}}{\sqrt{((D - 4fg\cos\varrho)(bb + cc + (bb - cc)\cos 2(\eta + \varrho)) - \frac{1}{2}CC)}}.$$

Nunc dato tempore t per ϱ, pariter ac u, inde colligimus pressionem π porroque intervallum s ex hac aequatione

$$\frac{2\Pi}{M}\,gsdt = (cc - bb)\,du\sin(\eta+\varrho)\cos(\eta+\varrho) + aaud\varrho + (cc - bb)\,ud\varrho\cos 2(\eta + \varrho).$$

Tum vero obtinemus $x = \frac{-d\varrho}{dt}$; $\eta = u\cos(\eta + \varrho)$ et $z = u\sin(\eta+\varrho)$ ac denique $\varphi = -\int udt$.

COROLL. 1.

941. Si initio punctum L fuerit in D ut sit ZD $= r$, ibique quieverit, posito $t = 0$ erat $u = 0$, $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, ob $s = 0$; ideoque constantes ita definiri oportet, ut sit $C = 0$; et $D = 4fg\cos r$: unde fit $dt = d\varrho \sqrt{\frac{aa + ff\sin\varrho^2}{4fg(\cos r - \cos\varrho)}}$, sicque $\varrho > r$. Porro est $u = 0$, hinc $\varphi = 0$, et $s = 0$; pressio autem Π hinc facile innotescit, et cum ϱ ad 90° augeri possit, corpus quasi procumbet. Hic ergo motus neque a positione axium principalium IB et IC, neque a radio basium cylindri e pendet.

COROLL. 2.

942. Si initio recta IL fuerit verticalis seu $\varrho = 0$, et corpus circa eam gyrari coeperit celeritate angulari ε in sensum AB, ut fuerit O in L, ideoque $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \eta$ et $\gamma = 90^\circ - \eta$: initio erat $x = \frac{-d\varrho}{dt} = 0$, $y = \varepsilon \cos \eta$ et $z = \varepsilon \sin \eta$. Hinc fiunt constantes $C = \varepsilon(bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta)$ et $D = 4fg + \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta)$: unde colligitur $u = \frac{\varepsilon(bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta)}{bb + cc + (bb - cc)\cos 2(\eta + \varrho)}$ atque $\frac{d\varrho^2 (aa + ff \sin \varrho^2)}{dt^2}$
$= 4fg(1 - \cos\varrho) + \frac{\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(bb - cc)(bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta)(\cos 2(\eta + \varrho) - \cos 2\eta)}{bb + cc + (bb - cc)\cos 2(\eta + \varrho)}$.

COROLL. 3.

943. Si esset $bb = cc$, fieret $dt = d\varrho \sqrt{\frac{aa + ff \sin \varrho^2}{4fg(1 - \cos\varrho)}}$; et recta IL perpetuo maneret verticalis: corpusque circa eam uniformiter gyrari pergeret: cum enim denominator contineat $\sqrt{(1 - \cos\varrho)} = \sin\frac{1}{2}\varrho \sqrt{2}$ nonnisi tempore elapso infinito arcus ϱ finitus evaderet: quod idem evenit, si fuerit vel $\eta = 0$, vel $\vartheta = 0$, hoc est si recta IL fuerit axis principalis.

SCHOLION.

944. Nisi axis longitudinalis simul sit axis principalis corporis, ob multitudinem literarum vix patet, quomodo formulae supra erutae generaliter evolvi queant, quod tamen inferius suscipiemus. Verum si hujusmodi corporum cylindricorum tantum motus quasi infinite parvos consideremus, ad quod necesse est, ut in recta centrali LF (fig. 118.) centrum inertiae I infra centrum circuli G cadat, corpusque infinite parum de statu quietis deturbetur, oscillationes vel vacillationes minimae orientur, qua-
Fig. 124. rum indolem ex formulis nostris generalibus determinare licebit. Hic non opus est, ut totum corpus sit cylindricum, sed sufficit, si ejus termini circa M et N sint cylindrici, quibus super planis horizontalibus firmis P et Q sustentetur, quin etiam sufficit, si tantum circa contactum utriusque termini figura fuerit cylindrica, siquidem motus tantum admittimus infinite parvos. Deinde inter sustentacula P et Q annexum esse potest corpus pendulum quodcunque FMHn, ut oriatur pendulum non circa axem fixum linearem, sed circa terminos cylindricos planis horizontalibus incumbentes

tes mobile, cujus motum oscillatorium definiri oporteat. In tali ergo pendulo primo notetur ejus centrum inertiae I, per quod ducatur recta *mn* axi geometrico cylindri MN parallela, quae est axis longitudinalis jugiter manens horizontalis. Ducatur porro ex I ad MN recta perpendicularis IGL, quae si fuerit verticalis, corpus in quiete versabitur: ac si intervallum GI ponamus $= f$, in superioribus formulis litteram f negative sumere debemus. Tum pro figura cylindrica terminorum sit radius basis $= e$, qui autem, ut vidimus, prorsus non in computum ingreditur, ita ut perinde sit sive termini sint crassiores sive graciliores. Quodsi recta IG $= f$ minor fuerit, quam GF $= e$, totumque corpus supra sustentacula P et Q versetur, motus prodit similis ei, quo cunae agitari solent. Quicquid autem sit centrum inertiae I, perpetuo in eadem recta verticali manebit, unde tota investigatio ad motum gyratorium definiendum perducitur, in quo centrum inertiae I ut quiescens consideramus.

PROBLEMA. 117.

945. Si corpus, quod basibus cylindricis super planis horizontalibus incumbit, infinite parum de situ quietis deturbetur, eique forte simul motus infinite parvus imprimatur, determinare motum vacillatorium, quo agitabitur.

SOLUTIO.

In formulis nostris generalibus primo intervallum GI $= f$ negativum statuatur: deinde arcus ZL $= \varrho$, quo recta centralis LGI a situ verticali declinat, ut infinite parvus spectari debet, perinde atque celeritas angularis s: unde quantitates $x = s \cos\alpha$, $y = s \cos\beta$, $z = s \cos\gamma$, ut evanescentes tractari debent. Quomodocunque ergo axes principales IA, IB, IC respectu rectae centralis GI et axis longitudinalis *mn* fuerint dispositi, quorum situs cum arcubus LA $= \zeta$, LB $= \eta$, LC $= \vartheta$, tum angulis ZLA $= \mathfrak{f}$, ZLB $= \mathfrak{g}$, ZLC $= \mathfrak{h}$ definitur, primo habebimus $\sin\varrho = \varrho$, $\cos\varrho = 1$, deinde producta xy, xz et yz omitti poterunt; unde fiet $\cos l = \cos\zeta$, $\cos m = \cos\eta$ et $\cos n = \cos\vartheta$; et aequationes solutionem continentes ex probl. 113. ob $\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2} = 1$ erunt: Fig. 121.

$$\text{I.}\quad aadx = 2fg\varrho dt \sin\mathfrak{f} \sin\zeta + 2gsdt \cos\mathfrak{f} \sin\zeta$$

$$\text{II.}\quad bbdy = 2fg\varrho dt \sin\mathfrak{g} \sin\eta + 2gsdt \cos\mathfrak{g} \sin\eta$$

$$\text{III.}\quad ccdz = 2fg\varrho dt \sin\mathfrak{h} \sin\vartheta + 2gsdt \cos\mathfrak{h} \sin\vartheta$$

unde ex §. 938. haec integralis est derivata

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 2fg\varrho\varrho - \frac{ff\varrho\varrho d\varrho^2}{dt^2}$$

ob $\cos\varrho = 1 - \frac{1}{2}\varrho\varrho$, quia hic infinite parvum $\varrho\varrho$ negligere non licet: Deinde habemus:

$$\text{IV. } y\cos\vartheta - z\cos\eta = -\frac{d\varrho}{dt}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta$$

$$\text{V. } z\cos\zeta - x\cos\vartheta = -\frac{d\varrho}{dt}\cos\mathfrak{g}\sin\eta$$

$$\text{VI. } x\cos\eta - y\cos\zeta = -\frac{d\varrho}{dt}\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta$$

atque ex §. §. 936 et 937.

$$d\varrho = -dt\,(x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta)$$
$$d\phi = -dt\,(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta).$$

Cum nunc sit IV. x + V. y + VI. $z = 0$, erit

$$x\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + y\cos\mathfrak{g}\sin\eta + z\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = 0.$$

Deinde ex n°. I. II. III. in subsidium vocando formulas n°. I. et II. ex §. 934. colligimus

$$aax\cos\zeta + bby\cos\eta + ccz\cos\vartheta = A,$$

et pro intervallo s determinando

$$aadx\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + bbdy\cos\mathfrak{g}\sin\eta + ccdz\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = 2gsdt.$$

Statuamus $d\varrho = -udt$ et $d\phi = -vdt$, atque ob $x\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + y\cos\mathfrak{g}\sin\eta + z\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = 0$ consequimur

$$x = u\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + v\cos\zeta;\; y = u\sin\mathfrak{g}\sin\eta + v\cos\eta;\; z = u\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta + v\cos\vartheta$$ hincque

$$A = u\,(aa\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + bb\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + cc\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta) + v\,(aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2).$$

Ponamus ad abbreviandum

$$\left.\begin{aligned} bb\cos\mathfrak{h}\cos\eta\sin\vartheta - cc\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\vartheta &= \mathfrak{A}\\ cc\cos\mathfrak{f}\cos\vartheta\sin\zeta - aa\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\zeta &= \mathfrak{B}\\ aa\cos\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta - bb\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta &= \mathfrak{C}\end{aligned}\right\}\ \text{eritque } \mathfrak{A}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + \mathfrak{B}\cos\mathfrak{g}\sin\eta + \mathfrak{C}\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = 0$$

$$aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2 = \mathfrak{D} : aa\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + bb\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + cc\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathfrak{F}$$

et habebimus $v = \dfrac{A - \mathfrak{F}u}{\mathfrak{D}}$

$$x = \frac{A\cos\zeta + \mathfrak{A}u}{\mathfrak{D}};\; y = \frac{A\cos\eta + \mathfrak{B}u}{\mathfrak{D}}:\; z = \frac{A\cos\vartheta + \mathfrak{C}u}{\mathfrak{D}}$$

qui

qui valores, in aequatione integrali vim vivam complectente substituti, ob $\frac{d\varrho}{dt} = -u$ dabunt:

$$\frac{AA\mathfrak{D} + 2Au(\mathfrak{A}a^2\cos\zeta + \mathfrak{B}b^2\cos\eta + \mathfrak{C}c^2\cos\vartheta) + uu(\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2)}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}$$

$= C - 2fg\varrho\varrho - ff\varrho\varrho uu$ quae aequatio ob $\mathfrak{A}aa\cos\zeta + \mathfrak{B}bb\cos\eta + \mathfrak{C}cc\cos\vartheta = 0$ abit in hanc

$$AA\mathfrak{D} + (\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2)uu = C\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{D}\mathfrak{D}fg\varrho\varrho - \mathfrak{D}\mathfrak{D}ff\varrho\varrho uu$$

ubi si loco $C\mathfrak{D}\mathfrak{D} - AA\mathfrak{D}$ ponatur $B\mathfrak{D}\mathfrak{D}$, fiet

$$u = \frac{\mathfrak{D}\sqrt{(B - 2fg\varrho\varrho)}}{\sqrt{(\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{D}ff\varrho\varrho)}}.$$

Statuamus porro $\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{H}$, et rejecto termino infinite parvo $\mathfrak{D}\mathfrak{D}ff\varrho\varrho$ habebimus

$$u = \frac{\sqrt{(B - 2fg\varrho\varrho)}}{\mathfrak{H}} \quad \text{et } dt = \frac{-\mathfrak{H}d\varrho}{\sqrt{(B - 2fg\varrho\varrho)}},$$

unde colligimus $t = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{2fg}}\,\text{Arc.}\cos\frac{\varrho\sqrt{2fg}}{\sqrt{B}}$, seu

$\varrho = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}}\cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}$, et $u = \frac{\sqrt{B}}{\mathfrak{H}}\sin\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}$

tum vero $v = \frac{A}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\sqrt{B}}{\mathfrak{D}\mathfrak{H}}\sin\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}$; hincque

$$\phi = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\sqrt{B}}{\mathfrak{D}\sqrt{2fg}}\cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}} = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}.$$

Deinde reperiemus:

$$s = \frac{-\sqrt{Bf}}{\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{H}\sqrt{2g}}(aabb\sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta^2 + aacc\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + bbcc\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2)\cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}.$$

Denique vero erit

$$ss = xx + yy + zz = \frac{AA - 2A\mathfrak{F}u + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C})uu}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}$$

sicque omnia ad datum tempus sunt definita. Ceterum hic notasse juvat, esse $\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{F}\mathfrak{F}$, ita ut sit $ss = vv + uu$.

COROLL. 1.

946. Cum sit $\varrho = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}} \cos\frac{(t+\delta)\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}$; patet arcum ZL $\pm\varrho$ seu declinationem rectae LI a situ verticali ad similitudinem penduli variari, hujusque lineae LI vacillationes isochronas fore oscillationibus penduli, cujus longitudo est $= \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}{f}$, quae longitudo est $= \frac{\mathfrak{A}^2a^2 + \mathfrak{B}^2b^2 + \mathfrak{C}^2c^2}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}f}$.

COROLL. 2.

947. Deinde cum sit $\varphi = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}$, punctum L motu medio revolvitur circa verticem Z celeritate angulari $= \frac{A}{\mathfrak{D}}$; verum locus medius corrigi debet particula $\frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}$. Sin autem sit constans $A = 0$, angulus DZL parumper mutatur, nisi sit $\mathfrak{F} = 0$.

COROLL. 3.

948. Si ergo revolutiones corporis circa axem verticalem IZ excludantur, ut sit $A = 0$, atque initio fuerit $\varphi = 0$; $\varrho = \mathfrak{r}$ et celeritas angularis $\varepsilon = \epsilon$, constantes ita definientur, ut sit $D = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{r}}{\mathfrak{D}}$; $\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}} \cos\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}$ et $\epsilon\epsilon = \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{F}\mathfrak{F})B}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{H}} \left(\sin\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}\right)^2$. Ergo

$$\sqrt{B} = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{\cos\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}} = \frac{\epsilon\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{\sin\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}\sqrt{(\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{F}\mathfrak{F})}},$$

ideoque $\operatorname{tang}\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}} = \frac{\epsilon\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{\mathfrak{r}\sqrt{2fg(\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{F}\mathfrak{F})}}$, unde et constans B innotescit. Sin autem fuerit $\epsilon = 0$; prodit $\sqrt{B} = \mathfrak{r}\sqrt{2fg}$, et $\delta = 0$.

EXEMPLUM.

Fig. 123. 949. Ponamus rectam IM, quae per centrum inertiae I axi geometrico cylindri (MN fig. 124.) parallela ducitur, simul esse corporis axem prin-

principalem, et habebimus uti §. 940. $\mathfrak{f} = 90°$, $\mathfrak{g} = 180°$, $\mathfrak{h} = 0$ et $\mathfrak{z} = 90°$, atque $\vartheta = 90° - \eta$. Hinc autem colligimus:

$$\mathfrak{A} = bb\cos\eta^2 + cc\sin\eta^2;\ \mathfrak{B} = 0;\ \mathfrak{C} = 0;\ \mathfrak{D} = \mathfrak{A}\ \text{et}\ \mathfrak{F} = 0$$

ergo $aa = \mathfrak{H}\mathfrak{H}$: unde longitudo penduli simplicis isochroni fit $= \frac{aa}{f}$. Tum vero axis IA horizontalis manebit immotus. Ac si initio, ubi $\varrho = \mathfrak{r}$, corpus motum a quiete inceperit, erit $\delta = 0$, et $\sqrt{B} = \mathfrak{r}\sqrt{2fg}$: ex quibus reliquae quantitates variabiles colliguntur,

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{a};\ u = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{a}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{a};\ v = 0;\ \text{ob}\ A = 0$$

$$\text{et}\ x = u = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{a}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{a};\ y = 0\ \text{et}\ z = 0,\ \text{atque}\ \mathfrak{x} = x.$$

Revera autem adjuncto motu progressivo centrum inertiae I in recta verticali alternatim ascendet ac descendet, cylindro superiore MN hunc motum sequente, dum super planis P et Q liberrime incedere potest, neque a frictione impedri assumitur. Fig. 124.

SCHOLION.

950. Quia magnitudo cylindri MN in computum non ingreditur, eadem solutio valebit, si ejus crassities evanescat, corpusque annexum ab axe lineari esset suspensum. Ex quo hic motus convenire debere videtur cum motu oscillatorio supra definito, quod tamen longe aliter usu venit; quoniam pro motu oscillatorio vero longitudo penduli simplicis isochroni prodiit $= f + \frac{aa}{f} = \frac{aa + ff}{f}$, cum hic tantum sit $= \frac{aa}{f}$. Causa hujus discriminis in eo est sita, quod supra in doctrina oscillationum axem MN fixum assumsimus, dum hic liberrime mobilis statuitur. Hinc patet, ob libertatem axis, etsi plano horizontali incumbat, oscillationes multo promtiores fieri, quam si axis in eodem loco firmiter detineretur. Atque hoc etiam Theoriae omnino est conforme, si enim (fig. 118.) circulus ΠMTN planum semper in eodem puncto T tangere debeat, praeter pressionem Π vis quaedam horizontalis in calculum introduci debet, quae si ponatur $= \Theta$ secundum TH urgens, ut punctum T maneat constans, ob $TP = f\sin\varrho$ esse oportet $\frac{fdd\sin\varrho^2}{dt^2} = \frac{-2\Theta g}{M}$. Ex hac autem vi quoque nascitur momentum respectu axium principalium, qua propterea motus gyratorius afficitur, ut talis prodeat, qualem supra in motus oscilla-

 torii

torii investigatione determinavimus. Ceterum hic probe notasse juvabit, si axiculi penduli planis horizontalibus politissimis incumbant, motum oscillatorium plurimum discrepare posse ab eo, qui oriretur, si firmiter detinerentur, et multo quidem promtiorem esse futurum. Minima autem frictio hoc discrimen tollere, motumque ad oscillationum legem reducere valebit. Hujus autem problematis solutio nos ad solutionem problematis generalis n°. 113. manuducet.

PROBLEMA. 116.

951. Si corpus cylindricum quodcunque super plano horizontali moveatur utcunque, aequationes supra inventas, quibus ejus motus definitur, resolvere atque ad integrationem perducere.

SOLUTIO.

Maneant hic omnia, uti supra in problemate 113. sunt constituta, atque in recta centrali LIGF sumamus ut ibi centrum inertiae I a puncto F magis remotum, quam centrum sectionis cylindri G, ponendo interval-
Fig. 121. lum GI $= f$. Ex aequationibus igitur differentialibus ibi exhibitis jam unam aequationem integralem eruimus, quae est:

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 4fg \cos\rho - \frac{ff\,d\rho^2 \sin\rho^2}{dt^2}.$$

Praeterea vero ternae priores aequationes ope ternarum posteriorum in postremis terminis applicatarum abeunt in has formas

$$\text{I. } aadx + (cc - bb)yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}.\,dt \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \sin\rho - \frac{2\Pi gs}{M}.\frac{dt\,dl \sin l}{d\rho}$$

$$\text{II. } bbdy + (aa - cc)xzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}.\,dt \sin\mathfrak{g} \sin\eta \sin\rho - \frac{2\Pi gs}{M}.\frac{dt\,dm \sin m}{d\rho}$$

$$\text{III. } ccdz + (bb - aa)xydt = \frac{-2\Pi fg}{M}.\,dt \sin\mathfrak{h} \sin\vartheta \sin\rho - \frac{2\Pi gs}{M}.\frac{dt\,dn \sin n}{d\rho},$$

Hinc jam colligatur forma I. $\cos l$ + II. $\cos m$ + III. $\cos n$, et quia $dl \sin l \cos l + dm \sin m \cos m + dn \sin n \cos n = 0$, termini ultimi intervallum s involventes se destruent: tum vero etiam per relationes §. 934. traditas reperitur $\sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos l + \sin\mathfrak{g} \sin\eta \cos m + \sin\mathfrak{h} \sin\vartheta \cos n = 0$ ita ut quoque penultimi tollantur. Quocirca perveniemus ad hanc aequationem

$$aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n + aaxzdt \cos m + bbxydt \cos n + ccyzdt \cos l = 0$$
$$- aaxydt \cos n - bbyzdt \cos l - ccxzdt \cos m$$

at ex

at ex ternis posterioribus est

$$z\cos m - y\cos n = \frac{-dl\sin l}{dt};\quad x\cos n - z\cos l = \frac{-dm\sin m}{dt};\quad y\cos l - x\cos m = \frac{-dn\sin n}{dt}$$

quibus valoribus substitutis obtinemus

$$aadx\cos l + bbdy\cos m + ccdz\cos n - aaxdl\sin l - bbydm\sin m - cczdn\sin n = 0$$

cujus integralis est

$$aax\cos l + bby\cos m + ccz\cos n = D.$$

Deinde loco x, y et z introducamus novas variabiles hinc definiendas

$$x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta = p$$
$$x\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + y\cos\mathfrak{g}\sin\eta + z\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = q$$
$$x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta = r$$

eritque primo $d\varrho = -rdt$; porro ob $x\cos l + y\cos m + z\cos n = p\cos\varrho + q\sin\varrho$; erit $d\phi = -dt\,(p\cos\varrho + q\sin\varrho)$. Praeterea ob $xdl\sin l + ydm\sin m + zdn\sin n = 0$, fit, $p\sin\varrho - q\cos\varrho = 0$. Quam ob rem ponamus

$$p = u\cos\varrho \text{ et } q = u\sin\varrho \text{ eritque } d\phi = -udt \text{ et } d\varrho = -rdt,$$

at ex illis aequationibus assumtis elicimus

$$x = r\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + u\cos l;\ y = r\sin\mathfrak{g}\sin\eta + u\cos m;\ z = r\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta + u\cos n$$

hincque $xx + yy + zz = rr + uu = ss.$

Nunc aequatio integralis modo ante inventa praebet

$$D = r\,(aa\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos l + bb\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos m + cc\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos n)$$
$$+ u\,(aa\cos l^2 + bb\cos m^2 + cc\cos n^2)$$

qua u determinatur per r et ϱ; ideoque et x, y, z. Denique aequatio integralis primum inventa $aaxx + bbyy + cczz = C - 4fg\cos\varrho - ffrr\sin\varrho^2$ quia tantum r et ϱ continet, determinabit ϱ per ϱ, indeque aequatio $dt = \frac{-d\varrho}{r}$ pro dato tempore t omnes quantitates motum continentes manifestabit. Quodsi ad abbreviandum ponantur constantes:

$$aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2 = \mathfrak{A}$$
$$aa\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + bb\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + cc\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathfrak{B}$$
$$aa\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + bb\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + cc\cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 = \mathfrak{C}$$
$$aa\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + bb\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + cc\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathfrak{D}$$
$$aa\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2 + bb\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + cc\sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta^2 = \mathfrak{E}$$
$$aa\sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + bb\sin\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + cc\sin\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 = \mathfrak{F}$$

nostrae aequationes integrales erunt

$$D = r\,(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho) + u\,(\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)$$

 C —

$C - 4fg\cos\varrho - ffrr\sin\varrho^2 = \mathfrak{F}rr + 2ru(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho) + uu(\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)$ ex quibus concluditur

$$rr = \frac{DD - (\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)(C - 4fg\cos\varrho)}{(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho)^2 - (\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)(\mathfrak{F} + ff\sin\varrho^2)}$$

Hinc pro tempore adipiscimur $t = \int \frac{-d\varrho}{r}$, et cum sit $u = \frac{D - r(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho)}{\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2}$, erit angulus $\varphi = -\int u dt = \int \frac{u d\varrho}{r}$. Cum autem ad quodvis tempus t tam arcum ϱ quam angulum φ determinaverimus, totus motus erit perfecte cognitus.

COROLL. 1.

952. Quantitates ergo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{F}$ necessario sunt positivae, et $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ ita refertur, ut sit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{B} = aabb\sin\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 + aacc\sin\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + bbcc\sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2$$

unde patet, formam $\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2$ in duos factores simplices resolvi non posse.

COROLL. 2.

953. Ex hac solutione generali casus in praecedente problemate evolutus facile deducitur, sumendo f negative, et arcum ϱ infinite parvum, unde fit $rr = \frac{DD - \mathfrak{A}C - 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{D}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{F}} = \frac{Const. + 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{A}f - \mathfrak{D}\mathfrak{D}}$.

Reperitur autem valoribus evolutis

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F} - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = aabb\cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 + aacc\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + bbcc\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2$$

unde longitudo penduli simplicis isochroni simplicius quam supra ita exhibetur, ut sit $= \frac{aabb\cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 + aacc\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + bbcc\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2}{f(aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2)}$.

SCHOLION.

954. His de motu corporum cylindricorum super plano horizontali expeditis, institueram pauca de motu super plano inclinato adjungere: verum si motus fuerit simplex, res nullam habet difficultatem, sin autem sit complicatus, in calculos incommodos incideremus. Quare cum in praxi frictionem ab his motibus separare haud liceat, motus saltem simpliciores super plano inclinato ita pertractabimus, ut simul frictionis rationem habeamus, ex quo peculiarem tractatum de motu corporum rigidorum a frictione perturbato adjungi conveniet.

ADDI-

ADDITAMENTUM.

CAPUT I.

FORMULAE GENERALES
PRO
TRANSLATIONE
QUACUNQUE CORPORUM RIGIDORUM.

955. Quando corporis cujusque rigidi motum determinari oportet, tota investigatio commode in duas partes distinguitur, alteram geometricam, alteram mechanicam. In priore enim parte sola translatio corporis ex dato situ in alium quemcunque sine ullo respectu habito ad motus principia per formulas analyticas repraesentari debet, quarum ope positio singulorum punctorum post translationem ex earum positione initiali definiri queat; quae ergo investigatio unice ad Geometriam vel potius ad Stereometriam est referenda. Facile autem intelligitur, si ista investigatio ab altera, quae proprie ad Mechanicam pertinet, separetur, tum ipsam motus determinationem ex principiis motus multo facilius expediri posse, quam si utraque investigatio conjunctim suscipiatur. Cum igitur in tractatu meo de motu corporum rigidorum hanc utramque investigationem simul suscepissem, unde tota tractatio non parum molesta et intricata est reddita: hoc loco solam partem geometricam accuratius evolvere constitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri possit.

956. Ut igitur primo situm initialem corporis rigidi accurate definiam, positionem singulorum ejus punctorum more solito per ternas coordinatas inter se normales repraesentari conveniet. Hunc in finem constituo ternos axes fixos IA, IB et IC se invicem in puncto I normaliter secantes, quorum bini IA et IB in ipso plano tabulae sint siti, tertius vero IC hinc plano perpendiculariter insistat. Nunc considero punctum corporis quodcunque Z, ex quo ad planum AIB demittatur perpendiculum ZS; tum vero ex puncto S ad axes IA et IB ducantur normales SP et SQ, ac vocemus coordinatas $IP = QS = p$, $PS = IQ = q$ et ipsum perpendiculum Fig. 141.

lum $SZ = r$, cui in axe IC aequalis capiatur portio $IR = r$; ita ut punctum Z reperiatur in diagonali IZ parallelepipedi rectanguli, quod ex lateribus IP, IQ et IR formatur. Hoc igitur modo positio singulorum corporis punctorum commodissime per ternas coordinatas p, q, r, determinabitur.

957. Quo autem deinceps facilius ista repraesentatio ad investigationem mechanicam accommodari possit, punctum I aptissime accipitur in ipso centro gravitatis seu potius inertiae corporis rigidi propositi; sic enim istud insigne commodum impetramus, ut posita massula corporis in Z existentis $= dM$, per totam corporis extensionem fiat

$$1^\circ.\ \int p\,dM = 0. \quad 2^\circ.\ \int q\,dM = 0. \quad 3.\ \int r\,dM = 0$$

siquidem haec integralia per totum corpus extendantur. Praeterea vero maximam utilitatem afferet, si terni axes IA, IB, IC in ipsis axibus corporis principalibus constituantur; tum enim etiam valores trium sequentium formularum integralium pariter per totum corpus extensi nihilo aequales reddentur, quippe quae sunt

$$4^\circ.\ \int qp\,dM = 0. \quad 5^\circ.\ \int pr\,dM = 0. \quad 6^\circ.\ \int qr\,dM = 0$$

haecque tantum hic in transitu notasse juvabit, quandoquidem pars geometrica ab istis aequationibus neutiquam pendet.

958. Iam facta quacunque corporis translatione consideremus primo locum i, in quem punctum corporis I fuerit translatum, pro quo vocemus coordinatas $If = f$, $fg = g$ et $gi = h$; tum vero punctum Z ex situ initiali translatum sit in z, pro quo statuamus coordinatas $Ix = x$, $xy = y$ et $yz = z$, ac primo quidem statim manifestum est, distantiam iz etiamnunc aequalem esse debere distantiae IZ, qua, cum esset $\sqrt{pp + qq + rr}$, nunc vero sit $iz = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2}$ habebimus hanc aequationem:

$$pp + qq + rr = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2.$$

Praeterea vero necesse est, ut distantiae inter bina corporis puncta quaecunque in situ translato etiamnunc aequales sint distantiis eorundem punctorum in situ initiali, cui conditioni sequenti modo satisfaciemus.

959 Sumamus punctum z in eo loco, in quem punctum P ex statu initiali fuerit translatum: hic enim non consultum videtur figuram nostram tot novis lineis ducendis onerare. Deinde etiam in ipso statu initiali punctum Z ubicunque libuerit accipi potest; unde si punctum Z in puncto P accipiatur, etiam punctum z in situ translato locum ipsi P respondentem exhibebit.

960. Cum

960. Cum igitur punctum Z in punctum P incidat, si fiat $q = 0$ et $r = 0$, quoniam in genere ternas coordinatas x, y, z tanquam certas functiones ipsarum p, q et r considerare licet, quomodocunque hae functiones fuerint comparatae, si in iis faciamus $q = 0$ et $r = 0$ hae coordinatae necessario tales formas accipere debebunt,

$$x = f + Fp, \quad y = g + Gp, \quad z = h + Hp.$$

Quia enim ponimus $q = 0$ et $r = 0$ spectata p ut variabili, coordinatae x, y, z ostendere debent situm in quem linea recta IP fuerit translata; quae cum sit recta, ea in situ translato erit linea recta ipsi aequalis, ideoque coordinatae x, y, z positionem hujus lineae rectae iz exprimere debent, unde, cum sumto $p = 0$ etiam punctum z in i incidere debeat, evidens est, quantitates x, y, z ita per variabilem p definiri debere, ut posito $p = 0$ fiat $x = f$, $y = g$ et $z = h$. Tum vero quia aequatio debet esse pro linea recta, aliae formae locum habere nequeunt, nisi quas statuimus: scilicet

$$x = f + Fp, \quad y = g + Gp, \quad z = h + Hp$$

ubi litterae F, G, H certas designant constantes ab indole translationis pendentes.

961. Statim autem manifestum est, istas constantes ita comparatas esse debere, ut intervallum iz aequale sit intervallo $IP = p$, unde sequitur ista determinatio: $iz^2 = F^2 p^2 + G^2 p^2 + H^2 p^2 = pp$
quam ob rem necesse est ut sit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$. Quod si ergo sumamus $F = \sin\zeta$, fieri debet $G^2 + H^2 = \cos\zeta^2$; hanc ob rem statuamus $G = \cos\zeta \sin\eta$ et $H = \cos\zeta \cos\eta$, ita ut sit $F = \sin\zeta$, $G = \cos\zeta \sin\eta$ et $H = \cos\zeta \cos\eta$. Hoc ergo modo tres litterae illae F, G, H ad duos tantum angulos ζ et η sunt reductae.

962. Simili modo sumamus nunc punctum z in eo loco, in quem punctum Q ex situ initiali fuerit translatum; at vero punctum Z in punctum Q cadit sumendo $p = 0$ et $r = 0$. Hoc ergo casu ternae coordinatae x, y, z ita pendebunt a sola variabili q, ut facto $q = 0$ iterum fiat $x = f$, $y = g$ et $z = h$; quamobrem, cum aequatio etiam debeat esse pro linea recta, coordinatae talem formam habebunt:

$$x = f + F'q, \quad y = g + G'q, \quad z = h + H'q$$

ubi ergo ob $iz = q$ etiam esse oportet $F'F' + G'G' + H'H' = 1$
cui conditioni commode per binos angulos ζ' et η' ita satisfiet, ut sit

$$F' = \sin\zeta', \quad G' = \cos\zeta' \sin\eta', \quad H' = \cos\zeta' \cos\eta'.$$

963. Sumamus nunc punctum Z in R, quod evenit statuendo $p = 0$ et $q = 0$, unde si jam punctum z exhibeat locum, in quem punctum R

 erit

erit translatum, pro coordinatis eodem modo quo ante adipiscentur tales formas: $x = f + F''r$, $y = g + G''r$, $z = h + H''r$.
Et quia esse oportet $F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1$
per binos novos angulos ζ'' et η'' statuere poterimus

$$F'' = \sin\zeta'', \quad G'' = \cos\zeta'' \sin\eta'' \text{ et } H'' = \cos\zeta'' \cos\eta''.$$

964. Quoniam igitur coordinatarum x, y et z valores nacti sumus, quos inducere debent tribus casibus evolutis, ubi trium quantitatum p, q, r duae evanescebant, perspicuum hinc est, quomodo coordinatae x, y, z a singulis quantitatibus p, q, r pendent. Quamobrem, si omnes istae litterae simul in computum ingrediantur, ita ut iis punctum corporis quodcunque Z indicetur, cui in situ translato respondeat punctum z, coordinatae x, y, z sequentes habere debebunt valores:

$$x = f + Fp + F'q + F''r$$
$$y = g + Gp + G'q + G''r$$
$$z = h + Hp + H'q + H''r$$

has autem novem litteras vidimus reduci ad sex angulos $\zeta, \eta, \zeta', \eta', \zeta'', \eta''$.

965. Sumamus nunc punctum Z in ipso puncto s ita ut sit $r = 0$, ac si in situ translato isti puncto respondeat punctum z, posito $r = 0$ ternae coordinatae ita se habebunt:

$$x = f + Fp + F'q, \quad y = g + Gp + G'q, \quad z = h + Hp + H'q.$$

Ubi necesse est, ut fiat distantia iz distantiae IS aequalis, quae cum sit $\sqrt{pp + qq}$, hinc nascetur ista aequatio:

$$pp + qq = (Fp + F'q)^2 + (Gp + G'q)^2 + (Hp + H'q)^2$$

et facta evolutione fiet

$$pp + qq = pp(FF + GG + HH) + qq(F'F' + G'G' + H'H') + 2pq(FF' + GG' + HH').$$

Cum igitur sit $FF + GG + HH = 1$ et $F'F' + G'G' + H'H' = 1$ superest, ut evadat $FF' + GG' + HH' = 0$.

966. Eodem modo patebit, si sumamus $q = 0$, tum istam proprietatem locum habere debere, ut sit $FF'' + GG'' + HH'' = 0$: at si statuamus $p = 0$, inde resultabit ista aequatio $F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0$. Quibus tribus conditionibus cum fuerit satisfactum, tota translatio erit determinata; ac nostrae formulae pro omnibus corporis punctis easdem exhibebunt distantias in situ translato, quas tenuerunt in situ initiali.

967. Sub-

967. Substituamus nunc in his aequationibus valores ante inventos, ac prima $FF' + GG' + HH' = 0$ dabit
$\sin\zeta \sin\zeta' + \cos\zeta \cos\zeta' \sin\eta \sin\eta' + \cos\zeta \cos\zeta' \cos\eta \cos\eta' = 0$ sive $\sin\zeta \sin\zeta' + \cos\zeta \cos\zeta' \cos(\eta - \eta') = 0$ ob $\cos\eta \cos\eta' + \sin\eta \sin\eta' = \cos(\eta - \eta')$ quae aequatio per $\cos\zeta \cos\zeta'$ divisa praebet $\tang\zeta \tang\zeta' = -\cos(\eta - \eta')$. Eodem modo binae reliquae aequationes dabunt
$\tang\zeta' \tang\zeta'' = -\cos(\eta' - \eta'')$ et $\tang\zeta'' \tang\zeta = -\cos(\eta'' - \eta)$. Ex his igitur tribus aequationibus ternos angulos ζ, ζ' et ζ'' determinare licebit, ita ut omnia per ternos angulos η, η', η'' definiri queant.

968. Quod quo facilius fieri possit, multiplicemus has tres aequationes in se invicem, ut fiat $\tang\zeta^2 \tang\zeta'^2 \tang\zeta''^2 = -\cos(\eta - \eta') \cos(\eta' - \eta'') \cos(\eta'' - \eta)$. Unde statim patet, nisi productum horum trium cosinuuum fuerit negativum, casum esse impossibilem; quocirca ante omnia necesse est, ut horum cosinuum vel unus vel omnes tres sint negativi. Statuamus igitur brevitatis gr.

$$\cos(\eta - \eta') \cdot \cos(\eta' - \eta'') \cos(\eta'' - \eta) = -\Delta\Delta,$$

ut nanciscamur $\tang\zeta \tang\zeta' \tang\zeta'' = \Delta$, quae aequatio per singulas praecedentes divisa nobis suppeditat hos valores: $\tang\zeta' = \dfrac{-\Delta}{\cos(\eta - \eta')}$;

$\tang\zeta = \dfrac{-\Delta}{\cos(\eta' - \eta'')}$; $\tang\zeta' = \dfrac{-\Delta}{\cos(\eta'' - \eta)}$ hoc igitur modo omnes novem coefficientes initio assumti F, G, H, F', G', H', F'', G'', H'', per solos ternos angulos η, η', η'' determinantur hoc modo:

$$F = \sin\zeta, \quad G = \cos\zeta \sin\eta, \quad H = \cos\zeta \cos\eta$$
$$F' = \sin\zeta', \quad G' = \cos\zeta' \sin\zeta', \quad H' = \cos\zeta' \cos\eta'$$
$$F'' = \sin\zeta'', \quad G'' = \cos\zeta'' \sin\eta'', \quad H'' = \cos\zeta'' \cos\eta''.$$

969. Omnes igitur translationes, quibus situs corporis rigidi mutari potest, per sex elementa determinari possunt. Primo enim ternae coordinatae f, g, h determinant translationem puncti I in i, quae ergo penitus a nostro arbitrio pendent. Deinde, quomodocunque corpus circa hoc punctum i fuerit interea conversum, ejus situs per ternos angulos η, η', η'', penitus determinatur; sumto enim in situ initiali elemento corporis quocunque Z, cujus positio per ternas coordinatas p, q, r, definitur, id in situ translato reperietur in puncto z, cujus positio per istas ternas coordinatas definietur:

$$x = f + Fp + F'q + F''r$$
$$y = g + Gp + G'q + G''r$$
$$z = h + Hp + H'q + H''r$$

970. Quo autem magis convincamur, per has formulas omnia quae ad translationem pertinent perfecte determinari, totum negotium etiam sequenti modo absolvi potest. Concipiamus in statu initiali praeter punctum Z aliud quodcunque Z′, in figura quidem non expressum, cujus locus his coordinatis definiatur p', q', r'. Hoc autem punctum translatum sit in z', cui respondeant coordinatae x', y', z', quarum ergo valores ita exprimentur

$$x' = f + Fp' + F'q' + F''r'$$
$$y' = g + Gp' + G'q' + G''r'$$
$$z' = h + Hp' + H'q' + H''r'.$$

Quibus positis natura corporum rigidorum postulat, ut intervallum in situ translato zz' aequale sit intervallo ZZ' in situ initiali, quandoquidem in his corporibus omnia intervalla inter bina eorum puncta quaecunque perpetuo eandem quantitatem servare debent.

971. Iam vero distantiae punctorum Z et Z′ in statu initiali quadratum est $(p' - p)^2 + (q' - q)^2 + (r' - r)^2$
in statu autem translato quadratum distantiae inter puncta z et z' est

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

quod ergo ex tribus sequentibus quadratis componitur

$$(F(p' - p) + F'(q' - q) + F''(r' - r))^2$$
$$+ (G(p' - p) + G'(q' - q) + G''(r' - r))^2$$
$$+ (H(p' - p) + H'(q' - q) + H''(r' - r))^2$$

quorum ergo summa aequalis esse debet illi formulae

$$(p' - p)^2 + (q' - q)^2 + (r' - r)^2.$$

972. Evolutis autem ternis illis quadratis sequens expressio resultabit

$$(p' - p)^2 (FF + GG + HH)$$
$$+ (q' - q)^2 (F'F' + G'G' + H'H')$$
$$+ (r' - r)^2 (F''F'' + G''G'' + H''H'')$$
$$+ 2(p' - p)(q' - q)(FF' + GG' + HH')$$
$$+ 2(p' - p)(r' - r)(FF'' + GG'' + HH'')$$
$$+ 2(q' - q)(r' - r)(F'F'' + G'G'' + H'H'')$$

quamobrem, ut ista expressio priori $(p' - p)^2 + (q' - q)^2 + (r' - r)^2$ reddatur aequalis, quomodocunque coordinatae p, q, r, p', q', r', fuerint assumtae sex sequentibus conditionibus satisfieri oportet

I. $FF + CG + HH = 1$
II. $F'F' + G'G' + H'H' = 1$
III. $F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1$

IV. FF′

IV. $FF' + GG' + HH' = 0$
V. $FF'' + GG'' + HH'' = 0$
VI. $F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0$.

973. At vero omnes iſtas ſex conditiones jam in ſuperioribus adimplevimus, ubi oſtendimus, quemadmodum omnes hi novem coefficientes per ternos angulos η, η', η'' determinari queant. Ex quo eo clarius intelligitur, ſolutionem noſtram quaeſtionis circa translationem quamcunque corporum rigidorum penitus eſſe determinatam et adaequatam, ita ut in parte geometrica, quam motus talium corporum determinatio poſtulat, nihil amplius deſiderari poſſit.

974. Quomodocunque autem translatio corporis fuerit facta, qua punctum corporis I in punctum i eſt translatum; notum eſt ſi translatio fuerit infinite parva, tum ſemper in ſitu translato dari quaedam recta iz, cujus ſitus parallelus erit ei, quem eadem recta in ſtatu initiali habuit, ita ut, ſi punctum I quieviſſet, iſta recta penitus immota manſiſſet. Evidens autem eſt, iſtam rectam repraeſentare axem corporis circa quem gyratio fuerit facta, dum corpus in ſitum translatum pervenit. Quamobrem maximi momenti erit inveſtigare, utrum, ſi translatio fuerit finita, etiam detur talis axis.

975. Manifeſtum autem eſt, ut recta iz etiam nunc parallela ſit rectae IZ, ad hoc requiri tres iſtas conditiones:

$$1^\circ.\ x - f = p, \quad 2^\circ.\ y - g = q, \quad 3^\circ.\ z - h = r$$

unde naſcuntur hae aequationes:

$$p = Fp + F'q + F''r$$
$$q = Gp + G'q + G''r$$
$$r = Hp + H'q + H''r$$

ex quibus aequationibus litteras p, q, r eliminari oportet. Valores autem ipſius p hinc deducti erunt

$$\frac{F'q + F''r}{1 - F}, \quad \frac{(1 - G')\,q + G''r}{G}, \quad \frac{(1 - H'')\,r - H'q}{H}.$$

Horum valorum primus ſecundo aequatus iſtam dabit rationem inter q et r, ſcilicet $\frac{q}{r} = \frac{G''(F - 1) - F''G}{GF' - (1 - F)(1 - G')}$

at primus valor tertio aequatus perducit ad hanc relationem:

$$\frac{q}{r} = \frac{(1 - F)(1 - H'') - F''H}{F'H + H'(1 - F)}.$$

Hos

torii investigatione determinavimus. Ceterum hic probe notasse juvabit, si axiculi penduli planis horizontalibus politissimis incumbant, motum oscillatorium plurimum discrepare posse ab eo, qui oriretur, si firmiter detinerentur, et multo quidem promtiorem esse futurum. Minima autem frictio hoc discrimen tollere, motumque ad oscillationum legem reducere valebit. Hujus autem problematis solutio nos ad solutionem problematis generalis n°. 113. manuducet.

PROBLEMA. 116.

951. Si corpus cylindricum quodcunque super plano horizontali moveatur utcunque, aequationes supra inventas, quibus ejus motus definitur, resolvere atque ad integrationem perducere.

SOLUTIO.

Maneant hic omnia, uti supra in problemate 113. sunt constituta, atque in recta centrali LIGF sumamus ut ibi centrum inertiae I a puncto F magis remotum, quam centrum sectionis cylindri G, ponendo interval-
Fig. 121. lum GI $= f$. Ex aequationibus igitur differentialibus ibi exhibitis jam unam aequationem integralem eruimus, quae est:

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 4fg \cos\varrho - \frac{ffd\varrho^2 \sin\varrho^2}{dt^2}.$$

Praeterea vero ternae priores aequationes ope ternarum posteriorum in postremis terminis applicatarum abeunt in has formas

$$\text{I. } aadx + (cc - bb)yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M} \cdot dt \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \sin\varrho - \frac{2\Pi gs}{M} \cdot \frac{dt\, dl \sin l}{d\varrho}$$

$$\text{II. } bbdy + (aa - cc)xzdt = \frac{-2\Pi fg}{M} \cdot dt \sin\mathfrak{g} \sin\eta \sin\varrho - \frac{2\Pi gs}{M} \cdot \frac{dt\, dm \sin m}{d\varrho}$$

$$\text{III. } ccdz + (bb - aa)xydt = \frac{-2\Pi fg}{M} \cdot dt \sin\mathfrak{h} \sin\vartheta \sin\varrho - \frac{2\Pi gs}{M} \cdot \frac{dt\, dn \sin n}{d\varrho}.$$

Hinc jam colligatur forma I. $\cos l$ + II. $\cos m$ + III. $\cos n$, et quia $dl \sin l \cos l + dm \sin m \cos m + dn \sin n \cos n = 0$, termini ultimi intervallum s involventes se destruent: tum vero etiam per relationes §. 934. traditas reperitur $\sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos l + \sin\mathfrak{g} \sin\eta \cos m + \sin\mathfrak{h} \sin\vartheta \cos n = 0$
ita ut quoque penultimi tollantur. Quocirca perveniemus ad hanc aequationem

$$aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n + aaxzdt \cos m + bbxydt \cos n + ccyzdt \cos l = 0$$
$$- aaxydt \cos n - bbyzdt \cos l - ccxzdt \cos m$$

at ex

et ex ternis posterioribus est

$$z\cos m - y\cos n = \frac{-dl \sin l}{dt};\ x\cos n - z\cos l = \frac{-dm \sin m}{dt};\ y\cos l - x\cos m = \frac{-dn \sin n}{dt}$$

quibus valoribus substitutis obtinemus

$$aadx\cos l + bbdy\cos m + ccdz\cos n - aaxdl\sin l - bbydm\sin m - cczdn\sin n = 0$$

cujus integralis est

$$aax\cos l + bby\cos m + ccz\cos n = \mathrm{D}.$$

Deinde loco x, y et z introducamus novas variabiles hinc definiendas

$$x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\vartheta = p$$
$$x\cos\mathfrak{f}\sin\zeta + y\cos\mathfrak{g}\sin\eta + z\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta = q$$
$$x\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + y\sin\mathfrak{g}\sin\eta + z\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta = r$$

eritque primo $d\varrho = -rdt$; porro ob $x\cos l + y\cos m + z\cos n = p\cos\varrho + q\sin\varrho$; erit $d\phi = -dt\,(p\cos\varrho + q\sin\varrho)$. Praeterea ob $xdl\sin l + ydm\sin m + zdn\sin n = 0$, fit, $p\sin\varrho - q\cos\varrho = 0$. Quam ob rem ponamus

$$p = u\cos\varrho \text{ et } q = u\sin\varrho \text{ eritque } d\phi = -udt \text{ et } d\varrho = -rdt,$$

et ex illis aequationibus assumtis elicimus

$$x = r\sin\mathfrak{f}\sin\zeta + u\cos l;\ y = r\sin\mathfrak{g}\sin\eta + u\cos m;\ z = r\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta + u\cos n$$

hincque $xx + yy + zz = rr + uu = ss$.

Nunc aequatio integralis modo ante inventa praebet

$$\mathrm{D} = r\,(aa\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos l + bb\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos m + cc\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos n)$$
$$+ u\,(aa\cos l^2 + bb\cos m^2 + cc\cos n^2)$$

qua u determinatur per r et ϱ; ideoque et x, y, z. Denique aequatio integralis primum inventa $aaxx + bbyy + cczz = \mathrm{C} - 4fg\cos\varrho - ffrr\sin\varrho^2$ quia tantum r et ϱ continet, determinabit ϱ per ϱ, indeque aequatio $dt = \frac{-d\varrho}{r}$ pro dato tempore t omnes quantitates motum continentes manifestabit. Quodsi ad abbreviandum ponantur constantes:

$$aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2 = \mathfrak{A}$$
$$aa\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + bb\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + cc\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathfrak{B}$$
$$aa\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + bb\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + cc\cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 = \mathfrak{C}$$
$$aa\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + bb\sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + cc\sin\mathfrak{h}\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathfrak{D}$$
$$aa\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2 + bb\sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + cc\sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\vartheta^2 = \mathfrak{E}$$
$$aa\sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + bb\sin\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + cc\sin\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 = \mathfrak{F}$$

nostrae aequationes integrales erunt

$$\mathrm{D} = r\,(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho) + u\,(\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)$$

 C —

$$C - 4fg\cos\varrho - ffrr\sin\varrho^2 = \mathfrak{F}rr + 2ru(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho) + u$$
$(\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)$ ex quibus concluditu

$$rr = \frac{DD - (\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)(C - 4fg\cos\varrho)}{(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho)^2 - (\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2)(\mathfrak{F} + ff\sin\varrho^2}$$

Hinc pro tempore adipiscimur $t = \int\frac{-d\varrho}{r}$, et cum sit $u = \frac{D - r(\mathfrak{D}\cos\varrho + \mathfrak{E}\sin\varrho)}{\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2}$, erit angulus $\varphi = -\int udt = \int\frac{ud\varrho}{r}$ Cum autem ad quodvis tempus t tam arcum ϱ quam angulum φ determinaverimus, totus motus erit perfecte cognitus.

COROLL. 1.

952. Quantitates ergo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{F}$ necessario sunt positivae, et $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ ita refertur, ut sit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{B} = aabb\sin\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 + aacc\sin\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + bbcc\sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2$$

unde patet, formam $\mathfrak{A}\cos\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\sin\varrho\cos\varrho + \mathfrak{C}\sin\varrho^2$ in duos factores simplices resolvi non posse.

COROLL. 2.

953. Ex hac solutione generali casus in praecedente problemate evolutus facile deducitur, sumendo f negative, et arcum ϱ infinite parvum, unde fit $rr = \frac{DD - \mathfrak{A}C - 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{D}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{F}} = \frac{\text{Const.} + 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{A}f - \mathfrak{D}\mathfrak{D}}$.

Reperitur autem valoribus evolutis

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F} - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = aabb\cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 + aacc\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + bbcc\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2$$

unde longitudo penduli simplicis isochroni simplicius quam supra ita exhibetur, ut sit $= \frac{aabb\cos\mathfrak{h}^2\sin\vartheta^2 + aacc\cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + bbcc\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2}{f(aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\vartheta^2)}$.

SCHOLION.

954. His de motu corporum cylindricorum super plano horizontali expeditis, institueram pauca de motu super plano inclinato adjungere: verum si motus fuerit simplex, res nullam habet difficultatem, sin autem sit complicatus, in calculos incommodos incideremus. Quare cum in praxi frictionem ab his motibus separare haud liceat, motus saltem simpliciores super plano inclinato ita pertractabimus, ut simul frictionis rationem habeamus, ex quo peculiarem tractatum de motu corporum rigidorum a frictione perturbato adjungi conveniet.

ADDI-

ADDITAMENTUM.

ista relatio nascitur, ut sit $tt' \mp t't'' + tt'' = 1$, sive ut summa productorum ex binis unitate aequatur. Praeterea vero etiam ad eam conditonem est attendenda, qua erat $\eta' = \eta - \vartheta''$ et $\eta'' = \eta + \vartheta'$, atque his conditionibus rite observatis et per calculum evolutis, nullum dubium superesse potest, quin ista aequatio adimpleatur. At vero nemo facile stupendum hunc laborem in se suscipere volet; quamobrem egregia ista proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua est censenda, et Geometris pulcherrimam occasionem praebere potest, vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi.

CAPUT II.

NOVA METHODUS MOTUM CORPORUM RIGIDORUM DETERMINANDI.

988. Quanquam in tractatu meo de motu corporum rigidorum istam Theoriam satis felici successu expedivi: tamen fateri cogor, solutiones quas dedi non solum nimis esse intricatas, sed etiam applicationem ad quosvis casus particulares maxime esse molestam et plurimis difficultatibus implicatam. Postquam enim motum centri gravitatis determinassem, quod quidem nulla laborabat difficultate, ad quodvis tempus tam positionem axis gyrationis quam celeritatem definiri oportebat; deinde vero imprimis situm ternorum axium principalium assignare necesse erat; ad quod ingens multitudo quantitatum variabilium in calculum introduci debebat.

Haec tanta incommoda etiam sagacissimus Geometra *la Grange* animadvertisse videtur, dum hoc argumentum in Commentariis Academiae Borussicae pro Anno 1773 alia methodo tractandum suscepit, cujus quidem profundissimas meditationes maxima cum aviditate perlustrare sum conatus, veruntamen a me impetrare non potui, ut omnes ejus calculos penetrarem. Statim enim primum Lemma ita me deterruit, ut ob defectum oculorum nullo modo sperare potuerim, omnia artificia analytica, quibus est usus, perscrutari.

989. Cum autem nuper, dum partem geometricam, cui ista investigatio innititur, accuratius evolvendam suscepi, hanc insignem proprietatem

atem demonstrassem, quod, quomodocunque corpus rigidum ex statu initiali in alium quemcunque statum fuerit translatum, in eo semper talis axis assignari possit, cujus directio in utroque statu maneat invariata: haec pulcherrima proprietas mihi statim visa est, eximium subsidium suppeditare, unde omnia, quae ad motum hujusmodi corporum pertinent, multo facilius et sine tanta farragine tot quantitatum variabilium definiri possent. Postquam enim motus centri gravitatis fuerit definitus, in statu initiali ille quaeratur axis, qui in statu translato etiamnunc eandem servat directionem; tum vero quaeratur angulus, quo corpus interea circa hunc axem fuerit conversum. Hocque modo ad quodvis tempus situs corporis perfecte cognoscetur, ita ut tota investigatio ad determinationem istius axis pro quovis tempore cum angulo conversionis reducatur, quamobrem istam ideam hic adcuratius sum persecuturus.

990. Consideremus igitur corpus in statu suo initiali, in quo pro lubitu accipiamus punctum quodcunque, per quod ducamus ternos axes fixos inter se normales, quorum respectu situs singulorum elementorum corporis more solito per ternas coordinatas definiri queat. Illud quidem punctum in tractatu meo in ipso centro gravitatis corporis constitui; verum nunc nihil referre observavi, si in alio quocunque loco constituatur. Deinde etiam necesse non est, ut terni illi axes sint simul axes principales corporis, sed perinde ac ipsum illud punctum penitus arbitrio relinquuntur. Id tantum hic notasse iuvabit, calculos sequentes multo fore faciliores et concinniores, si illud punctum in ipso centro inertiae accipiatur simulque terni axes fuerint principales, pro statu scilicet corporis initialis. Tum vero ex illo puncto tanquam centro corpori Sphaera circumscribi concipiatur, cum ipso corpore firmiter cohaerens et cum ipso simul mobilis, cujus radius unitate indicetur, ut hoc modo omnes investigationes ad doctrinam sphaericam revocari queant, quandoquidem hoc pacto omnes calculi multo facilius expediri poterunt.

991. Repraesentet igitur triangulum sphaericum ABC octantem sphaerae, cujus centro adscripta intelligatur littera I, unde rectae eductae IA, IB et IC referant ternos illos axes fixos, ita ut arcus AB, BC, CA sint quadrantes inter se angulos rectos A, B, C constituentes. Tum vero ad situm singulorum elementorum corporis cognoscendum, per quodvis eorum ductus intelligatur radius IZ, et ex puncto Z agantur terni arcus ZA, ZB, ZC, qui vocentur $ZA = \zeta$, $ZB = \eta$ et $ZC = \vartheta$; tum enim si distantia elementi corporis a centro I dicatur $= s$, ternae coordinatae axibus IA, IB, IC parallelae erunt $s \cos\zeta$, $s \cos\eta$, $s \cos\vartheta$; quibus ergo Fig. 143.

 situs

situs cujusque elementi in statu initiali more solito determinabitur. Semper autem ex natura trianguli Sphaerici ABC erit $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2 = 1$; praeterea vero ex sphaericis notentur sequentes determinationes

$$\cos BAZ = \frac{\cos\eta}{\sin\zeta};\ \cos ABZ = \frac{\cos\zeta}{\sin\eta};\ \cos BCZ = \frac{\cos\eta}{\sin\vartheta}$$

$$\sin BAZ = \frac{\cos\vartheta}{\sin\zeta};\ \sin ABZ = \frac{\cos\vartheta}{\sin\eta};\ \sin BCZ = \frac{\cos\zeta}{\sin\vartheta}..$$

Porro vero erit

$$\cos AZB = -\frac{\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \cos BZC = -\frac{\cos\eta\cos\vartheta}{\sin\eta\sin\vartheta};\ \cos CZA = -\frac{\cos\zeta\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\vartheta}$$

$$\sin AZB = +\frac{\cos\vartheta}{\sin\zeta\sin\eta};\ \sin BZC = +\frac{\cos\zeta}{\sin\eta\sin\vartheta};\ \sin CZA = +\frac{\cos\eta}{\sin\zeta\sin\vartheta}.$$

992. His pro statu initiali definitis consideremus statum corporis, in quo elapso tempore $= t$ reperietur; ac primo quidem in quemcunque locum centrum I fuerit translatum, quandoquidem ejus determinatio nulla difficultate laborat, ejus locus cogitatione saltem in punctum I transferatur, simulque cum eo totum corpus, motu scilicet sibi parallelo. Et quoniam in situ translato semper datur talis radius, cujus directio eadem est atque in statu initiali, sit O in superficie sphaerica id punctum, quod tam in statu initiali quam in translato post tempus t eundem locum occupat, ita ut radius eandem directionem obtineat pro utroque corporis statu. Pro ejus ergo situ ducantur ad angulos arcus OA, OB et OC, qui vocentur $OA = \alpha$, $OB = \beta$ et $OC = \gamma$, quos ergo tanquam certas functiones temporis t spectari oportet, atque ex his nanciscemur sequentes determinationes:

$$\cos OAB = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha};\ \cos ABO = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta};\ \cos BCO = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$\sin OAB = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha};\ \sin ABO = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta};\ \sin BCO = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Porro vero erit

$$\cos AOB = -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta};\ \cos BOC = -\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma};\ \cos COA = -\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$\sin AOB = -\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta};\ \sin BOC = -\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma};\ \sin COA = -\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Insuper vero erit ut ante $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$.

993.

993. Sit jam φ ille angulus, per quem totum corpus tempore $= t$ circa radium IO fuerit conversum, ita ut angulus φ etiam spectandus sit tanquam functio temporis t, dum arcus primum introducti ζ, η, ϑ, tantum a variabilitate cujusque elementi corporis ad quod referuntur pendent. Punctum igitur sphaerae, quod initio erat in Z, nunc elapso tempore $= t$ sit translatum erit in z, ut ductis arcubus OZ et Oz futurus sit angulus Z$Oz = \varphi$ existente Oz = OZ. Hinc ergo si istius puncti z quaerantur distantiae ab angulis ABC, cognoscetur verus situs, in quem radius corporis IZ a situ initiali elapso tempore $= t$ erit translatus. Quamobrem pro motu corporis perfecte cognoscendo totum negotium eo reducitur, ut pro quovis tempore elapso $= t$ tam situs puncti O sive arcus α, β, γ quam angulus ZO$z = \varphi$ determinentur; quandoquidem hoc modo ad quodvis tempus verus situs singulorum corporis elementorum assignari poterit.

994. Cum igitur distantiae puncti z ab angulis ABC ante omnia debeant indagari, investigemus primo distantiam Az; quod quo facilius fieri possit, in figura nullas alias lineas repraesentemus praeter eas, quae ad hunc scopum referuntur. Ac primo quidem quaeri debebit quantitas arcus OZ ex triangulo OAZ, in quo habentur arcus OA $= \alpha$ et arcus ZA $= \zeta$. Praeterea vero definiri poterimus angulum OAZ ex angulis BAO et BAZ, cum sit OAZ = BAO − BAZ ideoque sin OAZ = sin BAO cos BAZ Fig. 144.

$$- \cos BAO \sin BAZ = \frac{\cos\gamma \cos\eta - \cos\beta \cos\vartheta}{\sin\alpha \sin\zeta} \text{ et } \cos OAZ = \cos BAO$$

$$\cos BAZ + \sin BAO \sin BAZ = \frac{\cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta}{\sin\alpha \sin\zeta} \text{ et tang OAZ}$$

$$= \frac{\cos\gamma \cos\eta - \cos\beta \cos\vartheta}{\cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta}$$ quibus notatis per sphaerica fiet cos OZ

$$= \cos\alpha \cos\zeta + \cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta \text{ et tang AOZ}$$

$$= \frac{\cos\gamma \cos\eta - \cos\beta \cos\vartheta}{\sin\alpha^2 \cos\zeta - \cos\alpha (\cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta)}.$$

995. Ponamus autem ad abbreviandum angulum OAZ = A, ita ut

$$\text{sit } \sin A = \frac{\cos\gamma \cos\eta - \cos\beta \cos\vartheta}{\sin\alpha \sin\zeta}; \ \cos A = \frac{\cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta}{\sin\alpha \sin\zeta}$$

$$\text{et tang } A = \frac{\cos\gamma \cos\eta - \cos\beta \cos\vartheta}{\cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta};$$ pro quaesitis autem sit arcus OZ = Z et angulus AOZ = O, atque integrale OAZ erit cos Z = cos α

cos ζ

$\cos\zeta + \sin\alpha \sin\zeta \cos A$ et $\tang O = \dfrac{\sin\zeta \sin A}{\sin\alpha \cos\zeta - \cos\alpha \sin\zeta \cos A}$, unde si loco A valor inventus scribatur, prodibit uti jam invenimus $\cos Z = \cos\alpha \cos\zeta + \cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta$ et $\tang O$

$$= \frac{\cos\gamma \cos\eta - \cos\beta \cos\vartheta}{\sin\alpha^2 \cos\zeta - \cos\alpha (\cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\vartheta)}.$$

996. His jam inventis aggrediamur triangulum sphaericum AOz, in quo cognoscimus bina latera $OA = \alpha$ et $Oz = Z$, una cum angulo intercepto $AOz = O + \varphi$, unde colligimus $\cos Az = \cos\alpha \cos Z + \sin\alpha \sin Z \cos(O + \varphi)$ quae ergo expressio reducitur ad hanc: $\cos Az = \cos\alpha \cos Z + \sin\alpha \sin Z \cos O \cos\varphi - \sin\alpha \sin Z \sin O \sin\varphi$ ubi jam definivimus $\cos Z$. Verum tam $\sin Z$ quam $\sin O$ et $\cos O$ non habentur evoluti; neque vero conducit has quantitates immediate ex inventis derivare, quoniam perveniremus ad signa radicalia, quae, utrum positive an negative capi debeant incertum maneret. Quamobrem hanc evolutionem sequenti modo institui conveniet.

997. Ex triangulo AOZ statim deducimus hanc proportionem: $\sin A : \sin Z = \sin O : \sin\zeta$, unde colligitur $\sin O = \dfrac{\sin A \sin\zeta}{\sin Z}$, qui divisus per $\tang O$ praebet $\cos O = \dfrac{\sin\alpha \cos\zeta - \cos\alpha \sin\zeta \cos A}{\sin Z}$. Ex quibus ergo formulis sponte se produnt illae ipsae formulae, quibus indigemus: scilicet $\sin Z \sin O$ et $\sin Z \cos O$; quare, si pro $\cos Z$ inventum valorem substituamus, perveniemus ad istam expressionem: $\cos Az = \cos\alpha^2 \cos\zeta + \sin\alpha \cos\alpha \sin\zeta \cos A + \sin\alpha^2 \cos\varphi \cos\zeta, - \sin\alpha \cos\alpha \cos\varphi \sin\zeta \cos A - \sin\alpha \sin\varphi \sin\zeta \sin A$. Eliso igitur angulo A ista expressio sequentem induet formam: $\cos Az = \cos\alpha^2 \cos\zeta + \cos\alpha \cos\beta \cos\eta + \cos\alpha \cos\gamma \cos\vartheta + \sin\alpha^2 \cos\varphi \cos\zeta - \cos\alpha \cos\varphi \cos\beta \cos\eta - \cos\alpha \cos\varphi \cos\gamma \cos\vartheta - \sin\varphi \cos\gamma \cos\eta + \sin\varphi \cos\beta \cos\vartheta$.

998. Ista expressio eo magis est notatu digna, quod non solum nullis inquinata sit fractionibus, sed etiam in singulis terminis tantum occurrant cosinus trium angulorum ζ, η et ϑ sinibus penitus exclusis. Hanc ob caussam singulos hos terminos secundum istos ternos cosinus ordinemus, sicque impetrabimus sequentem formam: $\cos Az = \cos\zeta (\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \cos\varphi) + \cos\eta (\cos\alpha \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta \cos\varphi - \cos\gamma \sin\varphi) + \cos\vartheta (\cos\alpha \cos\gamma - \cos\alpha \cos\gamma \cos\varphi + \cos\beta \sin\varphi)$ ubi meminisse juvabit,

bit,

sit, angulos ζ, η, ϑ tantum ad situm initialem spectare, iisque locum cujuslibet elementi corporis definiri, neque igitur a tempore pendere; dum contra reliqui anguli α, β, γ, ϕ sunt functiones ipsius temporis t tantum.

999. Facta hac evolutione pro arcu Az superfluum plane foret, si similem investigationem pro duobus reliquis arcubus Bz et Cz instituere vellemus. Cum enim tria puncta A, B, C sint inter se permutabilia, tantum opus erit, ut tam anguli ζ, η, ϑ, quam α, β, γ secundum ordinem promoveantur, dum interea angulus ϕ idem conservatur. Hoc igitur modo reperiemus sequentes expressiones

$$\cos Bz = \cos\eta\,(\cos\beta^2 + \sin\beta^2 \cos\phi) + \cos\vartheta\,(\cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma\cos\phi - \cos\alpha\sin\phi) + \cos\zeta\,(\cos\beta\cos\alpha - \cos\beta\cos\alpha\cos\phi + \cos\gamma\sin\phi)$$

$$\cos Cz = \cos\vartheta\,(\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\phi) + \cos\zeta\,(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha\cos\phi - \cos\beta\sin\phi) + \cos\eta\,(\cos\gamma\cos\beta - \cos\gamma\cos\beta\cos\phi + \cos\alpha\sin\phi).$$

1000. Statuamus nunc brevitatis gratia pro situ translato puncti Z $Az = \zeta'$, $Bz = \eta'$, $Cz = \vartheta'$, ex quorum valoribus coordinatae pro isto puncto deinceps formabuntur. Cosinus ergo horum trium arcuum hic junctim aspectui exponamus

$$\cos\zeta' = \cos\zeta\,(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\phi) + \cos\eta\,(\cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\phi) - \cos\gamma\sin\phi) + \cos\vartheta\,(\cos\alpha\cos\gamma\,(1-\cos\phi) + \cos\beta\sin\phi)$$

$$\cos\eta' = \cos\eta\,(\cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\phi) + \cos\vartheta\,(\cos\beta\cos\gamma\,(1-\cos\phi) - \cos\alpha\sin\phi) + \cos\zeta\,(\cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\phi) + \cos\gamma\sin\phi)$$

$$\cos\vartheta' = \cos\vartheta\,(\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\phi) + \cos\zeta\,(\cos\alpha\cos\gamma\,(1-\cos\phi) - \cos\beta\sin\phi) + \cos\eta\,(\cos\beta\cos\gamma\,(1-\cos\phi) + \cos\alpha\sin\phi).$$

1001. Operae pretium hic erit nonnullos situs principales puncti Z contemplari. Sumamus igitur primo punctum Z in ipso puncto A; ita ut sit $\zeta = 0$ et $\eta = \vartheta = 90°$; unde pro situ puncti z erit

$$\cos\zeta' = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos\phi = 1 - \sin\alpha^2\,(1-\cos\phi)$$
$$\cos\eta' = \cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\phi) + \cos\gamma\sin\phi$$
$$\cos\vartheta' = \cos\alpha\cos\gamma\,(1-\cos\phi) - \cos\beta\sin\phi.$$

Simili modo si punctum Z capiatur in puncto B, ita ut sit $\zeta = \vartheta = 90°$ et $\eta = 0$, tum erit pro situ puncti z

$$\cos\zeta' = \cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\phi) - \cos\gamma\sin\phi$$
$$\cos\eta' = \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos\phi = 1 - \sin\beta^2\,(1-\cos\phi)$$
$$\cos\vartheta' = \cos\beta\cos\gamma\,(1-\cos\phi) + \cos\alpha\sin\phi.$$

Sin autem denique punctum Z capiatur in puncto C tum locus puncti z ita determinabitur, ut sit

$$\cos\zeta' = \cos\alpha \cos\gamma (1 - \cos\phi) + \cos\beta \sin\phi$$
$$\cos\eta' = \cos\beta \cos\gamma (1 - \cos\phi) - \cos\alpha \sin\phi$$
$$\cos\vartheta' = 1 - \sin\gamma^2 (1 - \cos\phi).$$

1002. Istae novem formulae ideo omni attentione sunt dignae, quod ex iis formulae generales pro $\cos\zeta'$, $\cos\eta'$, $\cos\vartheta'$ ex illis tam pulchre componuntur. Manifestum enim est, formulam generalem pro $\cos\zeta'$ compositam esse ex tribus formulis specialibus pro $\cos\zeta'$ modo inventis. Simili modo formula generalis pro $\cos\eta'$ componitur ex ternis formulis specialibus ejusdem nominis. Tandem etiam formula generalis $\cos\vartheta$ componitur ex ternis specialibus pro eodem angulo.

1003. Haec insignis proprietas, quae inter translationes punctorum A, B, C et alius cujusvis puncti Z intercedit, maxime est memoratu digna, atque omnino meretur, ut diligentius perpendatur; quam ob rem eam in sequenti Theoremate generalissimo complecti conveniet, cujus veritas ex calculis, quos modo absolvimus satis elucet, dum alias profundissimas indagationes postularet.

THEOREMA.

Fig. 145. 1004. Si sphaera circa centrum suum fixum utcunque de situ suo deturbetur, ut terna ejus puncta A, B, C in ejus superficie quadrantibus a se invicem distantia transferantur in puncta a, b, c; tum aliud punctum quodcunque Z ita transferetur in z ut sit

$$\text{I. } \cos zA = \cos ZA \cos aA + \cos ZB \cos aB + \cos ZC \cos aC$$
$$\text{II. } \cos zB = \cos ZB \cos bB + \cos ZC \cos bC + \cos ZA \cos bA$$
$$\text{III. } \cos zC = \cos ZC \cos cC + \cos ZA \cos cA + \cos ZB \cos cB.$$

1005. Quoniam puncta litteris majusculis et minusculis designata inter se permutare licet, ita ut minusculae pertineant ad statum initialem, majusculae vero ad statum mutatum: aequationes etiam sequentes veritati erunt consentaneae

$$\text{I. } \cos Za = \cos za \cos Aa + \cos zb \cos Ab + \cos zc \cos Ac$$
$$\text{II. } \cos Zb = \cos zb \cos Bb + \cos zc \cos Bc + \cos za \cos Ba$$
$$\text{III. } \cos Zc = \cos zc \cos Cc + \cos za \cos Ca + \cos zb \cos Cb.$$

APPLI-

APPLICATIO HORUM SYMPTOMATUM AD COORDINATAS ORTHOGONALES.

1006. Applicemus nunc omnes formulas, quas hactenus invenimus, ad ternas coordinatas, directionibus fixis IA, IB, IC parallelas. Ac primo quidem pro statu initiali consideremus elementum corporis quodcunque in Z, pro cujus loco statuamus coordinatas $IX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$; unde si distantia istius puncti Z a centro I vocetur $= s$, evidens est, si istud punctum Z in eo sphaerae radio accipiatur, qui ante per punctum Z transibat, fore $X = s \cos\zeta$, $Y = s \cos\eta$, $Z = s \cos\vartheta$. Hinc igitur erit $s^2 = XX + YY + ZZ$. Simili modo pro radio illo IO, cujus directio in statu translato non mutatur, ternae coordinatae inter se erunt ut cosinus angulorum α, β, γ, quas autem in figura exprimere non est opus. Fig. 146.

1007. Iam elapso tempore $= t$, quod perpetuo in minutis secundis exprimi assumimus translatum sit centrum corporis I in punctum i, pro quo vocemus coordinatas $If = f$, $fi = g$, $ig = h$. Punctum autem, quod ante fuerat in Z nunc reperiatur in z, pro quo vocemus coordinatas $lx = x$, $xy = y$, $yz = z$, et quoniam istud punctum z perinde se habet respectu puncti i, ut in praecedentibus figuris punctum Z ad centrum I, ita ut sit distantia $iz = s$: ut ante manifestum est esse debere $x - f = s \cos\zeta'$, $y - g = s \cos\eta'$, $z - h = s \cos\vartheta'$.

1008. Quod si jam loco horum cosinuum, valores supra inventos substituamus, ob $s \cos\zeta = X$, $s \cos\eta = Y$, $s \cos\vartheta = Z$ nanciscemur sequentes valores:

$$x = f + X(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \cos\varphi) + Y(\cos\alpha \cos\beta(1 - \cos\varphi) - \cos\gamma \sin\varphi) + Z(\cos\alpha \cos\gamma(1 - \cos\varphi) + \cos\beta \sin\varphi)$$

$$y = g + Y(\cos\beta^2 + \sin\beta^2 \cos\varphi) + Z(\cos\beta \cos\gamma(1 - \cos\varphi) - \cos\alpha \sin\varphi) + X(\cos\alpha \cos\beta(1 - \cos\varphi) + \cos\gamma \sin\varphi)$$

$$z = h + Z(\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\varphi) + X(\cos\alpha \cos\gamma(1 - \cos\varphi) - \cos\beta \sin\varphi) + Y(\cos\beta \cos\gamma(1 - \cos\varphi) + \cos\alpha \sin\varphi).$$

1009. Quoniam autem istae expressiones nimis sunt complicatae, ponamus brevitatis gratia

$$x = f + FX + F'Y + F''Z$$
$$y = g + GX + G'Y + G''Z$$
$$z = h + HX + H'Y + H''Z$$

 ita

ita ut sit

$$F = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 \cos\phi$$
$$G = \cos\alpha \cos\beta\,(1 - \cos\phi) + \cos\gamma \sin\phi$$
$$H = \cos\alpha \cos\gamma\,(1 - \cos\phi) - \cos\beta \sin\phi$$

$$F' = \cos\alpha \cos\beta\,(1 - \cos\phi) - \cos\gamma \sin\phi$$
$$G' = \cos\beta^2 + \sin\beta^2 \cos\phi$$
$$H' = \cos\beta \cos\gamma\,(1 - \cos\phi) + \cos\alpha \sin\phi$$

$$F'' = \cos\alpha \cos\gamma\,(1 - \cos\phi) + \cos\beta \sin\phi$$
$$G'' = \cos\beta \cos\gamma\,(1 - \cos\phi) - \cos\alpha \sin\phi$$
$$H'' = \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\phi.$$

1010. Cum jam distantia puncti iz etiamnunc aequalis esse debeat distantiae IZ, ideoque $(x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, calculum instituendo comperietur revera fore

$$FF + GG + HH = 1 \qquad FF' + GG' + HH' = 0$$
$$F'F' + G'G' + H'H' = 1 \qquad F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0$$
$$F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1 \qquad FF'' + GG'' + HH'' = 0.$$

Atque de hoc satis sumus certi, etiamsi calculus non parum fieret molestus.

FORMULAE GENERALES PRO MOTU CORPORUM RIGIDORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATORUM.

1011. Consideremus igitur corpus quodcunque rigidum, inquo pro lubitu certum punctum pro centro I fuerit assumtum, et cujus ternae directiones fixae IA, IB, IC in situ initiali, se invicem normaliter decussent, quorum respectu singulorum corporis elementorum loca per ternas coordinatas X, Y et Z determinentur. Designetur autem elementum corporis in puncto Z constituti charactere dM ita ut littera M, denotet massam totius corporis; ubi ergo probe notetur, has tres variabiles X, Y, Z tantum ad statum corporis initialem pertinere, neque ullo modo a tempore t pendere.

1012. His igitur pro statu initiali constitutis, ubi corpori motus quicunque impressus fuisse est concipiendus. Hunc in finem ponamus elapso tempore t centrum corporis I pervenisse in i, elementum vero dM, quod in puncto Z consideravimus translatum fuisse in punctum z, cujus locus per coordinatas x, y, z supra assignatas definiatur; locum autem centri i per coordinatas f, g, h exhiberi. Hic igitur non solum tres quantitates f, g, h certae erunt functiones temporis, tam ex motu corpori impresso

quam

quam ex viribus sollicitantibus determinandae, sed etiam litterae F, G, H cum suis derivatis tanquam tales functiones erunt spectandae; quandoquidem per angulos α, β, γ et ϕ, qui sunt functiones temporis, exprimuntur. Totum negotium enim eo redit, ut tam ex motu corpori initio impressio, quam viribus sollicitantibus ad quodvis tempus tam valores litterarum f, g, h quam angulorum α, β, γ et ϕ eliciantur, quippe quibus inventis motus corporis perfecte cognoscetur.

1013. Cum nunc elementum corporis quodcunque in genere consideratum versetur in puncto z, cujus locus per duplicis generis quantitates variabiles exprimitur, quarum tres X, Y, Z referuntur ad locum Z, quem in statu initiali obtinuit: reliquae vero sunt functiones temporis Ex harum posteriorum igitur variabilitate tam motus hujus elementi quam ejus acceleratio determinari poterit, id quod commodissime fiet, si ejus motum secundum ternas directiones fixus IA, IB et IC resolvamus, unde primo ternas celeritates ejusdem elementi, hincque porro etiam accelerationes secundum easdem directiones definire licebit. Sumto igitur solo tempore t pro variabili, formulae $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ dabunt illas ternas celeritates, differentialia autem secunda $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ accelerationes.

1014. Quod si nunc simili modo omnes vires, quibus corpus hoc tempore sollicitatur etiam secundum istas ternas directiones resolvantur, atque ex omnibus conjunctis pro directionibus IA, IB, IC vires oriantur P, Q et R, per principia motus necesse est, ut istae vires aequentur summis omnium virium acceleratricium, quae ex omnibus corporis elementis dM junctim sumtis nascuntur. Scilicet si g denotet altitudinem lapsus gravium uno minuto secundo, loco $2g$ autem scribamus litteram i, quoniam littera g jam tanquam functio temporis in calculum ingreditur impetrabimus tres aequationes sequentes:

$$\int dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iP$$

$$\int dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iQ$$

$$\int dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iR$$

 ubi

ubi signum integrationis solas variabiles X, Y et Z respicit, ita ut in his integrationibus tempus t tanquam constans spectari debeat, etiamsi in formulis differentialibus id solum pro variabili est habitum. Praeterea vero etiam omnia momenta virium acceleratricium respectu ternorum axium fixorum simul sumta aequari debent momentis, quae ex omnibus viribus sollicitantibus respectu eorundem axium deducuntur; quamobrem designemus ista momenta, quae ex omnibus viribus sollicitantibus pro ternis axibus IA, IB, IC nascuntur, litteris S, T, V, ita ut his quantitabus per i multiplicatis summae omnium momentorum elementarium, quas singulae vires acceleratrices suppeditant aequari debeant.

1015. Cum igitur elemento dM, quod in puncto z concipimus, primo applicata sit vis $= dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ secundum directionem IA agens, ex ea nullum nascitur momentum pro hoc axe; pro axe autem IB nascetur momentum $= z\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ et pro axe IC momentum $= y\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Simili modo ex vi acceleratrice secundum directionem IB, quae est $dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ nascitur momentum pro axe IA $= z\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, at pro axe IC momentum $= x\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$. Denique ex vi acceleratrice secundum IC, quae est $dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ nascitur momentum pro axe IA $= y\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ et pro axe IB momentum $= x\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$. Hinc igitur pro quolibet axe habemus bina momenta elementaria, quae in partes contrarias vergunt; unde pro axe IA summa omnium momentorum elementarium erit $+\int z\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - \int y\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iS$. Eodem modo pro axe IB obtinebimus hanc aequationem:

$$\int x\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \int z\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iT.$$

Tertia vero aequatio erit pro axe IC

$$\int y\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - \int x\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iU.$$

1016.

1016. Hac igitur ratione ſex nacti ſumus aequationes, quas hic conjunctim conſpectui exponamus

$$\text{I. } \int dM \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iP \quad \text{IV. } \int z dM \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - \int y dM \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iS$$

$$\text{II. } \int dM \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iQ \quad \text{V. } \int x dM \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \int z dM \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iT$$

$$\text{III. } \int dM \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iR \quad \text{VI. } \int y dM \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - \int x dM \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iV.$$

In quibus formulis integralibus ſolae litterae majuſculae X, Y et Z pro variabilibus habentur, dum contra in formulis differentialibus ſolae quantitates a tempore t pendentes tanquam variabiles ſpectantur.

1017. Ut nunc iſtas formulas rite evolvamus, pro ternis coordinatis x, y, z valores contractos § 1009. datos adhibeamus, et quoniam in formulis differentialibus quantitates X, Y, Z ut conſtantes ſpectantur habebimus

$$\frac{ddx}{dt^2} = \left(\frac{ddf}{dt^2}\right) + X\left(\frac{ddF}{dt^2}\right) + Y\left(\frac{ddF'}{dt^2}\right) + Z\left(\frac{ddF''}{dt^2}\right)$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = \left(\frac{ddg}{dt^2}\right) + X\left(\frac{ddG}{dt^2}\right) + Y\left(\frac{ddG'}{dt^2}\right) + Z\left(\frac{ddG''}{dt^2}\right)$$

$$\frac{ddz}{dt^2} = \left(\frac{ddh}{dt^2}\right) + X\left(\frac{ddH}{dt^2}\right) + Y\left(\frac{ddH'}{dt^2}\right) + Z\left(\frac{ddH''}{dt^2}\right).$$

Facile autem intelligitur, ſi iſtos valores in ſuperioribus ſex aequationibus ſubſtituere vellemus, formas maxime diffuſas eſſe prodituras, quas tamen operae pretium erit hic adhibuiſſe.

1018. Subſtituamus ergo actu loco litterarum x, y, z et formularum $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ valores ante evolutos, et ſex aequationes noſtrae ſequenti modo exprimentur:

$$\text{I. } iP = \left(\frac{ddf}{dt^2}\right)\int dM + \left(\frac{ddF}{dt^2}\right)\int X dM + \left(\frac{ddF'}{dt^2}\right)\int Y dM$$
$$+ \left(\frac{ddF''}{dt^2}\right)\int Z dM$$

II. iQ

$$\text{II. } iQ = \left(\frac{ddg}{dt^2}\right)\int dM + \left(\frac{ddG}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{ddG'}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{ddG''}{dt^2}\right)\int Z\,dM$$

$$\text{III. } iR = \left(\frac{ddh}{dt^2}\right)\int dM + \left(\frac{ddH}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{ddH'}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{ddH'}{dt^2}\right)\int Z\,dM$$

$$\text{IV. } iS = \left(\frac{hddg - gddh}{dt^2}\right)\int dM$$

$$+ \left(\frac{hddG - Gddh}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{Hddg - gddH}{dt^2}\right)\int X\,dM$$

$$+ \left(\frac{hddG' - G'ddh}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{H'ddg - gddH'}{dt^2}\right)\int Y\,dM$$

$$+ \left(\frac{hddG'' - G''ddh}{dt^2}\right)\int Z\,dM + \left(\frac{H''ddg - gddH''}{dt^2}\right)\int Z\,dM$$

$$+ \left(\frac{HddG - GddH}{dt^2}\right)\int X^2\,dM + \left(\frac{H'ddG' - G'ddH'}{dt^2}\right)\int Y^2\,dM$$

$$+ \left(\frac{H''ddG'' - G''ddH'}{dt^2}\right)\int Z^2\,dM$$

$$+ \left(\frac{H'ddG - G'ddH'}{dt^2}\right)\int XY\,dM + \left(\frac{H'ddG - G'ddH}{dt^2}\right)\int XY\,dM$$

$$+ \left(\frac{H'ddG'' - G''ddH'}{dt^2}\right)\int YZ\,dM + \left(\frac{H''ddG' - G'ddH''}{dt^2}\right)\int YZ\,dM$$

$$+ \left(\frac{HddG'' - G''ddH}{dt^2}\right)\int XZ\,dM + \left(\frac{H''ddG - GddH}{dt^2}\right)\int XZ\,dM$$

$$\text{V. } iT = \left(\frac{fddh - hddf}{dt^2}\right)\int dM$$

$$+ \left(\frac{fddH - Hddf}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{Fddh - hddF}{dt^2}\right)\int X\,dM$$

$$+ \left(\frac{fddH' - H'ddf}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{F'ddh - hddF'}{dt^2}\right)\int Y\,dM$$

+

$$+\left(\frac{fddH'' - H''ddf}{dt^2}\right)\int Z dM + \left(\frac{F''ddh - hddF''}{dt^2}\right)\int Z dM$$

$$+\left(\frac{FddH - HddF}{dt^2}\right)\int X^2 dM + \left(\frac{F'ddH' - H'ddF'}{dt^2}\right)\int Y^2 dM$$

$$+\left(\frac{F''ddH'' - H''ddF'}{dt^2}\right)\int Z^2 dM$$

$$+\left(\frac{FddH' - H'ddF}{dt^2}\right)\int XY dM + \left(\frac{F'ddH - HddF'}{dt^2}\right)\int XY dM$$

$$+\left(\frac{F'ddH'' - H''ddF'}{dt^2}\right)\int YZ dM + \left(\frac{F''ddH' - H'ddF''}{dt^2}\right)\int YZ dM$$

$$+\left(\frac{FddH'' - H''ddF}{dt^2}\right)\int XZ dM + \left(\frac{F''ddH - HddF''}{dt^2}\right)\int XZ dM$$

$$\text{VI. } iU = \left(\frac{gddf - fddg}{dt^2}\right)\int dM$$

$$+\left(\frac{gddF - Fddg}{dt^2}\right)\int X dM + \left(\frac{Gddf - fddG}{dt^2}\right)\int X dM$$

$$+\left(\frac{gddF' - F'ddg}{dt^2}\right)\int Y dM + \left(\frac{G'ddf - fddG'}{dt^2}\right)\int Y dM$$

$$+\left(\frac{gddF'' - F''ddg}{dt^2}\right)\int Z dM + \left(\frac{G''ddf - fddG''}{dt^2}\right)\int Z dM$$

$$+\left(\frac{GddF - FddG}{dt^2}\right)\int X^2 dM + \left(\frac{G'ddF' - F'ddG'}{dt^2}\right)\int Y^2 dM$$

$$+\left(\frac{G''ddF'' - F''ddG''}{dt^2}\right)\int Z^2 dM$$

$$+\left(\frac{GddF' - F'ddG}{dt^2}\right)\int XY dM + \left(\frac{G'ddF - FddG'}{dt^2}\right)\int XY dM$$

$$+\left(\frac{G'ddF'' - F''ddG'}{dt^2}\right)\int YZ dM + \left(\frac{G''ddF' - F'ddG''}{dt^2}\right)\int YZ dM$$

$$+\left(\frac{GddF'' - F''ddG}{dt^2}\right)\int XZ dM + \left(\frac{G''ddF - FddG''}{dt^2}\right)\int XZ dM.$$

1019. In his sex aequationibus formulae integrales, quae tantum ad statum corporis initialem referuntur, ante omnia per totam corporis massam

sunt extendendae; unde earum loco in calculum ingredientur certae quantitates constantes, quas ex figura et indole cujusque corporis definiri oportet. Veluti pro primis membris statim prodit $\int dM = M$ ubi M massam totius corporis denotat. His igitur constantibus loco formularum integralium in nostras aequationes introductis, aliae variabiles non amplius inerunt, nisi quae a solo tempore t pendent: semper enim assumi potest, omnes vires, quibus corpus sollicitari ponimus, ad quodvis tempus esse datas. Quoniam vero hae sex aequationes tantopere sunt complicatae, praecipue si loco litterarum F, G, H &c. suos valores substituere vellemus, in genere nihil praeterea hinc concludere licebit.

1020. Ratio autem, cur istae aequationes tam prolixae evaserunt manifesto in eo est sita, quod tam punctum I quam ternos axes IA, IB, IC in statu initiali prorsus pro lubitu assumsimus. Si enim punctum I in ipso centro gravitatis seu potius inertiae collocamus, ob naturam hujus centri statim istae tres formulae integrales evanescunt

$$\int X dM = 0, \quad \int Y dM = 0, \quad \int Z dM = 0.$$

Si deinde praeterea ternos axes IA, IB, IC in ipsis axibus corporis principalibus constituamus, tum etiam tres sequentes formulae integrales in nihilum abeunt $\int XY dM = 0$, $\int XZ dM = 0$, $\int YZ dM = 0$ quibus igitur omnibus membris deletis nostrae aequationes jam mirifice contrahentur.

1021. Remanebunt autem tantum istae tres formulae integrales

$$\int XX dM, \quad \int YY dM \quad \text{et} \quad \int ZZ dM,$$

quorum valores per totum corpus extensos, si ponamus

$$\int XX dM = A, \quad \int YY dM = B, \quad \int ZZ dM = C$$

sex nostrae aequationes ad sequentes formas reducentur

$$\text{I. } iP = M\left(\frac{ddf}{dt^2}\right). \quad \text{II. } iQ = M\left(\frac{ddg}{dt^2}\right). \quad \text{III. } iR = M\left(\frac{ddh}{dt^2}\right)$$

$$\text{IV. } iS = M\left(\frac{hddg + gddh}{dt^2}\right) + A\left(\frac{HddG - GddH}{dt^2}\right) + B\left(\frac{H'ddG' - G'ddH'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{H''ddG'' - G''ddH''}{dt^2}\right)$$

$$\text{V. } iT = M\left(\frac{fddh - hddf}{dt^2}\right) + A\left(\frac{FddH - HddF}{dt^2}\right) + B\left(\frac{F'ddH' - H'ddF'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{F''ddH'' - H''ddF''}{dt^2}\right)$$

IV. iU

$$\text{VI. } iU = M\left(\frac{gddf - fddg}{dt^2}\right) + A\left(\frac{GddF - FddG}{dt^2}\right) + B\left(\frac{G'ddF' - F'ddG'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{G''ddF'' - F''ddG''}{dt^2}\right).$$

Plus autem hinc in genere pro viribus ſollicitantibus quibuscunque concludere non licet.

APPLICATIO HARUM FORMULARUM AD CASUM QUO CORPUS NULLIS PLANE VIRIBUS SOLLICITATUR.

1022. Conſtituto igitur puncto I in ipſo corporis centro gravitatis, ternae autem rectae IA, IB, IC ſimul corporis axes principales referant, dum ſcilicet in ſtatu initiali verſabatur; atque elapſo tempore $= t$ ob omnes vires P, Q, R et S, T, U evaneſcentes habebimus primo iſtas tres aequationes

$$\text{I. } M\left(\frac{ddf}{dt^2}\right) = 0, \quad \text{II. } M\left(\frac{ddg}{dt^2}\right) = 0, \quad \text{III. } M\left(\frac{ddh}{dt^2}\right) = 0$$

quae ſemel integratae praebent $\frac{df}{dt} = a$, $\frac{dg}{dt} = b$ et $\frac{dh}{dt} = c$ ex quibus formulis cognoſcitur, motum centri gravitatis eſſe aequabilem, ideoque illi aequalem, qui ipſi initio fuerit impreſſus. Hinc autem porro integrando colligitur $f = at$, $g = bt$ et $h = ct$ ſicque via a centro gravitatis deſcripta erit linea recta Ii.

1023. Tres autem reliquae aequationes ita ſe habebunt

$$\text{IV. } 0 = A\frac{(HddG - GddH)}{dt^2} + B\frac{(H'ddG' - G'ddH')}{dt^2} + C\frac{(H''ddG'' - G''ddH'')}{dt^2}$$

$$\text{V. } 0 = A\frac{(FddH - HddF)}{dt^2} + B\frac{(F'ddH' - H'ddF')}{dt^2} + C\frac{(F''ddH'' - H''ddF'')}{dt^2}$$

$$\text{VI. } 0 = A\frac{(GddF - FddG)}{dt^2} + B\frac{(G'ddF' - F'ddG')}{dt^2} + C\frac{(G''ddF'' - F''ddG'')}{dt^2}.$$

Unde per integrationem ſtatim deducimus ſequentes

$$\mathfrak{A}dt = A(HdG - GdH) + B(H'dG' - G'dH') + C(H''dG'' - G''dH'')$$
$$\mathfrak{B}dt = A(FdH - HdF) + B(F'dH' - H'dF') + C(F''dH'' - H''dF'')$$
$$\mathfrak{C}dt = A(GdF - FdG) + B(G'dF' - F'dG') + C(G''dF'' - F''dG'')$$

ubi conſtantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ involuunt motum, qui corpori initio praeter motum centri gravitatis fuerit impreſſus.

1024. Tota igitur solutio perducta est ad istas tres aequationes differentiales primi gradus, quae cum praeter tempus t tantum continent tres variabiles: scilicet angulum ϕ cum angulis α, β, γ, qui uti jam observavimus duobus tantum aequivalent, quoniam est $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$, unde patet, problema esse determinatum. Quod si enim integrationes successerint, ad quodvis tempus istos angulos assignare licebit. Cognoscetur enim per angulos α, β, γ positio illius axis corporis qui post tempus t eandem habet directionem, quam initio habuerat. Deinde vero angulus ϕ ostendet, quantam conversionem totum corpus circa istum axem IO subierit, quemadmodum in prima parte fusius explicavimus.

1025. Quo autem facilius ipsos hos angulos in tres nostras aequationes introducere queamus, quoniam omnia per cosinus angulorum α, β, γ commode exprimi possunt, statuamus brevitatis gratia

$\cos\alpha = p$, $\cos\beta = q$ et $\cos\gamma = r$, ita ut sit

$pp + qq + rr = 1$ ideoque $pdp + qdq + rdr = 0$.

Hinc igitur sequentes habebimus determinationes pro litteris majusculis F, G, H &c. in nostras aequationes ingredientibus

$$F = pp(1 - \cos\phi) + \cos\phi;\quad F' = pq(1 - \cos\phi) - r\sin\phi;$$
$$F'' = pr(1 - \cos\phi) + q\sin\phi$$
$$G = pq(1 - \cos\phi) + r\sin\phi;\quad G' = qq(1 - \cos\phi) + \cos\phi;$$
$$G'' = qr(1 - \cos\phi) - p\sin\phi$$
$$H = pr(1 - \cos\phi) - q\sin\phi;\quad H' = qr(1 - \cos\phi) + p\sin\phi;$$
$$H'' = rr(1 - \cos\phi) + \cos\phi.$$

1026. Videamus igitur, quomodo hos valores commodissime in nostris aequationibus substituere queamus; ubi statim intelligitur, formulam primam $HdG - GdH$ oriri ex differentiatione fractionis $\frac{G}{H}$ omissa divisione per quadratum denominatoris. Cum igitur sit

$$\frac{G}{H} = \frac{pq(1 - \cos\phi) + r\sin\phi}{pr(1 - \cos\phi) - q\sin\phi}$$

differentiationem more solito instituendo prodibit sequens forma:

$$pp(1 - \cos\phi)^2(rdq - qdr) - prrd\phi(1 - \cos\phi) - qqd\sin\phi(1 - \cos\phi)$$
$$- pqqd\phi(1 - \cos\phi) - \sin\phi^2(qdr - rdq) - rrdp\sin\phi(1 - \cos\phi)$$

quae contrahitur in hanc formam:

$$(rdq - qdr)(pp(1 - \cos\phi)^2 + \sin\phi^2) - dp(1 - pp)\sin\phi(1 - \cos\phi) - p$$
$$(1 - pp)d\phi(1 - \cos\phi)$$

quae expressio ergo est valor formulae $HdG - GdH$.

1027. Secunda formula $H'dG' - G'dH'$, deducitur ex differentiatione fractionis $\frac{G'}{H'} = \frac{qq(1 - \cos\phi) + \cos\phi}{qr(1 - \cos\phi) + p \sin\phi}$ unde oritur sequens expressio:

$qq(1 - \cos\phi)^2 (rdq - qdr) - \cos\phi (1 - \cos\phi)(qdr + rdq) - qrd\phi$
$\sin\phi + \sin\phi (1 - \cos\phi)(2pqdq - qqdp) + pqqd\phi (1 - \cos\phi) - pd\phi$
$- dp \sin\phi \cos\phi$ quae reducitur ad sequentem formam:

$-dp \sin\phi (qq(1 - \cos\phi) + \cos\phi) + dq (1 - \cos\phi)(rqq - r \cos\phi$
$(1 + qq) + 2pq \sin\phi) - qdr (1 - \cos\phi)(qq(1 - \cos\phi) + \cos\phi)$
$+ d\phi (qr \sin\phi - pqq(1 - \cos\phi) + p)$.

1028. Tertia denique formula $H''ddG'' - G''ddH''$ formabitur ex fractione $\frac{G''}{H''} = \frac{qr(1 - \cos\phi) - p \sin\phi}{rr(1 - \cos\phi) + \cos\phi}$

Sufficiet enim has tres formulas evolvisse, quoniam sequentes per analogiam inde deducere licebit; at differentiatione instituta prodit ista forma:

$rr(1 - \cos\phi)^2 (rdq - qdr) - prrd\phi \cos\phi (1 - \cos\phi) + prrd\phi$
$\sin\phi^2 + (qdr + rdq) \cos\phi (1 - \cos\phi) + qrd\phi \sin\phi \cos\phi + qrd\phi$
$\sin\phi (1 - \cos\phi) - dp \sin\phi \cos\phi - pd\phi \cos\phi^2 - pd\phi \sin\phi^2$
$+ 2prdr \sin\phi (1 - \cos\phi) - rrdp \sin\phi (1 - \cos\phi)$

quae contrahitur in istam

$-dp \sin\phi (rr(1 - \cos\phi) + \cos\phi) + rdq(1 - \cos\phi)(rr(1 - \cos\phi) + \cos\phi)$
$+ dr (1 - \cos\phi)(2pr \sin\phi - qrr + q \cos\phi (1 + rr)$
$+ d\phi (qr \sin\phi + prr(1 - \cos\phi) - p)$.

1029. Substituantur nunc hi valores in aequatione $\mathfrak{X}dt$, ac prodibit sequens aequatio:

$\mathfrak{X}dt = - Adp(1 - pp) \sin\phi (1 - \cos\phi) + Ardqpp(1 - \cos\phi)^2 + \sin\phi)^2$
$- Aqdr (pp(1 - \cos\phi)^2 + \sin\phi)^2 - Ad\phi (p(1 - pp)(1 - \cos\phi)$
$- Bdp \sin\phi (qq(1 - \cos\phi) + \cos\phi) + Bdq (1 - \cos\phi)(rqq - r$
$\cos\phi (1 + qq) + 2pq \sin\phi) - Bqdr (1 - \cos\phi)(qq(1 - \cos\phi) + \cos\phi)$
$- Bd\phi (qr \sin\phi - pqq(1 - \cos\phi) + p) - Cdp \sin\phi (rr(1 - \cos\phi)$
$+ \cos\phi) + Crdq (1 - \cos\phi)(rr(1 - \cos\phi) + \cos\phi) + Cdr(1 - \cos\phi)$
$(2pr \sin\phi - qrr + q \cos\phi (1 + rr)) + Cd\phi (qr \sin\phi + prr$
$(1 - \cos) - p)$.

Ex hac autem aequatione binae reliquae formabuntur, si litterae

A, B, C, p, q, r promoventur primo in
B, C, A, q, r, p, secundo in
C, A, B, r, p, q.

Forma autem illa etiam sequenti modo commodius exhiberi potest

$$\mathfrak{A}dt = + dp \sin\phi\,(1 - \cos\phi)\,(App - Bqq - Crr) + dp \sin\phi \cos\phi\,(A - B - C) - Adp \sin\phi + rdq\,(1 - \cos\phi)^2\,(App + Bqq + Crr) + rdq \cos\phi\,(1 - \cos\phi)\,(A - B + C) + Ardq\,(1 - \cos\phi) + 2Bpqdq \sin\phi\,(1 - \cos\phi) - qdr\,(1 - \cos\phi)^2\,(App + Bqq + Crr) - qdr \cos\phi\,(1 - \cos\phi)\,(A + B - B) - Aqdr\,(1 - \cos\phi) + 2Cprdr \sin\phi\,(1 - \cos\phi) + pd\phi\,(1 - \cos\phi)\,(App + Bqq + Crr) - qrd\phi \sin\phi\,(B - C) - pd\phi\,A + B + C) + Apd\phi \cos\phi.$$

1030. Quia autem in his aequationibus jam per se valde prolixis variabiles p, q, r et ϕ nimis inter se sunt permixtae, quam ut resolutio generalis suscipi queat, evolvamus ante omnia casum, quo corpus circa axem fixum gyrari potest; qui cum convenire debeat cum axe supra considerato IO, anguli α, β, γ ideoque etiam litterae p, q, r pro constantibus sunt habendae, unde deletis membris, quae differentialia dp, dq, dr implicant, ternae aequationes ad hunc casum erunt

$$\mathfrak{A}dt = pd\phi\,(1 - \cos\phi)(App + Bqq + Crr) - qrd\phi\,(B - C) - pd\phi\,(A + B + C) + Apd\phi \cos\phi$$

$$\mathfrak{B}dt = qd\phi\,(1 - \cos\phi)\,(App + Bqq + Crr) - prd\phi\,C - A) - qd\phi\,(A + B + C) + Bqd\phi \cos\phi$$

$$\mathfrak{C}dt = rd\phi\,(1 - \cos\phi)\,(App + Bqq + Crr) - pqd\phi \sin\phi\,(A - B) - rd\phi\,(A + B + C) + Crd\phi \cos\phi.$$

1031. Cum igitur corpus tali motu gyrari possit, si axis gyrationis incidat in aliquem axem principalem, ponamus eum incidere in axem IA ita ut sit $p = 1$, $q = 0$, et $r = 0$, unde tres nostrae aequationes evadent

$\mathfrak{A}dt = Ad\phi\,(1 - \cos\phi) - d\phi\,(A + B + C) + Ad\phi \cos\phi$ sive

$$\mathfrak{A}dt = - d\phi\,(B + C)$$
$$\mathfrak{B}dt = 0$$
$$\mathfrak{C}dt = 0.$$

Hinc igitur statim patet, hunc casum utique locum habere posse, sumtis constantibus $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$; tum vero $d\phi = \dfrac{-\mathfrak{A}dt}{B + C}$, quamobrem angulus ϕ tempori erit proportionalis, seu motus erit uniformis, uti per se manifestum.

1032. Porro vero etiam notum est, corpus circa omnes axes libere gyrari posse, si omnia momenta fuerint aequalia, hoc est $A = B = C$, unde hae prodeunt aequationes $\dfrac{\mathfrak{A}dt}{A} = - 2pd\phi$; $\dfrac{\mathfrak{B}dt}{A} = - 2qd\phi$; $\dfrac{\mathfrak{C}dt}{A}$

=

$= - 2rd\varphi$ unde manifestum est fore $\frac{d\varphi}{dt}$ quantitatem constantem, ideoque motum gyratorium aequabilem. Quod si ergo statuatur $\frac{d\varphi}{dt} = \Delta$, hinc reperiemus ipsas quantitates p, q, r; erit enim

$$p = -\frac{\mathfrak{A}}{2A\Delta};\ q = -\frac{\mathfrak{B}}{2A\Delta};\ r = -\frac{\mathfrak{C}}{2A\Delta},$$

quare cum sit $pp + qq + rr = 1$ erit $\Delta = \frac{1}{2A}\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}$, sicque omnia per ternas constantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sunt determinata.

1033. Iidem valores prodire debent ex tribus nostris aequationibus, si etiam quantitates p, q, r ut variabiles spectantur, pro casu $A = B = C$; tum autem aequatio prima erit

$$\frac{\mathfrak{A}dt}{A} + 2dp \sin\varphi\,(pp\,(1 - \cos\varphi)\ 1) + 2dq\,(1 - \cos\varphi)(r + pq \sin\varphi) - 2dr\,(1 - \cos\varphi)\,(q - pr \sin\varphi) - 2pd\varphi$$

quae ob $pdp + qdq + rdr = 0$ reducitur ad hanc formam:

$$\text{I.}\ \frac{\mathfrak{A}dt}{A} = -2dp \sin\varphi + 2\,(1 - \cos\varphi)(rdq - qdr) - 2pd\varphi$$

unde duae reliquae per analogiam erunt

$$\text{II.}\ \frac{\mathfrak{B}dt}{A} = -2dq \sin\varphi + 2\,(1 - \cos\varphi)(pdr - rdp) - 2qd\varphi$$

$$\text{III.}\ \frac{\mathfrak{C}dt}{A} = -2dr \sin\varphi + 2\,(1 - \cos\varphi)\,(qdp - pdq) - 2rd\varphi$$

atque jam certi esse possumus, his aequationibus aliter satisfieri non posse nisi modo ante exposito, quo p, q, r sint quantitates constantes, angulus vero φ tempori proportionalis.

1034. Ad hoc ostendendum eliminemus primo elementum $d\varphi$, ac I. q − II. p praebet

$$\frac{\mathfrak{A}qdt - \mathfrak{B}pdt}{A} = -2 \sin\varphi\,(qdp - pdq) - 2dr\,(1 - \cos\varphi)$$

Similimodo II. r − III. q dat

$$\frac{\mathfrak{B}rdt - \mathfrak{C}qdt}{A} = -2 \sin\varphi\,(rdq - qdr) - 2dp\,(1 - \cos\varphi)$$

quibus

quibus adjungi potest haec combinatio: III. p — I. r quae dat

$$\frac{\mathfrak{C}pdt - \mathfrak{A}rdt}{A} = -2\sin\phi\,(pdr - rdp) - 2dq\,(1 - \cos\phi).$$

Atque nunc quidem evidens est, his aequationibus satisfieri, statuendo quantitates p, q, r constantes. Interim tamen hinc non liquet, quod nulla alia solutio locum habere possit. Quam ob rem hinc enascitur insigne Problema analyticum, quomodo haec solutio ex istis formulis derivari debeat, id quod Geometris imprimis commendari meretur.

1035. Ob has igitur difficultates, quae in casu facillimo, ubi $A = B = C$, moram facessunt, multo minus evolutionem generalem tentare licebit; quare, cum aliunde certi simus, etiam in genere succedere debere, quandoquidem eam ope prioris methodi, qua olim sum usus ad finem perducere contigit, nullum est dubium, quin certa dentur artificia analytica nobis adhuc incognita, quae ad hunc scopum perducere valeant. Quia vero talia artificia non solum maximam sagacitatem, sed etiam aciem oculorum postulant, hanc investigationem aliis relinquere sum coactus; quandoquidem hoc argumentum summa attentione Geometrarum dignum est iudicandum.

1036. Fortasse etiam non parum ad felicem successum conferre poterit, si, antequam loco litterarum primo introductarum F, G, H valores suos substituamus, earum relationes mutuas accuratius perpendamus: forsitan enim hinc jam via commodior sese offeret hoc negotium conficiendi. Cum igitur illarum litterarum valores inventi sint isti

$F = pp\,(1 - \cos\phi) + \cos\phi$; $F' = pq\,(1 - \cos\phi) - r\sin\phi$; $F'' = pr\,(1 - \cos\phi) + q\sin\phi$

$G = pq\,(1 - \cos\phi) + r\sin\phi$; $G' = qq\,(1 - \cos\phi) + \cos\phi$; $G'' = qr\,(1 - \cos\phi) - p\sin\phi$

$H = pr\,(1 - \sin\phi) - q\cos\phi$; $H' = qr\,(1 - \cos\phi) + p\sin\phi$; $H'' = rr\,(1 - \cos\phi) + \cos\phi$

ob $pp + qq + rr) = 1$ erit $F + G' + H'' = 1 + 2\cos\phi$.

Tum vero inter reliquas sex harum litterarum binae ingregiae inter se conveniunt, unde sequuntur sequentes relationes

$$G + F' = 2pq\,(1 - \cos\phi)$$
$$G - F' = 2r\sin\phi$$
$$H + F'' = 2pr\,(1 - \cos\phi)$$
$$-H + F'' = 2q\sin\phi)$$
$$H' + G'' = 2qr\,(1 - \cos\phi)$$
$$H' - G'' = 2p\sin\phi$$

hinc

hinc igitur porro erit.

$GG - F'F' = F''F'' - HH = H'H' - G''G'' = 4pqr \sin\phi (1 - \cos\phi).$

Praeterea vero hinc ejusmodi combinationes formari poterunt, in quibus solus angulus ϕ insit, cujusmodi sunt

$$\frac{(F'' - H)(H' - G'')}{G + F'} = 2(1 + \cos\phi)$$

$$\frac{(G - F')(H' - G'')}{H + F''} = 2(1 + \cos\phi)$$

$$\frac{(G - F')(F'' - H)}{H' + G''} = 2(1 + \cos\phi).$$

Caeterum hoc argumentum dignissimum videtur, quod omni studio excolatur; cum inde non solum in Mechanica sed etiam in Analysi egregia incrementa expectari queant.

1037. Antequam hoc argumentum penitus deseram fortasse haud abs re erit annotasse, ternas aequationes §. 1033. satis commode ad duas revocari posse, dum variabilis t, cujus differentiale tantum ingreditur penitus eliminatur, id quod facillime effici poterit primam aequationem per p, secundam per q et tertiam per r multiplicando; tum enim prodibit sequens aequatio satis concinna: $\frac{\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}r}{A} dt + 2d\phi = 0$,

unde statim fit $dt = -\frac{2A\,d\phi}{\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}r}$,

qui valor in duabus tantum aequationibus substitutus suppeditabit duas novas aequationes, in quibus tantum tres variabiles insunt, quarum bina per tertiam determinari oporteret: interim tamen nulla via patet, quomodo hoc commode praestari possit; praecipue hac ratione solutio illa simplex, quae jam a priori constat, prorsus excluderetur. Quia enim quantitates p, q, r sunt constantes, angulus vero ϕ tempori proportionalis, neutiquam fieri potest, ut iste angulus per quantitates p, q, r, exprimatur. Hanc igitur ob caussam illa investigatio omnino deserenda videtur, praecipue cum hujus quaestionis ope methodi olim usitatae jam completam solutionem elicuerim, qua igitur acquiescere debemus.



CAPUT III.

DE MOTU PENDULI CIRCA AXEM CYLINDRICUM, FULCRO DATAE FIGURAE INCUMBENTEM, MOBILIS.

Fig. 147. 1038. Confidero hic pendulum, compositum ex axe cylindrico AABB, cui firmiter connexum sit in medio ipsum corpus penduli EDF figurae cujuscunque; in quo sit punctum G centrum gravitatis totius penduli compositi, unde ad axem cylindri ducta sit normalis GC, quam distantiam vocemus $GC = c$; praeterea vero denotet M massam seu pondus totius hujus penduli, ex cylindro ABAB et mole EDF compositi; tum vero per centrum gravitatis G ducta concipiatur recta IK axi cylindri parallela, cujus respectu sit momentum inertiae totius penduli $= Mkk$, quod scilicet reperitur, si singula penduli elementa, quatenus ex materia constant, in quadrata distantiarum suarum ab ista recta IK multiplicentur et omnia haec producta in unam summam colligantur.

1039. Iam axis cylindricus hujus penduli ABAB utroque termino A et A ita duobus fulcris fixis utrinque aequalibus incumbat, ut perpetuo maneat horizontalis, ita ut istud pendulum, circa axem cylindricum his fulcris incumbentem, libere oscillationes peragere queat, dum perpetuo ab ambobus fulcris pariter manet remotum, ac propterea pressio in ambo fulcra utrinque aequalis spectari poterit. Motum autem hujus penduli catenus tantum hic perscrutari constitui, quatenus ejus oscillationes sunt quam minimae, quandoquidem oscillationes majores in calculos nimis molestos praecipitarent.

Fig. 148. 1040. Consideremus nunc primo pendulum nostrum in statu naturali, in quo perpetuo acquiescee queat; ubi tabula referat planum verticale axem cylindri normaliter trajiciens, sitque MAN figura fulcri, cui axis cylindri AB ex una parte incumbat, dum ex altera parte simili fulcro incumbit; utrumque autem fulcrum MAN excavatum sit in curvaturam circularem, cujus centrum sit in O, ejusque radius vocetur $AO = a$; circulus

culus vero AB referat sectionem transversam verticalem axis cylindrici, circa quem pendulum est mobile, cujus centrum sit in puncto C, et radius $AC = CB = b$. In statu igitur aequilibrii, seu quietis, iste axis incumbet fulcri puncto imo A, per quod si recta verticalis OCA producatur, in ea reperiatur necesse est centrum gravitatis totius penduli G, existente distantia $CG = c$, uti supra posuimus; sicque status aequilibrii nostri penduli perfecte erit determinatus.

1041. Descripto hoc statu aequilibrii concipiamus isti pendulo imprimi motum quemcunque quam minimum, ut scilicet inde oriantur oscillationes quasi infinite parvae. Ad hunc autem motum nobis rite repraesentandum, primo spectari debet motus ipsi centro gravitatis G impressus, cujus directio sit recta horizontalis Gg, secundum quam id primum moveri incipiat, cujus celeritatem ponamus $= n$, quam ergo quasi infinite parvam spectari oportet; praeterea vero ponamus toti pendulo simul motum quempiam angularem imprimi circa axem illum IK horizontalem, qui hic plano tabulae normaliter insistere concipi debet; iste vero motus angularis pariter sit quam minimus, ac vocetur $= \nu$. Hic notetur, litteram n denotare spatium, quod a celeritate centro gravitatis impressa uno minuto secundo percurri posset. Simili modo celeritas angularis ν exhibit angulum, quem motus angularis impressus uno minuto secundo esset confecturus. Postquam igitur talis duplex motus pendulo fuerit impressus, investigari debet totus motus, quo istud pendulum deinceps agitabitur.

1042. Nunc elapso tempore quocunque, quod in minutis secundis expressum sit $= t$, pervenerit centrum gravitatis totius penduli ex G in g, unde ad rectam verticalem agatur horizontalis gp, pro quo situ vocentur coordinatae $Op = x$ ex $pg = y$; ubi notetur primo initio fuisse $x = a + c - b$ et $y = 0$. Nunc vero axis cylindricus penduli fulcro incumbat in puncto a, unde ad centrum fulcri O ducta recta aO, ea simul per axem cylindri c transibit, eritque $ao = a$ et $ac = b$, angulus vero AOa vocetur $= \vartheta$, qui ergo erit quantitas variabilis; unde cum sit $cO = a - b$, si ex c ducatur horizontalis cq, erit $cq = (a - b)\sin\vartheta$ et $Oq = (a - b)\cos\vartheta$. Deinde recta $cg = c$ producatur usque in h, ubi verticalem OG intersecet in h, voceturque angulus $Ahg = \Phi$, qui indicat, quantum situs penduli a situ naturali declinet, cujus ratio ad angulum ϑ sequenti modo definiri poterit. Cum sit $Op = x$ et $Oq = (a - b)\cos\vartheta$, erit intervallum $pq = x - (a - b)\cos\vartheta$; tum vero erit $pg - qc = y - (a - b)\sin\vartheta$; sicque ob $cg^2 = pq^2 + (pg - qc)^2$ jam habebitur ista aequatio:

$$cc = (x - (a - b)\cos\vartheta)^2 + (y - (a - b)\sin\vartheta)^2$$

 sive

sive $cc = xx + yy - 2(a-b)(x \cos\vartheta + y \sin\vartheta) + (a-b)^2$
qua aequatione relatio inter ternas variabiles x, y et ϑ determinatur; praeterea vero pro angulo φ manifestum est fore

$$\tang\varphi = \frac{pg - qc}{pq} = \frac{y - (a-b)\sin\vartheta}{x - (a-b)\cos\vartheta}, \text{ hincque}$$

$$\sin\varphi = \frac{y - (a-b)\sin\vartheta}{c} \text{ et } \cos\vartheta = \frac{x - (a-b)\cos\vartheta}{c}.$$

His igitur aequationibus quatuor variabiles in calculum introductae, x et y, cum angulis ϑ et φ, ad duas revocantur.

1043. Definitio igitur statu, quem pendulum elapso tempore $= t$ tenebit, ut in ejus motum inquiramus, omnes vires, quibus sollicitatur, probe perpendi oportet. Primo autem totum pendulum a propria vi gravitatis urgetur, cujus pondus cum positum sit $= M$, tota haec vis eundem praestabit effectum, ac si ipsi centro gravitatis g in directione verticali gf vis esset applicata $gf = M$. Deinde cum axis cylindricus penduli a fulcro sustentetur in puncto a, utique ipsum fulcrum hic certam sustinebit vim, qua pendulum vicissim ob reactionem a fulcro quasi repelli est censendum, cujus vis directio erit normalis ad contactum, ideoque secundum directionem ac sollicitabit; ipsa autem haec vis etiamnunc est incognita, ac demum ex evolutione motus cognosci poterit. Statuatur igitur ista vis, seu pressio incognita, in directione ac urgens $= \Pi$; ita ut nostrum pendulum revera a duabus viribus sollicitari sit censendum: priore scilicet in directione gf vi $= M$; posteriore vero in directione ac vi $= \Pi$, siquidem animum a frictione abstrahamus. Si enim adesset frictio in contactu a, et cylindrus super fulcro reperet versus N, insuper vis retro versus A urgens esset introducenda, ipsi pressioni Π proportionalis; at vero frictionis considerationem in praesenti investigatione removeamus.

1044. Constitutis viribus, quibus nostrum pendulum agitatur, ipsa motus determinatio ad duo capita revocatur. Primo enim motus ipsius centri gravitatis debet investigari, quo facto insuper motus angularis, quo pendulum circa suum axem IK (fig. 147.) convertitur, exquiri debebit. Quod igitur primo ad motum centri gravitatis attinet, quoniam vis prior M jam in puncto g est applicata, etiam altera vis Π in sua directione in ipsum punctum g est transferenda, quae secundum directiones coordinatarum resoluta dabit vim verticalem secundum pO sive $g\zeta = \Pi \cos\vartheta$ et horizontalem secundum $gp = \Pi \sin\vartheta$, ita ut punctum g verticaliter deorsum urgeatur vi $= M - \Pi \cos\vartheta$, horizontaliter autem secundum gp vi $= \Pi \sin\vartheta$.

1045. Cum igitur celeritas verticalis centri gravitatis g sit $= \frac{dx}{dt}$, celeritas autem horizontalis secundum $gp = \frac{dy}{dt}$, sumto elemento temporis dt constante, accelerationes secundum has directiones erunt $\frac{ddx}{dt^2}$ et $\frac{ddy}{dt^2}$, quas per massam totius penduli M multiplicari oportet, ut producta aequentur viribus acceleratricibus ductis in $2g$, denotante g altitudinem lapsus gravium uno minuto secundo. Hinc igitur nanciscemur duas sequentes aequationes:

$$1^\circ.\ M \frac{ddx}{dt^2} = 2g\,(M - \Pi \cos\vartheta) \text{ et}$$

$$2^\circ.\ M \frac{ddy}{dt^2} = -2g\Pi \sin\vartheta$$

in quibus cum insit vis incognita Π, ea eliminata super erit una aequatio

$$M \left(\frac{ddx \sin\vartheta - ddy \cos\vartheta}{dt^2} \right) = 2gM \sin\vartheta,$$

hincque per M dividendo habebimus $\frac{ddx \sin\vartheta - ddy \cos\vartheta}{dt^2} = 2g \sin\vartheta$.

1046. Deinde pro motu angulari, quoniam pendulum a situ naturali jam declinatum reperitur angulo $Ghg = \phi$, ejus celeritas angularis in sensum Gg erit $= \frac{d\phi}{dt}$, hincque ejus acceleratio in eundem sensum $= \frac{dd\phi}{dt^2}$, quae per ipsum momentum inertiae totius penduli, quod est Mkk, multiplicari, tum vero aequari debet momento virium sollicitantium respectu axis IK (fig. 147.) pariter ducto in $2g$. Quoniam autem vis gravitatis M per ipsum punctum g transit, ejus momentum erit nullum; alterius autem vis Π, quae puncto c applicata secundum cO agit, ejus momentum respectu puncti g erit $= \Pi \cdot cg \cdot \sin Och$. Quia igitur angulus $Och = \phi - \vartheta$, erit istud momentum $= \Pi c \sin(\phi - \vartheta)$, quod tendit ad angulum obliquitatis ϕ diminuendum, unde obtinebitur sequens aequatio:

$$M \frac{kkdd\phi}{dt^2} = -2g\Pi c \sin(\phi - \vartheta),$$

 quae

quae aequatio iterum continet vim incognitam Π, quae autem ope binarum aequationum ante inventarum facile elidi poterit. Cum enim ex illis fiat $M\left(\frac{ddx \cos\vartheta + ddy \sin\vartheta}{dt^2}\right) = 2g\,(M \cos\vartheta - \Pi)$,

erit $\Pi = M \cos\vartheta - M\left(\frac{ddx \cos\vartheta + ddy \sin\vartheta}{2g\,dt^2}\right)$

quo valore substituto et per massam M divisione facta haec postrema aequatio hanc induet formam: $\frac{kkdd\phi}{dt^2} = -2gc \cos\vartheta \sin(\phi - \vartheta)$

$$+ c \sin(\phi - \vartheta)\left(\frac{ddx \cos\vartheta + ddy \sin\vartheta}{dt^2}\right).$$

1047. Universa ergo motus determinatio, etiam pressione incognita Π, perducta est ad duas sequentes aequationes:

1°. $ddx \sin\vartheta - ddy \cos\vartheta = 2g\,dt^2 \sin\vartheta$

2°. $c \sin(\phi - \vartheta)(ddx \cos\vartheta + ddy \sin\vartheta)$
$= kkdd\phi + 2gc\,dt^2 \cos\vartheta \sin(\phi - \vartheta)$.

Cum his autem duabus aequationibus conjungi debent binae conditiones jam supra repertae, quae erant:

3° $cc = xx + yy - 2(a-b)(x \cos\vartheta + y \sin\vartheta) + (a-b)^2$ et

4°. $\tang\phi = \frac{y - (a-b)\sin\vartheta}{x - (a-b)\cos\vartheta}$

ita ut nunc habeamus quatuor aequationes, ex quibus ergo quatuor incognitas x et y cum angulis ϑ et ϕ ita per tempus t definire licebit, ut ad quodvis tempus inde quatuor illae incognitae assignari, sicque totus penduli motus determinari queat. Id quidem in genere maximis difficultatibus foret involutum; verum quia nobis hic tantum propositum est oscillationes quasi infinite parvas indagare, haec conditio formulas inventas ad multo majorem simplicitatem perducet; propterea quod ambo anguli ϑ et ϕ tanquam infinite parvi spectari poterunt; tum vero insuper ordinata y perpetuo quam minima manebit, interea dum etiam alterea x vix ullas sensibiles mutationes subibit.

1048. Ante omnia autem hic observari convenit, cuncta elementa, quae in has aequationes ingrediuntur, ad binos angulos ϑ et ϕ revocari posse; cum enim sit $Oc = a - b$, vocetur haec distantia brevitatis gratia $= e$, ut sit $a - b = e$, ob angulum $AOc = \vartheta$ erit $cq = e \sin\vartheta$ et $Oq = e \cos\vartheta$; deinde quia recta $cg = c$ ad verticalem OA inclinatur angulo

Ahg

$Ahg = \phi$, erit intervallum $qp = c \cos\phi$ et $pg = e \sin\vartheta + c \sin\phi$. Hinc igitur colligimus $Op = x = e \cos\vartheta + c \cos\phi$ et

$$pg = y = e \sin\vartheta + c \sin\phi.$$

1049. Cum igitur nostras investigationes ad oscillationes infinite parvas restringamus, ambo anguli ϑ et ϕ perpetuo manebunt quam minimi, unde sine errore statuere licebit $\sin\vartheta = \vartheta$ et $\sin\phi = \phi$, tum vero $\cos\vartheta = 1$ et $\cos\phi = 1$; ex quo habebimus $x = e + c$, ideoque constans, et $y = e\vartheta + c\phi$; quamobrem aequationes differentio-differentiales, ob $\frac{ddx}{dt^2} = 0$, erunt sequentes:

1°. $0 = 2g(M - \Pi)$, ideoque $\Pi = M$,

2°. $$\frac{M(edd\vartheta + cdd\phi)}{dt^2} = -2g\Pi\vartheta = -2gM\vartheta, \text{ sive}$$

$$\frac{edd\vartheta + cdd\phi}{dt^2} = -2g\vartheta;$$

3°. $$\frac{Mkkdd\phi}{dt^2} = -2g\Pi c(\phi - \vartheta), \text{ sive}$$

$$\frac{kkdd\phi}{dt^2} = -2gc(\phi - \vartheta).$$

1050. Tota ergo motus determinatio pendet a resolutione harum duarum aequationum differentio-differentialium:

1°. $$\frac{edd\vartheta + cdd\phi}{dt^2} = -2g\vartheta \text{ et}$$

2°. $$\frac{kkdd\phi}{dt^2} = -2gc(\phi - \vartheta),$$

ex quibus utrumque angulum ϑ et ϕ ad quodvis tempus t definiri oportet. Quoniam autem in utraque aequatione ambo anguli ϑ et ϕ insunt; has aequationes ita combinari convenit, ut aequatio inde resultet duas tantum variabiles involvens.

1051. Hunc in finem aequatio prima ducatur in constantem A; altera vero in constantem B, ut ambae invicem additae praebeant hanc aequationem: $$\frac{Aedd\vartheta + (Ae + Bkk)dd\phi}{2gdt^2} = -(A - Bc)\vartheta - Bc\phi,$$

ubi constantes A et B ita definiri oportet, ut duae tantum variabiles in ea inesse

inesse censeri queant, quod igitur ut evenire possit, pro parte sinistra statuamus: $Aedd\vartheta + (Ac + Bkk)dd\phi = Cddz$, ideoque $Ae\vartheta + (Ac + Bkk)\phi = Cz$; pro altera autem parte ponamus $(A - Bc)\vartheta + Bc\phi = Dz$, et aequatio nostra induet hanc formam: $\frac{Cddz}{2gdt^2} = -Dz$, quae duas tantum variabiles z et t complectitur.

1052. Nunc igitur ex formulis assumtis ambos angulos ϑ et ϕ per novam variabilem z exprimamus, atque ex prima reperietur $\vartheta = \frac{Cz}{Ae} - \frac{(Ac + Bkk)\phi}{Ae}$, ex altera autem reperietur $\vartheta = \frac{Dz - Bc\phi}{A - Bc}$, qui duo valores ita inter se aequales statuantur, ut utrinque partes tam quantitatem novam z quam angulum ϕ continentes seorsim inter se aequales evadant; fieri igitur debebit $\frac{C}{Ae} = \frac{D}{A - Bc}$ et $\frac{Ac + Bkk}{Ae} = \frac{Bc}{A - Bc}$, quae postrema aequatio in ordinem redacta praebet $AAc + (kk - cc - ec)AB - BBckk = 0$, quae aequatio quadratica geminos dabit valores pro literis A et B, ad quos inveniendos statuamus brevitatis gratia $c + e - \frac{kk}{c} = 2f$, ut aequatio nostra fiat $AA - 2fAB - BBkk = 0$, unde si sumamus $B = 1$, pro A duo reperiuntur valores

1°. $A = f + \surd(ff + kk)$

2°. $A = f - \surd(ff + kk)$,

existente $B = 1$: ambo autem hi valores aequaliter satisfacere debent.

1053. Nunc igitur primo loco A scribamus valorem priorem inventum, ex eoque orietur aequatio $\frac{D}{C} = \frac{1}{e} - \frac{c}{ef + e\surd(ff + kk)}$, quae reducitur ad hanc: $\frac{D}{C} = \frac{kk + cf - c\surd(ff + kk)}{ekk}$; ex altero autem valore pro A assumto reperietur $\frac{D}{C} = \frac{kk + cf + c\surd(ff + kk)}{ekk}$. Quamobrem si sumamus $C = ekk$, geminos pro D habebimus valores, perinde ac pro A; scilicet constitutis valoribus $B = 1$ et $C = ekk$, pro A et D duas nacti sumus solutiones:

Solutio

Solutio prior: $\begin{cases} A = f + \surd(ff + kk) \\ D = kk + cf - c\surd(ff + kk) \end{cases}$

Solutio poſterior: $\begin{cases} A = f - \surd(ff + kk) \\ D = kk = cf + c\surd(ff + kk). \end{cases}$

1054. Pro ſolutione igitur priore relatio inter angulos ϑ et φ, et novam variabilem z ſequenti modo erit comparata:

$$e\vartheta(f + \surd(ff + kk)) + (cf + kk + c\surd(ff + kk))\varphi = ekkz,$$

atque aequatio, ex qua incognitam z inveſtigari oportet, erit

$$\frac{ekkddz}{2gdt^2} = -z(kk + cf - \surd(ff + kk)).$$

1055. Simili modo alteros valores loco A et D ſcribendo, pro iis loco z alia variabilis in calculum introduci debet, quae ſit z', atque relatio inter ϑ, φ et z' iſta exprimetur aequatione:

$$e\vartheta(f - \surd(ff + kk)) + (cf + kk - c\surd(ff + kk))\varphi = ekkz'$$

ipſa autem haec nova incognita z' quaeri debet ex ſequenti aequatione differentiali ſecundi gradus: $\frac{ekkddz'}{2gdt^2} = -z'(kk + cf + \surd(ff + kk))$.

1056. Hoc igitur modo duas novas variabiles z et z' in calculum introduximus, quarum utramque per integrationem aequationis differentialis ſecundi gradus haud difficulter definire licet, ut ſtatim oſtendemus; iis autem inventis ambo anguli ϑ et φ facile per z et z' exprimi poterunt. Si enim binae aequationes ante datae invicem addantur, pervenietur ad hanc aequationem: $\vartheta + \varphi\,\frac{(cf + kk)}{ef} = \frac{c\varphi}{f}\;\frac{kk}{2f}(z + z')$.

Sin autem poſterior a priore ſubtrahatur, relinquetur iſta:

$$\vartheta + \frac{c\varphi}{e} = \frac{kk(z - z')}{2\surd(ff + kk)},$$

haec poſterior ab antecedente ablata relinquit $\frac{kk}{ef}$.

$$\varphi = \frac{kkz}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\surd(ff + kk)}\right) + \frac{kkz'}{2}\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\surd(ff + kk)}\right),$$

quae aequatio per kk diviſa et reducta dat

$$\varphi = \frac{ez(\surd(ff + kk) - f) + ez'(f + \surd(ff + kk))}{2\surd(ff + kk)}.$$

 Ex

Ex hoc autem valore pro ϕ invento colligitur alter angulus

$$\vartheta = z\,\frac{(kk+cf-c\surd(ff+kk))}{2\surd(ff+kk)} - z'\,\frac{(kk+cf+c\surd(ff+kk))}{2\surd(ff+kk)}.$$

1057. Superest igitur, ut in valores litterarum z et z' inquiramus. Prodiit autem pro z haec aequatio: $\frac{ekkddz}{2gdt^2} + z(kk+cf-\surd(ff+kk)) = 0$. Ponatur hic brevitatis gratia $\frac{ekk}{kk+cf-\surd(ff+kk)} = h$, et aequatio nostra erit $\frac{hddz}{2gdt^2} + z = 0$, quae per $2dz$ multiplicata et integrata praebet $\frac{hdz^2}{2gdt^2} + zz = \alpha\alpha$, unde elicitur $\frac{2gdt^2}{h} = \frac{dz^2}{\alpha\alpha - zz}$; sicque fiet $dt\surd\frac{2g}{h} = \frac{dz}{\surd(\alpha\alpha - zz)}$, hincque integrando $t\surd\frac{2g}{h} = \alpha\,.\,\text{sin}\,\frac{z}{\alpha}$. Hinc igitur erit $\text{sin}\,(t\surd\frac{2g}{h} + \delta) = \frac{z}{\alpha}$; consequenter quantitas hactenus incognita z ita per solum tempus t exprimetur, ut sit $z = \alpha\,\text{sin}(t\surd\frac{2g}{h} + \delta)$, existente $h = \frac{ekk}{kk+cf-\surd(ff+kk)}$.

1058. Simili modo reperietur altera quantitas incognita z'. Quodsi enim brevitatis gratia statuamus $\frac{ekk}{kk+cf+\surd(ff+kk)} = h'$, et loco constantium per integrationem ingredientium scribamus α' et δ', concluditur fore $z' = \alpha'\,\text{sin}(t\surd\frac{2g}{h'} + \delta')$, quibus duobus valoribus inventis jam docuimus, quomodo ex iis ambos angulos ϑ et ϕ determinari oporteat, quos ergo jam ad quodvis tempus elapsum t assignare licebit. Ubi quidem evidens est, quoniam anguli ϑ et ϕ perpetuo quam minimi manere debent, coëfficientes α et α' tanquam infinite parvos esse spectandos.

ALIA

ALIA RESOLUTIO CONCINNIOR AEQUATIONUM DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIUM SUPRA §. 1049. INVENTARUM.

1059. Loco binorum angulorum ϑ et φ in calculum introducantur duo alii anguli z et z', per quos illi ita determinentur, ut sit $\vartheta = Az + A'z'$ et $\varphi = Bz + B'z'$; tum vero isti novi anguli z et z' ita a tempore t pendeant, ut sit $\frac{ddz}{2gdt^2} = -\frac{z}{h}$ et $\frac{ddz'}{2gdt^2} = -\frac{z'}{h'}$. Ex his autem aequationibus, ut modo vidimus, ambo anguli z et z' ita per tempus t definientur, ut sit $z = \alpha \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta)$ et $z' = \alpha' \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta')$ ubi α et α', δ et δ' sunt constantes per integrationes ingressae, de quibus notandum est, priores α et α' esse quasi infinite parvas, propterea quod anguli z et z' perpetuo quam minimi manere debent.

1060. Hinc igitur erit

$$\frac{dd\vartheta}{2gdt^2} = \frac{Addz + A'ddz'}{2gdt^2} = -\frac{Az}{h} - \frac{A'z'}{h'} \text{ et}$$

$$\frac{dd\varphi}{2gdt^2} = \frac{Bddz + B'ddz'}{2gdt^2} = -\frac{Bz}{h} - \frac{B'z'}{h'};$$

quare cum aequationes supra inventae sint $\frac{edd\vartheta + cdd\varphi}{2gdt^2} = -\vartheta$ et $\frac{kkdd\varphi}{2gdt^2} = -c\varphi + c\vartheta$, si hic valores modo inventi substituantur, sequentes prodibunt aequationes:

$$\text{I. } -\frac{Aez}{h} - \frac{A'ez'}{h'} - \frac{Bcz}{h} - \frac{B'cz'}{h'} = -Az - A'z' \text{ et}$$

$$\text{II. } -\frac{Bkkz}{h} - \frac{B'kkz'}{h'} = -c(B - A)z - c(B' - A')z'.$$

1061. Iam quia anguli z et z' a se invicem pendere non debent, in utraque aequatione termini per z et z' affecti seorsim inter se aequari debent, unde quatuor sequentes aequationes resultant:

$$1^\circ.\ \frac{Ae}{h} + \frac{Bc}{h} = A;$$

$$2^\circ.\ \frac{A'e}{h'} + \frac{B'c}{h'} = A';$$

$$3^\circ.\ \frac{Bkk}{h} = c\,(B - A);$$

$$4^\circ.\ \frac{Bkk}{h'} = c\,(B' - A');$$

ex quibus constantes A, A', B, B', una cum h et h' definiri debent.

1062. Harum aequationum prima dividatur per tertiam, ut quantitas h eliminetur, ac reperietur $\frac{Ae + Bc}{Bkk} = \frac{A}{c\,(B - A)}$. Simili modo secunda per quartam divisa dabit $\frac{A'e + B'c}{B'kk} = \frac{A'}{c\,(B' - A')}$, ex quibus relatio tam inter A et B quam inter A' et B' definiri debet; iis autem inventis erit $h = \frac{Bkk}{c\,(B - A)}$ et $h' = \frac{B'kk}{c\,(B' - A')}$.

1063. Prior autem illarum aequationum, litteras A et B continens, in ordinem redacta praebet $BBcc - AB\,(kk + cc - ee) - AAce = 0$, pro qua aequatione resolvenda ponamus $kk + cc - ee = 2cf$, ut habeamus aequationem: $BBcc = 2ABcf + AAce$, cujus resolutio dat $Bc = Af \pm A\sqrt{(ff + ce)}$, sive $\frac{B}{A} = \frac{f \pm \sqrt{(ff + ce)}}{c}$, unde si sumatur $A = c$, fiet $B = f \pm \sqrt{(ff + ce)}$.

1064. Simili modo altera aequatio, litteras A' et B' continens, in ordinem redacta fiet $B'B'cc - A'B'\,(kk + cc - ee) - A'A'ce = 0$, unde si pariter statuamus $kk + cc - ee = 2cf$, deducitur $\frac{B'}{A'} = \frac{f \pm \sqrt{(ff + ce)}}{c}$, qui valores quia cum praecedentibus perfecte conveniunt, sola ambiguitas signi radicalis discrimen constituet; quamobrem si ponamus tam $A = c$ quam $A' = c$, pro litteris B et B' nanciscemur hos valores diversos:

$$B = f + \sqrt{(ff + ce)} \text{ et } B' = f - \sqrt{(ff + ce)}.$$

1065. Constitutis igitur valoribus litterarum A, B, A', B', in quibus notetur esse $f = \frac{kk + cc - ee}{2c}$, ambae quantitates insuper determi-

nandae

undae h et h' sequentes sortientur valores: $h = \frac{Bkk}{c(B-A)}$
$= \frac{kk(f+\sqrt{(ff+ce)})}{c(f-c+\sqrt{(ff+ce)})}$ et $h' = \frac{kk(f-\sqrt{(ff+ce)})}{c(f-c-\sqrt{(ff+ce)})}$,
quae expressiones facile reducuntur ad sequentes formas:
$h = \frac{kk(e+f+\sqrt{(ff+ce)})}{2cf+ce-cc}$, seu quia posuimus $2cf = kk + cc - ce$,
erit nunc $h = (e+f+\sqrt{(ff+ce)})$. Simili modo, signum radicale mutando, erit $h' = e+f-\sqrt{(ff+ce)}$.

1066. His igitur valoribus inventis, cum sit ut supra vidimus
$z = \alpha \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta)$ et $z' = \alpha' \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta')$, retentis literis h et h', quippe quarum valores jam constant, ad quodvis tempus t, ab initio elapsum, in minutis secundis expressum, ambo anguli ϑ et ϕ sequenti modo determinabuntur:

$$\vartheta = \alpha c \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta) + \alpha' c \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\phi = \alpha(f+\sqrt{(ff+ce)}) \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta)$$

$$+ \alpha'(f-\sqrt{(ff+ce)}) \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta').$$

His autem angulis cognitis, status penduli nostri ad quodvis tempus, ideoque etiam ejus motus perfecte innotescet.

1067. Iam observavimus constantes per integrationes ingressas esse α, α', δ, δ', quas ergo ex statu initiali penduli, ubi erat $t = 0$, determinari oportet. Quoniam igitur assumsimus, pendulum in statu aequilibrii esse versatum, necesse est, ut facto $t = 0$ ambo anguli ϑ et ϕ evanescant, unde nascuntur hae duae determinationes:

1°. $0 = \alpha c \sin\delta + \alpha' c \sin\delta'$, sive $0 = \alpha \sin\delta + \alpha' \sin\delta'$ et

2°. $0 = \alpha(f+\sqrt{(ff+ce)}) \sin\delta + \alpha'(f-\sqrt{(ff+ce)}) \sin\delta'$.

Quia autem ex priore est $\alpha' \sin\delta' = -\alpha \sin\delta$, hoc valore substituto fiet $2\alpha \sin\delta\sqrt{(ff+ce)}$, unde sequitur fore vel $\alpha = 0$, vel $\delta = 0$; at vero α evanescere nequit, quia alioquin pendulum nullum motum esset acceptura: erit ergo $\sin\delta = 0$, ideoque $\delta = 0$, quamobrem nostrae expressiones erunt jam multo simpliciores

 $\vartheta =$

$$\vartheta = \alpha c \sin t \surd \frac{2g}{h} + \alpha' c \sin t \surd \frac{2g}{h'}, \text{ et}$$

$$\varphi = \alpha (f + \surd (ff + cc)) \sin t \surd \frac{2g}{h}$$

$$+ \alpha' (f - \surd (ff + cc)) \sin t \surd \frac{2g}{h'}.$$

1068. Deinde vero assumsimus initio, centro gravitatis celeritatem imprimi $= n$, quare cum ista celeritas in genere sit $= \frac{dy}{dt} = \frac{cd\vartheta + cd\varphi}{dt}$ posito $t = 0$ ista expressio fieri debet $= n$; reperitur vero

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \alpha c \surd \frac{2g}{h} \cos t \surd \frac{2g}{h} + \alpha' c \surd \frac{2g}{h'} \cos t \surd \frac{2g}{h'}$$

deinde erit simili modo

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha B \surd \frac{2g}{h} \cos t \surd \frac{2g}{h} + \alpha' B' \surd \frac{2g}{h'} \cos t \surd \frac{2g}{h'}$$

ubi retinuimus litteras B et B' loco valorum $f + \surd (ff + cc)$ et $f - \surd (ff + cc)$. His igitur valoribus adhibitis, posito $t = 0$, ista conditio motu impressi dabit hanc aequationem; $n = \alpha c \surd \frac{2g}{h} (c + B) + \alpha' c \surd \frac{2g}{h'} (c + B')$; quia igitur erat $h = c + f + \surd (ff + cc) = c + B$ similique modo $h' = c + B'$, ista aequatio hanc induet formam simpliciorem: $n = \alpha c \surd 2gh + \alpha' c \surd 2gh'$.

1069. Praeterea vero assumsimus, toti pendulo initio quoque motum angularem esse impressum, cujus celeritas sit $= \nu$. Quia igitur in genere celeritas penduli est $\frac{d\varphi}{dt}$, necesse est ut posito $t = 0$ fiat $\frac{d\varphi}{dt} = \nu$, unde nascitur ista aequatio: $\nu = \alpha B \surd \frac{2g}{h} + \alpha' B' \surd \frac{2g}{h'}$ unde deducimus: $\alpha' \surd \frac{2g}{h'} = \frac{\nu}{B'} - \frac{\alpha B}{B'} \surd \frac{2g}{h}$, qui valor in aequatione praecedente, ubi adhuc inerant litterae B et B', substitutus dabit: $n = \alpha c c \surd \frac{2g}{h} \cdot \frac{(B' - B)}{B'} + \frac{\nu c (c + B')}{B'}$. Quia igitur

est

est $B' - B = -2\sqrt{(ff+ce)}$ et $e + B' = h'$, erit $n = -\frac{2\alpha ce}{B'}$ $\sqrt{\frac{2g}{h}}(ff+ce) + \frac{\gamma ch'}{B'}$, ex qua aequatione reperimus: $\alpha\sqrt{\frac{2g}{h}}$ $= \frac{\gamma h'}{2e\sqrt{(ff+ce)}} - \frac{nB'}{2ce\sqrt{(ff+ce)}}$, quo valore ſubſtituto fiet $\alpha'\sqrt{\frac{2g}{h'}} = \frac{\gamma}{B'} - \frac{B\gamma h'}{2B'e\sqrt{(ff+ce)}} + \frac{nB}{2ce\sqrt{(ff+ce)}}$, ſive $\alpha'\sqrt{\frac{2g}{h'}} = \frac{-\gamma h}{2e\sqrt{(ff+ce)}} + \frac{nB}{2ce\sqrt{(ff+ce)}}$, ſicque omnes quatuor conſtantes α et α', δ et δ', ex ſtatu initiali determinavimus. Unde pro quovis tempore futuro t tam ſtatus penduli quam ejus motus aſſignari poterit.

DE MOTU REGULARI QUEM PENDULUM PROPOSITUM RECIPERE POTEST.

1070. Quamdiu ambo ſinus illorum angulorum: $t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta$ et $t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'$, in formulas noſtras ingrediuntur, quas quidem hic in genere, ſine ullo reſpectu ad certum ſtatum initialem habito, ſumus conſideraturi, motus penduli pro mixto haberi debet ex duobus motibus ſimplicioribus, quorum uterque ex uno illorum angulorum oriri eſt cenſendus. Ex quo intelligitur, tum demum motum penduli pro ſimplici haberi poſſe, quando unicus tantum illorum ſinuum in calculum ingreditur, id quod evenit, quando fuerit vel $\alpha = 0$ vel $\alpha' = 0$; tum enim totus penduli motus ſimilis erit motui penduli ſimplicis, quod omnes ſuas oſcillationes iſochronas peragit.

1071. Evolvamus igitur primo caſum, quo $\alpha' = 0$, atque ad quodvis tempus t bini anguli ϑ et φ ſequenti modo exprimentur:

$$\vartheta = \alpha c \sin(t\sqrt{\tfrac{2g}{h}} + \delta) \text{ et}$$

$$\varphi = \alpha(f + \sqrt{(ff+ce)}) \sin(t\sqrt{\tfrac{2g}{h}} + \delta).$$

ex

ex quibus colligitur differentiando:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \alpha c \sqrt{\frac{2g}{h}} \operatorname{cos}\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) \text{ et}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha \sqrt{\frac{2g}{h}} (f + \sqrt{(ff + ce)}) \operatorname{cos} t \sqrt{\left(\frac{2g}{h} + \delta\right)}$$

ubi $\frac{d\vartheta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ celeritates angulares exprimunt, quibus pendulum tam circa punctum O, quam circa punctum c gyratur.

1072. Quando ergo hae postremae expressiones evanescunt, tum totum pendulum ad statum quietis erit redactum, quod quia in maximis excursionibus contingit, inde novae oscillationes computari solent; haec igitur momenta evenient, quando $\operatorname{cos}(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta) = 0$, hoc est quando angulus ipse $t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta$ vel recto, vel tribus rectis aequalis evadit. Ponamus igitur $t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta = 90 = \frac{\pi}{2}$, et pendulum in istum statum perveniet elapso tempore $t = (90 - \delta)\sqrt{\frac{h}{2g}}$; dehinc vero iterum in talem statum perveniet elapso tempore $t = (270 - \delta)$ $\sqrt{\frac{h}{2g}}$. Sicque intervallum inter haec duo momenta, cui tempus unius oscillationis aequale reputari solet, erit $= 180\sqrt{\frac{h}{2g}} =$ $\sqrt{\frac{h}{2g}}$, quod hoc modo in minutis secundis exprimetur; unde patet has oscillationes isochronas fore pendulo simplici longitudinis $= h$.

1073. Nostrum ergo pendulum ejusmodi motum regularem recipere potest, qui conveniat cum motu penduli simplicis, cujus longitudo $= h$. Vidimus autem hanc longitudinem h ita per elementa, quibus pendulum nostrum constituitur, determinari, ut sit $h = e + f + \sqrt{(ff + ce)}$ existente $f = \frac{kk + cc - ce}{2c}$. Revera autem nostrum pendulam in pendulum simplex abibit, quando fit $kk = 0$; quoniam tum tota pendu-

mass

massa in centro gravitatis g colligitur; tum vero insuper punctum O in ipsum punctum a incidit, quandoquidem tum nostrum pendulum longitudinis $cg = c$ circa punctum fixum c oscillationes peraget; facto autem $kk = 0$ et $e = 0$ erit $f = \frac{1}{2}c$, hincque $h' = c$, id quod egregie convenit cum veritate. Tum vero etiam in genere notari meretur casus, quo $kk = 0$, sive tota penduli massa in centro gravitatis g unita; tum enim erit $f = \frac{c-e}{2}$, hincque $\surd(ff + ce) = \frac{c+e}{2}$, unde fit $h = c + e$; quare cum sit $Oc = e$ et $cg = c$, ideoque $Og = c + e = h$, pendulum perinde oscillationes peraget, quasi ex puncto O esset suspensum.

1074. Evidens autem est, figuram fulcri MAN plurimum conferre ad motum istum penduli oscillatorium, id quod operae pretium erit accuratius contemplari. Primo igitur sumamus superficiem fulcri esse planam et horizontalem, cui axis cylindricus penduli incumbat; erit igitur radius $AO = a = \infty$; et quia b est radius axis, erit etiam distantia $Oc = e = \infty$, unde angulus ϑ necessario evanescere debet, ita ut spatium $e\vartheta$, quod intervallum Ac indicat, maneat finitum adeoque quam minimum; tum igitur

erit $$f = -\tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}c + \frac{kk}{2c}, \text{ hincque}$$

$$ff = \tfrac{1}{4}ee - \tfrac{1}{2}ce - \frac{ekk}{2c}, \text{ ideoque}$$

$$ff + ce = \tfrac{1}{4}ee + \tfrac{1}{2}ce - \frac{ekk}{2c} \text{ et}$$

$$\surd(ff + ce) = \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}c - \frac{kk}{2c},$$

hinc igitur colligitur $h = c + e$, quae longitudo cum sit infinita, patet, super fulcro plano axem penduli ita de loco dimoveri posse, ut nullae oscillationes oriantur.

1075. Quoniam autem quantitas radicalis $\surd(ff + ce)$ etiam signum negativum involvit, si ejus valorem negativum capiamus, orietur pro eodem casu fulcri plani $h = \frac{kk}{c}$; unde patet, nisi tota penduli massa in centro gravitatis sit collecta, tale pendulum fulcro plano incumbens etiam

 oscil-

oscillari posse ad similitudinem penduli simplicis, cujus longitudo $= \frac{kk}{c}$.
Pro hoc autem casu $e = \infty$ et $h = \frac{kk}{c}$, motus nostri penduli his formulis exprimetur: $\vartheta = \alpha e \sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right)$ et

$$\varphi = \alpha\left(\frac{kk}{c} - e\right)\sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right),$$

unde patet, α tam exiguum assumi debere, ut adhuc αe maneat quam minimum. Sumamus igitur $\alpha e = -\beta$, sive $\alpha = -\frac{\beta}{e}$, unde erit

$$e\vartheta = -\beta c \sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right) \text{ et}$$

$$\varphi = \beta \sin\left(\frac{t}{k}\sqrt{2gc} + \delta\right).$$

Hic scilicet, dum pendulum in excursione maxima versabitur, axis cylindricus super fulcro plano retrocessit per spatium $ac = e\vartheta = \beta c$, ubi cum recta cg a situ verticali declinet angulo β, evidens est centrum gravitatis in
Fig. 150. ipsam verticalem principalem incidere; ex quo intelligitur, pendulum ad talem motum oscillatorium componi posse, dum axis cylindricus extra verticalem principalem removetur, centrum gravitatis autem in ipsa hac recta in g retinetur; tum enim, si fuerit dimissum, cum recta cg ad situm verticalem appropinquat; axis cylindricus super fulcro versus A accedet, qui motus reciprocus conformis erit pendulo longitudinis $\frac{kk}{c}$.

1076. Eodem modo res se habet si fuerit $\alpha = 0$, tum enim nostrum pendulum pariter motum regularem recipiet, et ambo anguli ϑ et φ sequentes mutationes subibunt: $\vartheta = \alpha' c \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta')$ et

$\varphi = \alpha'(f - \sqrt{(ff + ee)})\sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta')$, hicque motus reciprocus congruet cum motu oscillatorio penduli simplicis, cujus longitudo $= h'$. Vidimus autem esse $h' = e + f - \sqrt{(ff + ee)}$, existente f
=

$= \frac{kk + cc - ff}{2c}$. Caeterum phoenomena hinc oriunda, quando fulcrum planum statuitur, jam ante commemoravimus, ubi formulam radicalem $\sqrt{(ff + cc)}$ negativam assumsimus.

1077. Antequam etiam motus irregulares perpendamus, casus supra memoratus, quo axis cylindricus penduli fulcro plano extra punctum A incumbit, dum centrum gravitatis g in ipsa recta verticali Ag detinetur, quandam illustrationem postulat, quoniam ex formulis inventis sequitur, centrum gravitatis g perpetuo in recta verticali Ag esse versaturum, dum interea axis cylindricus hinc atque hinc a puncto A motu reciproco digredietur et oscillationes peraget pendulo simplici longitudinis $= \frac{kk}{c}$ conformes, id quod experientiae contrarium videbitur, dum potius centrum gravitatis g circa axem cylindricum immotum oscillationes peragere deprehendetur. Verum iste effectus manifesto frictioni erit tribuendus, qua axis cylindricus non sine difficultate super fulcro progredi potest. Verum in tota hac analysi frictionem penitus e medio sustulimus, ita ut axis cylindricus liberrime super fulcro moveri queat; sublata enim frictione, quia tam pondus penduli quam pressio in fulcrum in directione verticali agunt, hae duae vires, ipsi centro gravitatis applicatae, nullum motum lateralem generare possunt, sed centrum gravitatis perpetuo in eadem recta verticali persistere debet.

DE MOTIBUS IRREGULARIBUS, QUOS PENDULUM PROPOSITUM RECIPERE POTEST.

1078. Quando neutra constantium α et α' evanescit, motus orietur maxime irregularis: involvet enim duplicem motum oscillatorium, quorum alter respondebit pendulo simplici longitudinis $= h$, et periodos suas absolvet tempore $t = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}$; alter vero motus respondebit pendulo longitudinis $= h'$, cujus periodi absolventur tempore $t = \pi \sqrt{\frac{h'}{2g}}$. Quare ex hac permistione, pro diversitate quantitatum h et h', inprimis autem pro ratione tam inter coëfficientes α et α', quam inter angulos δ et δ', im-

immensa varietas locum habere poterit, cujus omnes diversas agitationes nullo modo recensere vel enumerare licebit.

1079. Quae quo facilius, mente saltem, percipi queant, ambos valores litterarum h et h' accuratius ex primis elementis, quibus status penduli continetur, evolvamus. Cum igitur brevitatis gratia posuerimus

$$f = \frac{kk + cc - ce}{2c}, \text{ erit } f + e = \frac{kk + cc + ce}{2c},$$

tum vero $\sqrt{(ff + ce)} = \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c - e) + cc(c + e)^2}$; quare cum sit $h = e + f + \sqrt{(ff + ce)}$ et $h' = e + f - \sqrt{(ff + ce)}$, hi ambo valores evoluti erunt:

$$h = \frac{kk + cc + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c - e) + cc(c + e)^2} \text{ et}$$

$$h' = \frac{kk + cc + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c - e) + cc(c + e)^2}.$$

1080. His duobus valoribus constitutis, quoniam supra vidimus esse etiam $h = e + B$ et $h' = e + B'$, erit vicissim $B = h - e$ et $B' = h' - e$. Hinc igitur ambo anguli ϑ et φ, pro quovis tempore t sequenti modo determinabuntur: $\vartheta = \alpha c \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta) + \alpha' c \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta')$ et

$$\varphi = \alpha(h - e)\sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta) + \alpha'(h' - e)\sin(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'),$$

ex quibus formulis etiam ambae celeritates angulares, scilicet $\frac{d\vartheta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$, quibus ipsi anguli ϑ et φ post tempus $= t$ promovebuntur, assignari poterunt; erit enim:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \alpha c\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta) + \alpha' c\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta') \text{ et } \frac{d\varphi}{dt} = \alpha(h - e)\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta) + \alpha'$$

(h'

$(\beta' - \epsilon)\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right)$, quibus elementis universus penduli motus perfecte determinatur, ita ut nihil amplius desiderari possit.

1081. Saepenumero, imprimis quando centrum fulcri O ad insignem distantiam constituitur, vel adeo infra fulcrum cadit, id quod evenit quando curvatura fulcri MAN evadit convexa, e re erit ipsum angulum ϑ ex calculo expellere, ejusque loco arcum Cc, per quem centrum axis cylindrici c e situ naturali C jam est digressum in calculum introducere. Ponamus igitur istum arcum $Cc = s$, et cum sit intervallum $OC = Oc = e$, erit iste arcus $s = e\vartheta$, qui quo concinnius in calculum inferatur, loco αe et $\alpha' e$, scribamus litteras β et β', ut sit $\alpha = \frac{\beta}{e}$ $\alpha' = \frac{\beta'}{e}$, atque hinc tam iste arcus $Cc = s$, quam obliquitas penduli, seu angulus $Chc = \phi$, sequenti modo definientur:

$$s = \beta c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right) \text{ et}$$

$$\phi = \frac{\beta(h-e)}{e}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \frac{\beta'(h'-e)}{e}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right),$$

mutationes autem momentaneae sive celeritates erunt:

$$\frac{ds}{dt} = \beta c\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' c\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right) \text{ et}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\beta(h-e)}{e}\sqrt{\frac{2g}{h}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \frac{\beta'(h'-e)}{e}\sqrt{\frac{2g}{h'}}\cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right),$$

ubi notetur, ut totus motus intra limites infinite parvos includatur, pro litteris β et β' fractiones infinite parvas statui debere.

1082. Hinc operae pretium erit casum, quo fulcrum superne est convexum, seorsim perpendere. Sit igitur MAN figura fulcri superne convexi, cujus centrum sit in O, ejusque profunditas infra centrum axis cylindrici C, nempe intervallum $OC = i$. Elapso autem tempore t sit centrum axis cylindrici in c, ita ut confecerit arcum $Cc = s$; tum vero posita penduli obliquitate, seu angulo $Chc = \phi$, et intervallo $cg = c$, praecedentes formulae ad hunc casum accommodabuntur, si ubique loco e scribatur $-i$; tum igitur primo ambae quantitates h et h', sequenti modo exprimentur: Fig. 151.

 $h =$

$$h = \frac{kk + cc - ci}{2c} + \frac{1}{2c} \surd (k^4 + 2ckk(c+i) + cc(c-i)^2 \text{ et}$$

$$h' = \frac{kk + cc - ci}{2c} - \frac{1}{2c} \surd k^4 + 2ckk(c+i) + cc(c-i)^2.$$

1083. Pro motibus autem omnibus possibilibus hujus penduli definiendis habebimus sequentes formulas:

$$s = \beta c \sin(t \surd \frac{2g}{h} + \delta) + \beta' c \sin(t \surd \frac{2g}{h'} + \delta') \text{ et}$$

$$\phi = -\frac{\beta(h+i)}{i} \sin(t \surd \frac{2g}{h} + \delta) - \frac{\beta'(h'+i)}{i} \sin(t \surd \frac{2g}{h'} + \delta')$$

pro celeritatibus autem valebunt hae expressiones:

$$\frac{ds}{dt} = \beta c \surd \frac{2g}{h} \cos(t \surd \frac{2g}{h} + \delta) + \beta' c \surd \frac{2g}{h'}$$

$$\cos(t \surd \frac{2g}{h'} + \delta') \text{ et } \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\beta(h+i)}{i} \surd \frac{2g}{h}$$

$$\cos(t \surd \frac{2g}{h} + \delta) - \frac{\beta'(h'+i)}{i} \surd \frac{2g}{h'} \cos(t \surd \frac{2g}{h'} + \delta').$$

1084. Circa omnes autem has formulas probe observari convenit eas subsistere non posse, nisi ambae quantitates h et h' fuerint positivae quia alioquin formulae nostrae evaderent imiginariae; quando autem hoc usu venit, id indicio erit, tale pendulum super fulcro plane nullum motum oscillatorium recipere posse, sed post motum impressum de fulcro esse elapsurum, id quod imprimis erit metuendum circa quantitatem h' in posteriori casu fulcri superne convexi.

APPENDIX DE MOTU VACILLATORIO, SIVE NUTATORIO, QUO CUNAE AGITARI SOLENT.

1085. De hoc motu jam pridem tractationem in medium attuli, ubi imprimis motum reciprocum cunarum super pavimento plano horizontali sum contemplatus, atque in longitudinem penduli simplicis inquisivi, quod suas oscillationes paribus temporibus absolveret. Evidens autem est praesenten

sentem tractationem ad istum casum reduci, si tota penduli massa supra fulcrum existere statuatur, ita ut nulla ejus pars infra fulcrum porrigatur.

1086. Referat igitur arcus circuli MAN figuram pavimenti, super Fig. 152. quo cunae sint agitandae, cujus punctum imum sit in A et centrum curvedinis in O, et quod ante axem penduli cylindricum vocavimus, hic imprimis corpus cunarum constituet, cujus centrum in statu aequilibrii reperiatur in C; ubi evidens est, radium curvature baseos cunarum minorem esse debere radio AO, siquidem pavimentum superne fuerit concavum. Ponatur igitur, ut ante, distantia $OC = e$, et quia totum corpus super pavimentum existit, ponamus in situ aequilibrii centrum gravitatis totius corporis cadere in punctum G, infra centrum motus C, intervallo $Cg = c$ situm; si enim supra C reperiretur, facile intelligere licet, nullum motum reciprocum oriri posse.

1087. Tempore jam elapso t pervenerit centrum curvedinis cunarum in punctum c, percurso arcu $Cc = s$, ita ut ex puncto O per c ducta recta Oc pavimento in ipso puncto contactus occurrat; nunc vero centrum gravitatis totius corporis reperiatur in puncto g, existente $cg = c$, quae recta, retro producta, verticali AO occurrat in h et angulus $Chc = \phi$ indicabit obliquitatem cunarum, quarum corpus in figura perperam per totum circulum est designatum; sufficit enim ut basis, quae pavimento insistit, curvaturam habeat ex centro c descriptam, quandoquidem hic oscillationes seu vacillationes tantum infinite parvas consideramus; hoc eo magis notasse iuvabit, quia alioquin centrum gravitatis G aegre infra C incideret. Denique vero totum momentum inertiae corporis cunarum sit, ut supra posuimus, $= Mkk$, designante M pondus totius corporis, cujus quidem ratio iterum ex calculo est egressa.

1088. Hoc statu cunarum constituto nunc quidem manifestum est, infinities plures motus reciprocos locum invenire posse, quam olim assignaveram, ubi scilicet totam investigationem ad oscillationes tantum regulares restrinxeram; praeterea vero, quia ibi pavimentum planum assumseram, praesens evolutio hujus argumenti non solum multo est generalior, sed etiam omnes motus possibiles in se complectitur.

1089. Ad statum igitur cunarum propositarum rite cognoscendum totum negotium ad tria elementa reducitur, quorum primum est distantia centrorum ipsius pavimenti O et cunarum C, quam ponimus $OC = e$;

secun-

secundum elementum est profunditas centri gravitatis G infra centrum motus C, quam ponimus $GG = cg = c$; tertium vero elementum est quadratum kk, per quod tota massa multiplicata praebet momentum inertiae totius corporis respectu centri gravitatis G vel g.

1090. Quodsi jam via a centro motus descripta Cc ponatur $= s$ et obliquitas cunarum, seu angulus $Chc = \phi$, postquam ex ternis elementis cognitis eruti fuerint hi duo valores

$$h = \frac{kk + cc + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{(k^4 + 2ckk(c - e) + cc(c + e)^2)} \text{ et}$$

$$h' = \frac{kk + cc + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{(k^4 + 2ckk(c - e) + cc(c + e)^2)}$$

ad datum quodvis tempus t binae litterae s et ϕ sequenti modo determinabuntur

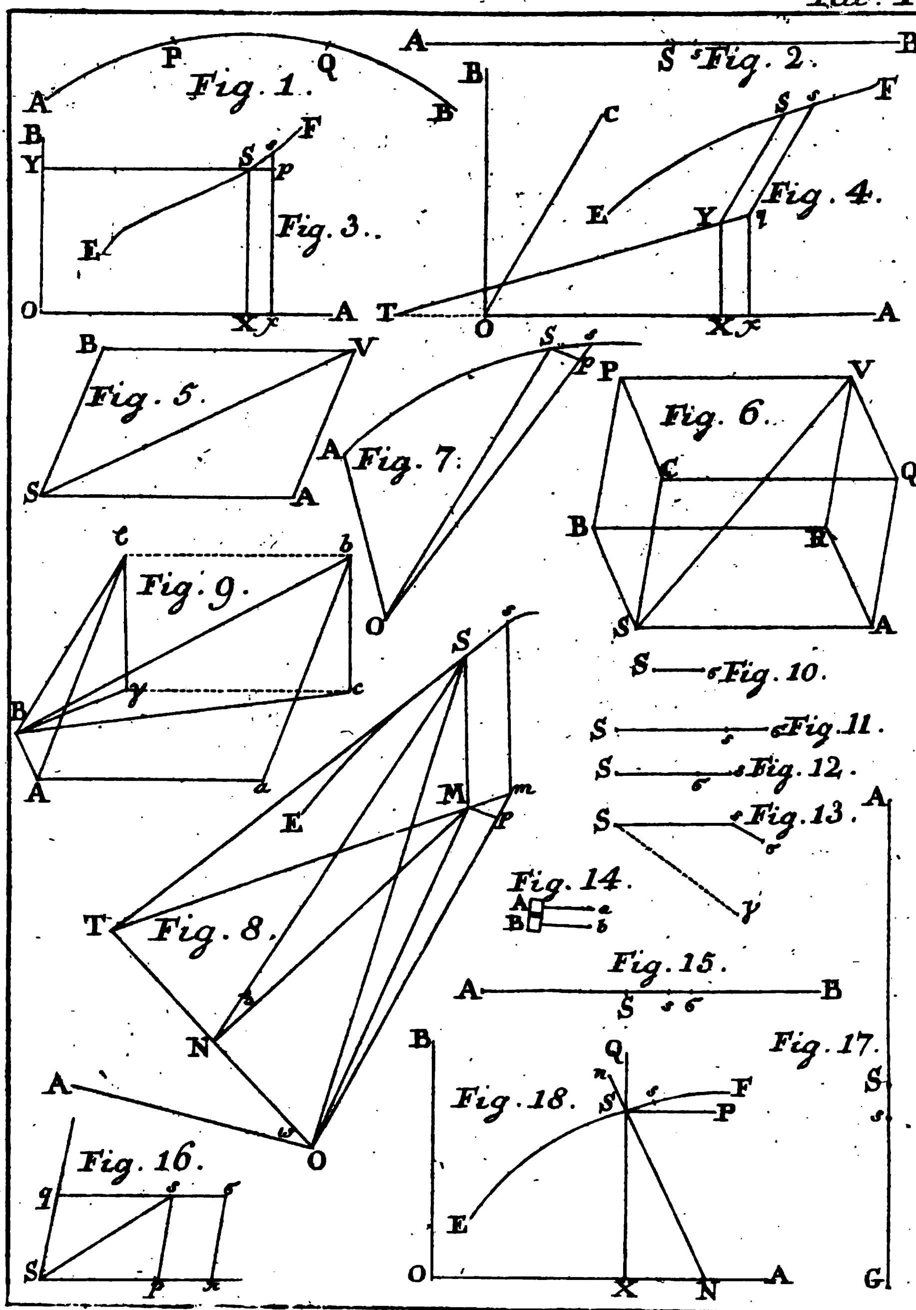
$$s = \beta c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta' c \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right) \text{ et}$$

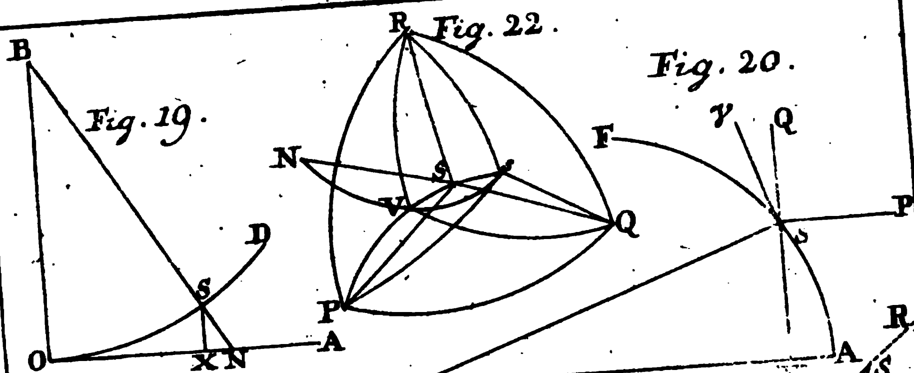
$$\phi = \beta\frac{(h - e)}{e}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta\right) + \beta'\frac{(h' - e)}{e}\sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{h'}} + \delta'\right).$$

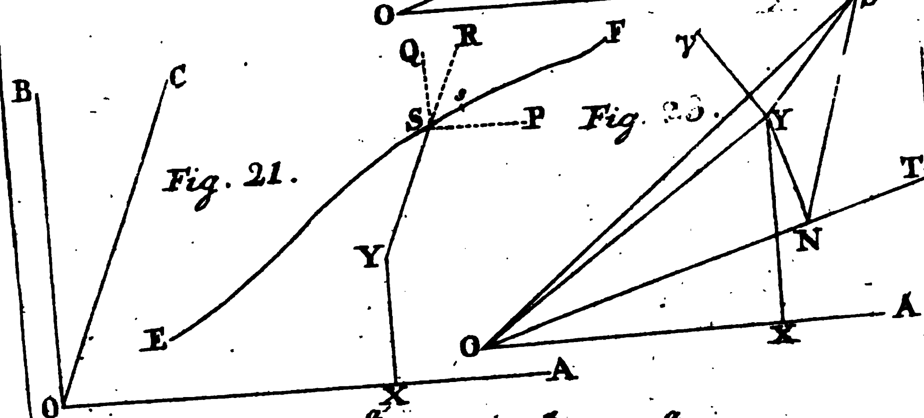
Sin autem pavimentum fuerit convexum, loco e scribi debet $-i$, unde formulae exsurgent §. allegatae. Caeterum hic eadem sunt observanda, quae supra fusius sunt exposita.

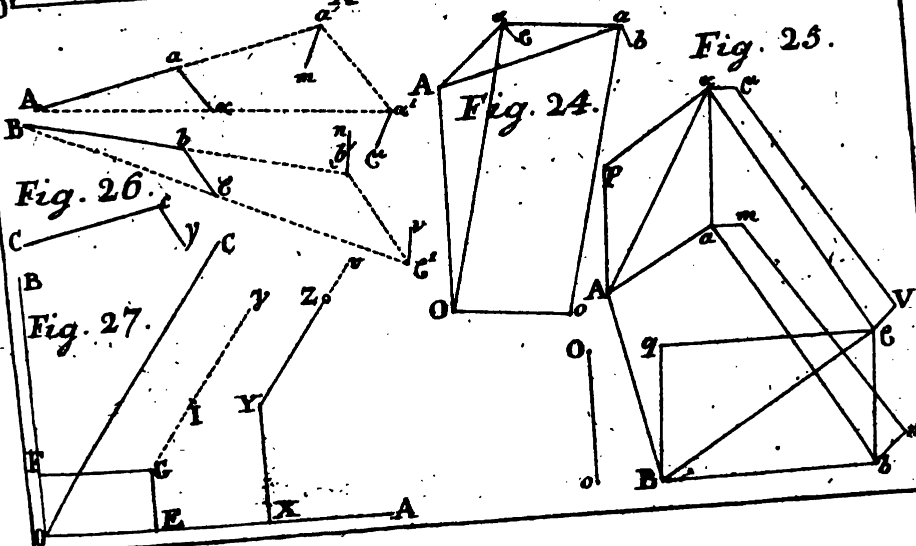


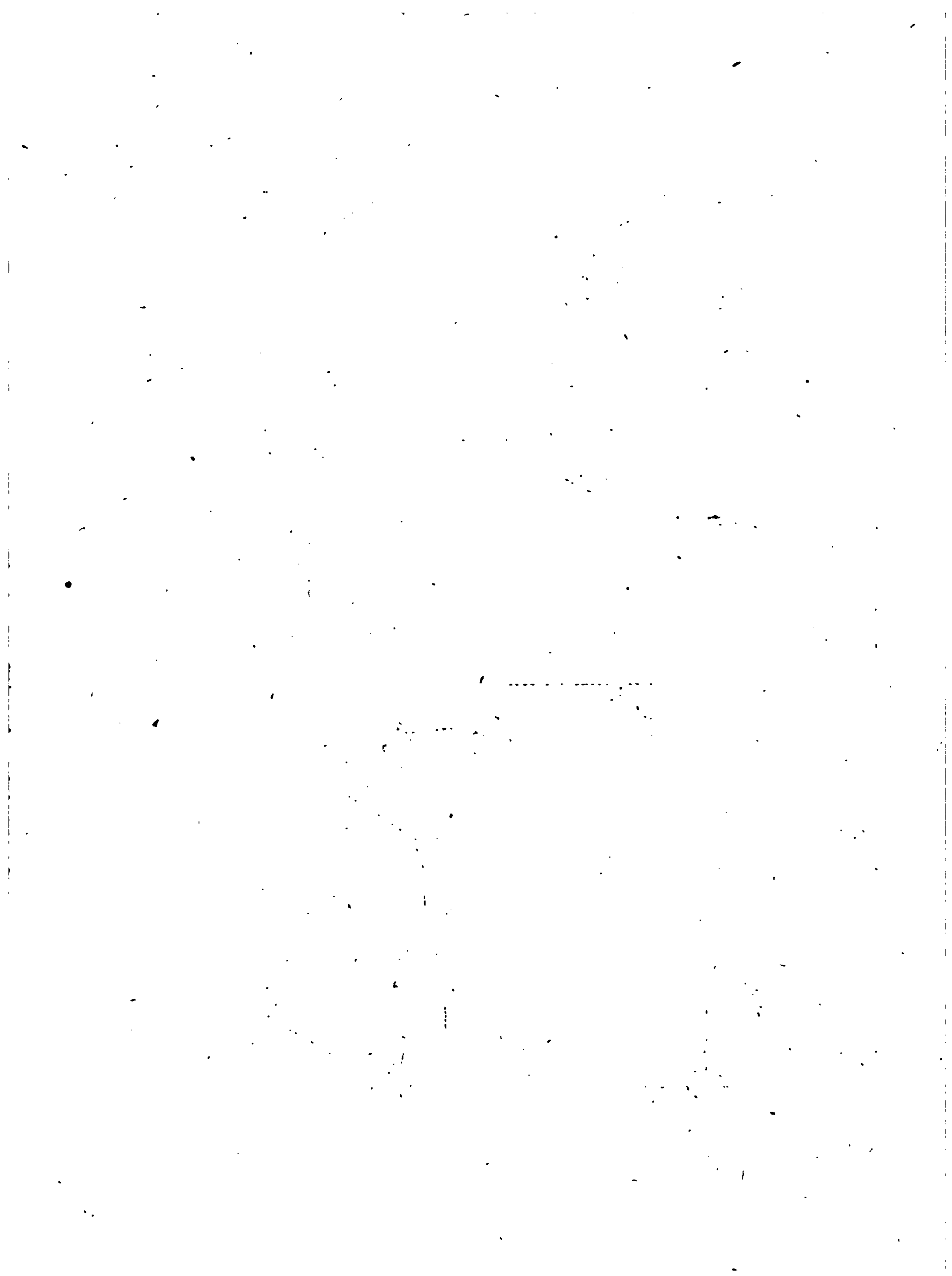
SUPPLE-

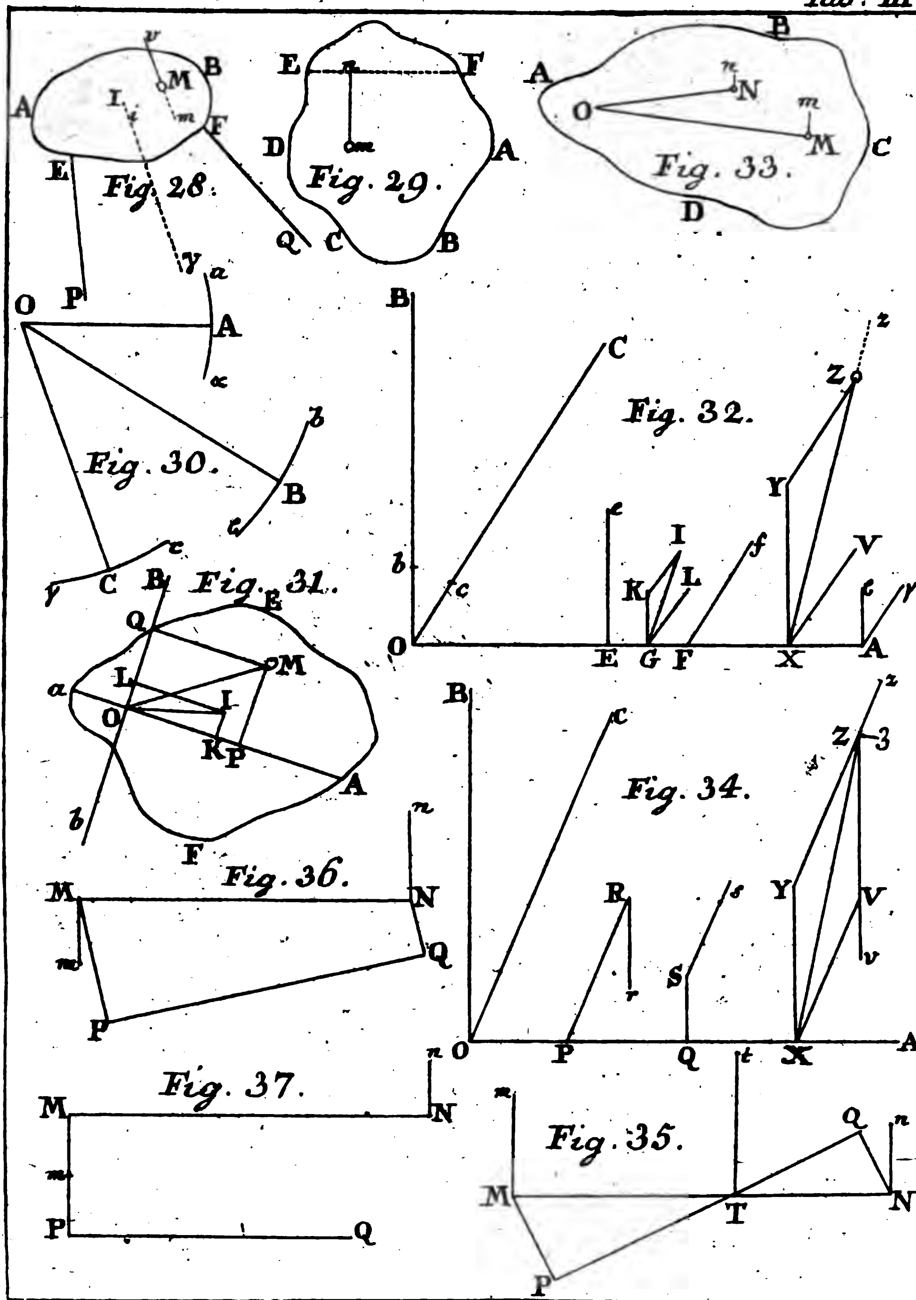

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.


Fig. 19.
B
D
S
O
X
N
A
Fig. 22.
R
N
s
S
V
Q
P
Fig. 20.
F
γ
Q
P
S
O
A


Fig. 21.
B
C
Q
R
F
s
S
P
Y
E
O
X
A
Fig. 23.
R
S
γ
Y
T
N
O
X
A


Fig. 26.
A
a
α
m
B
b
C
y
Fig. 24.
A
O
o
Fig. 25.
P
A
m
a
V
q
O
o
B
b
Fig. 27.
B
C
y
Z
v
I
Y
F
G
O
E
X
A




Tab. III.
Fig. 28.
A
B
M
m
v
I
i
F
E
P
Q
y
Fig. 29.
E
n
F
D
m
A
C
B
Fig. 33.
A
B
O
N
n
m
M
C
D
Fig. 30.
O
P
A
a
α
b
B
c
C
y
Fig. 31.
B
E
Q
M
a
L
I
O
K
P
A
b
F
Fig. 32.
B
C
Z
z
Y
V
b
c
e
I
K
L
f
e
γ
O
E
G
F
X
A
Fig. 34.
B
c
z
Z
3
Y
V
v
R
r
s
S
O
P
Q
t
X
A
Fig. 36.
n
M
N
m
Q
P
Fig. 37.
n
M
N
m
P
Q
Fig. 35.
m
Q
n
M
T
N
P



Tab. IIII.

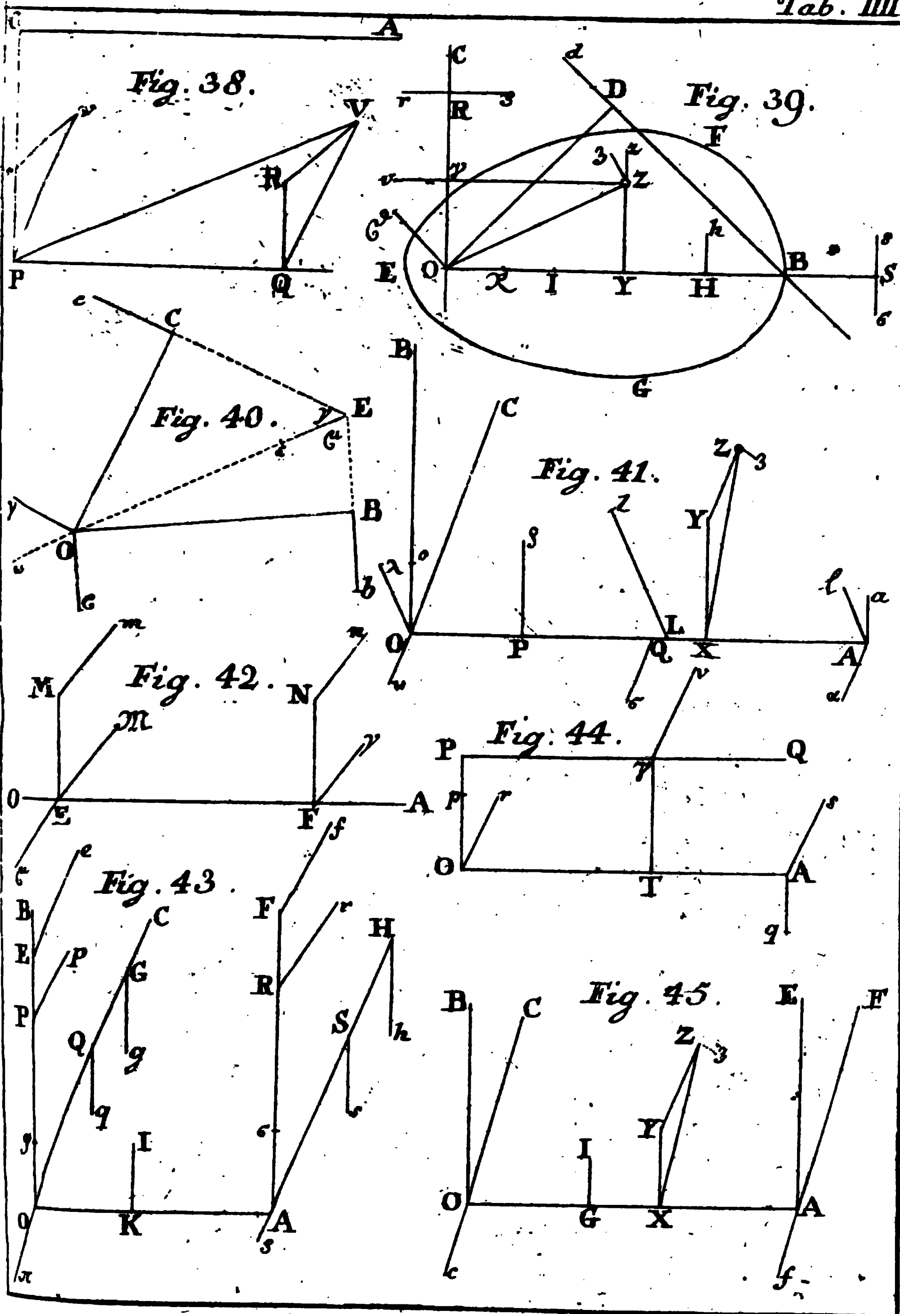


Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 48.

Fig. 49.

Fig. 50.

Fig. 51.

Fig. 52.

Fig. 53.

Fig. 54.

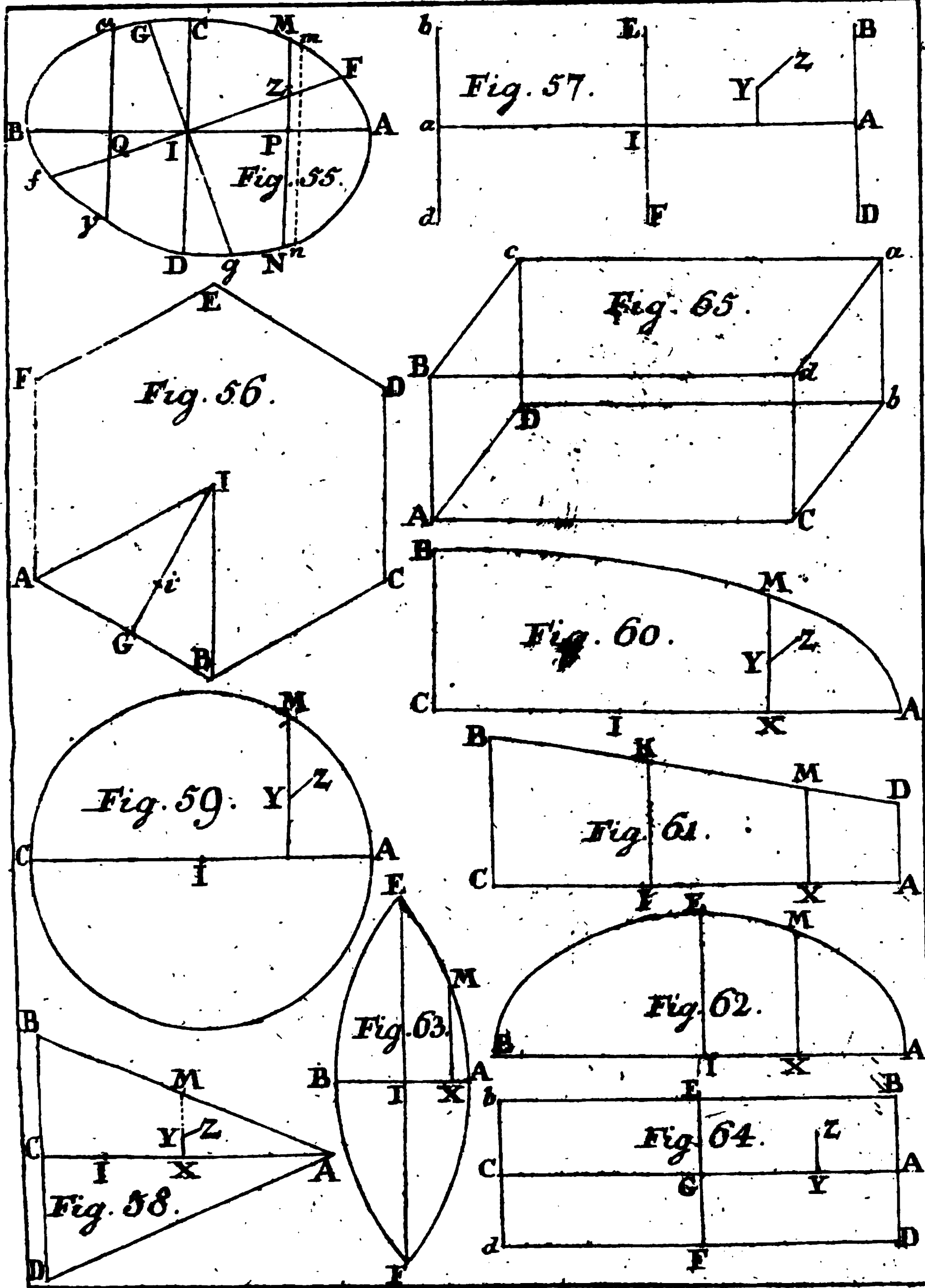
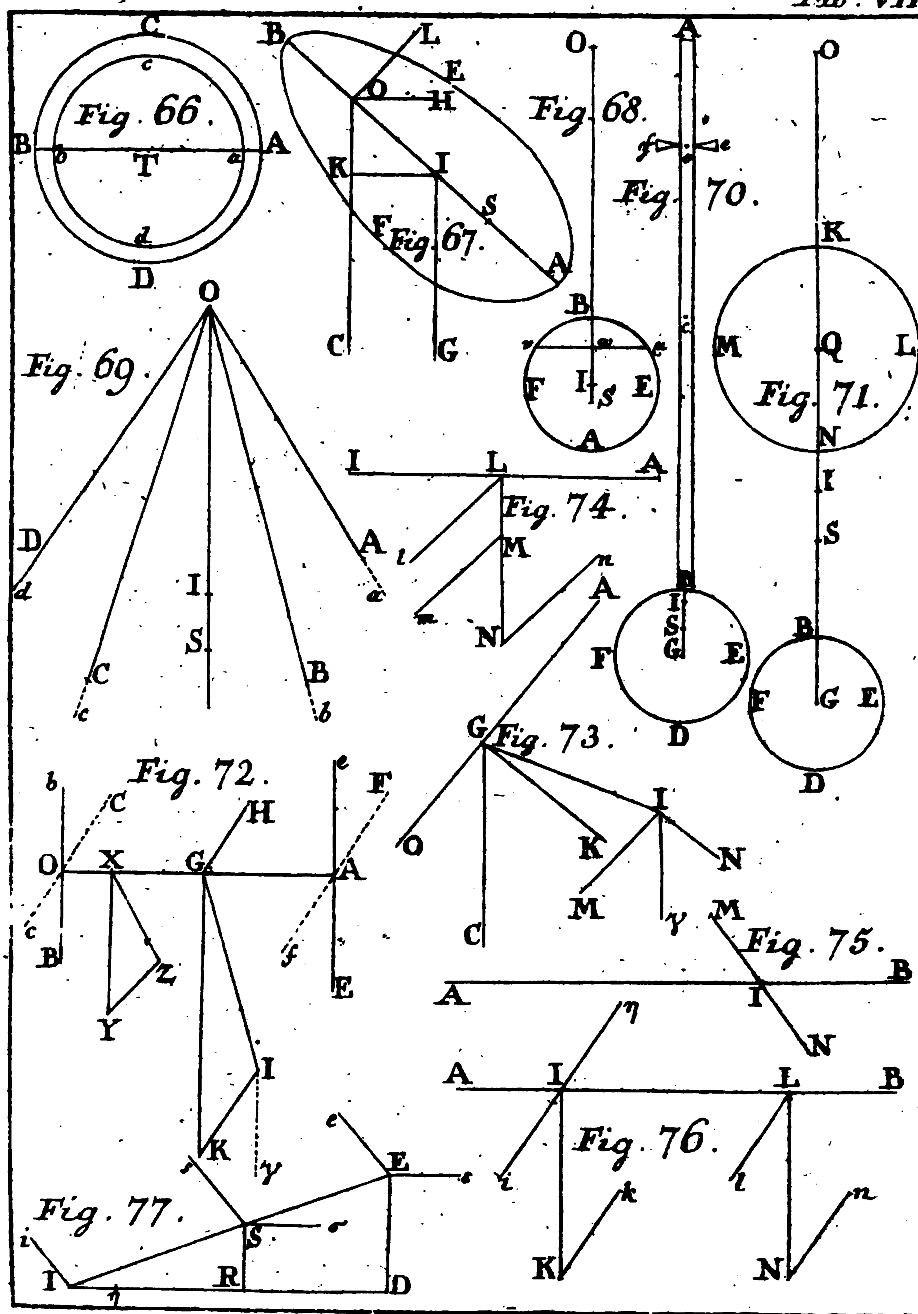
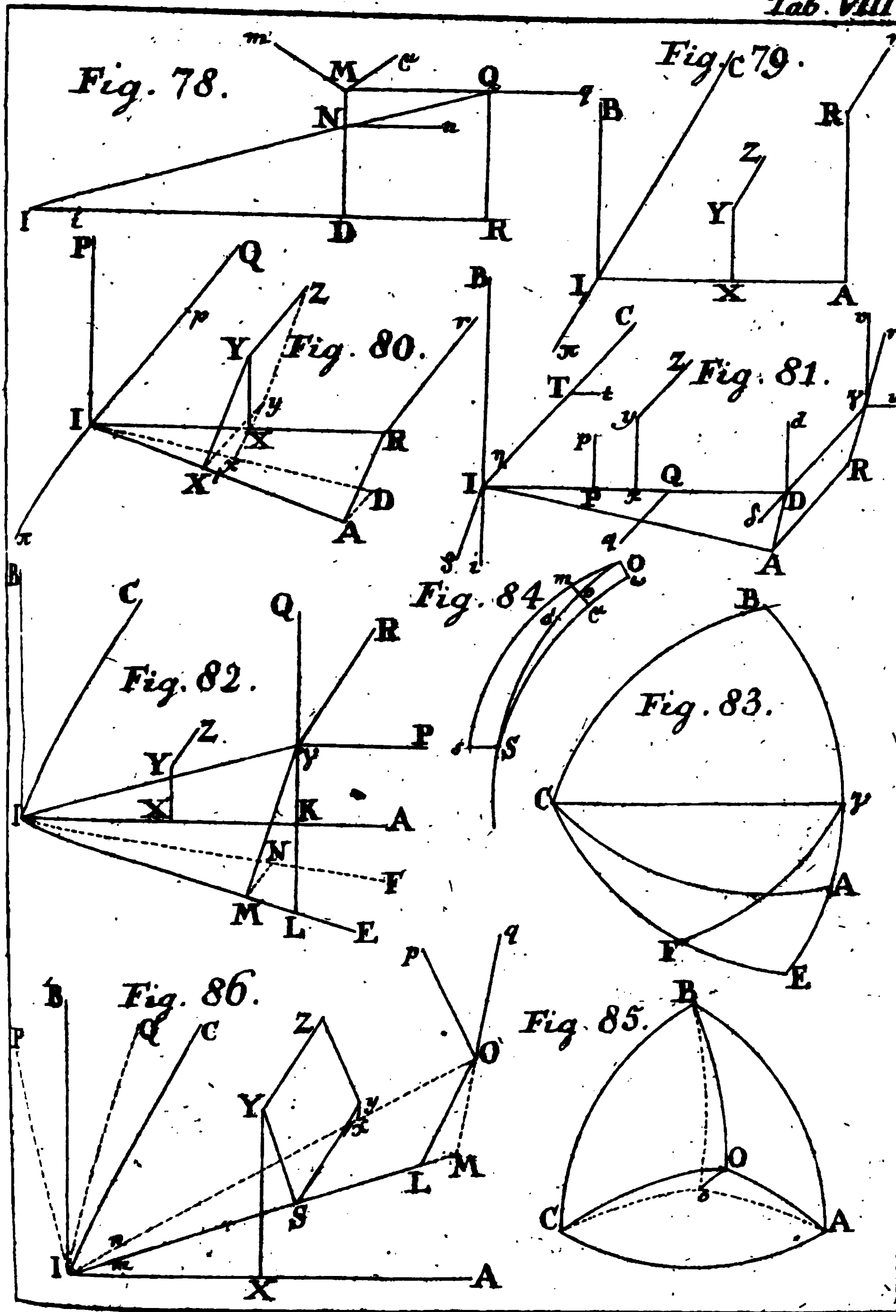


Fig. 55.
Fig. 57.
Fig. 65.
Fig. 56.
Fig. 60.
Fig. 59.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 58.


Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.




Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.



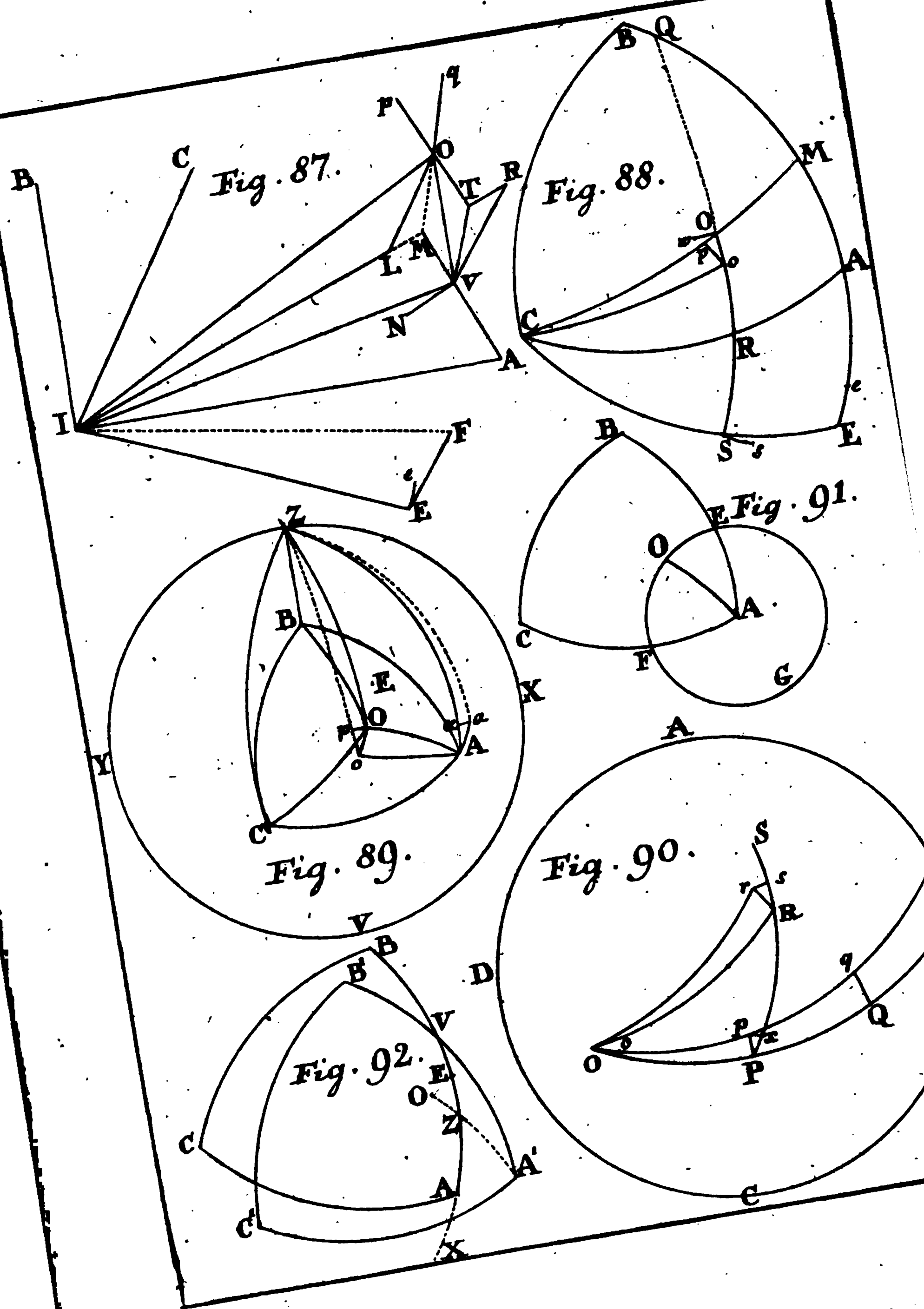


Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.

Tab. X.

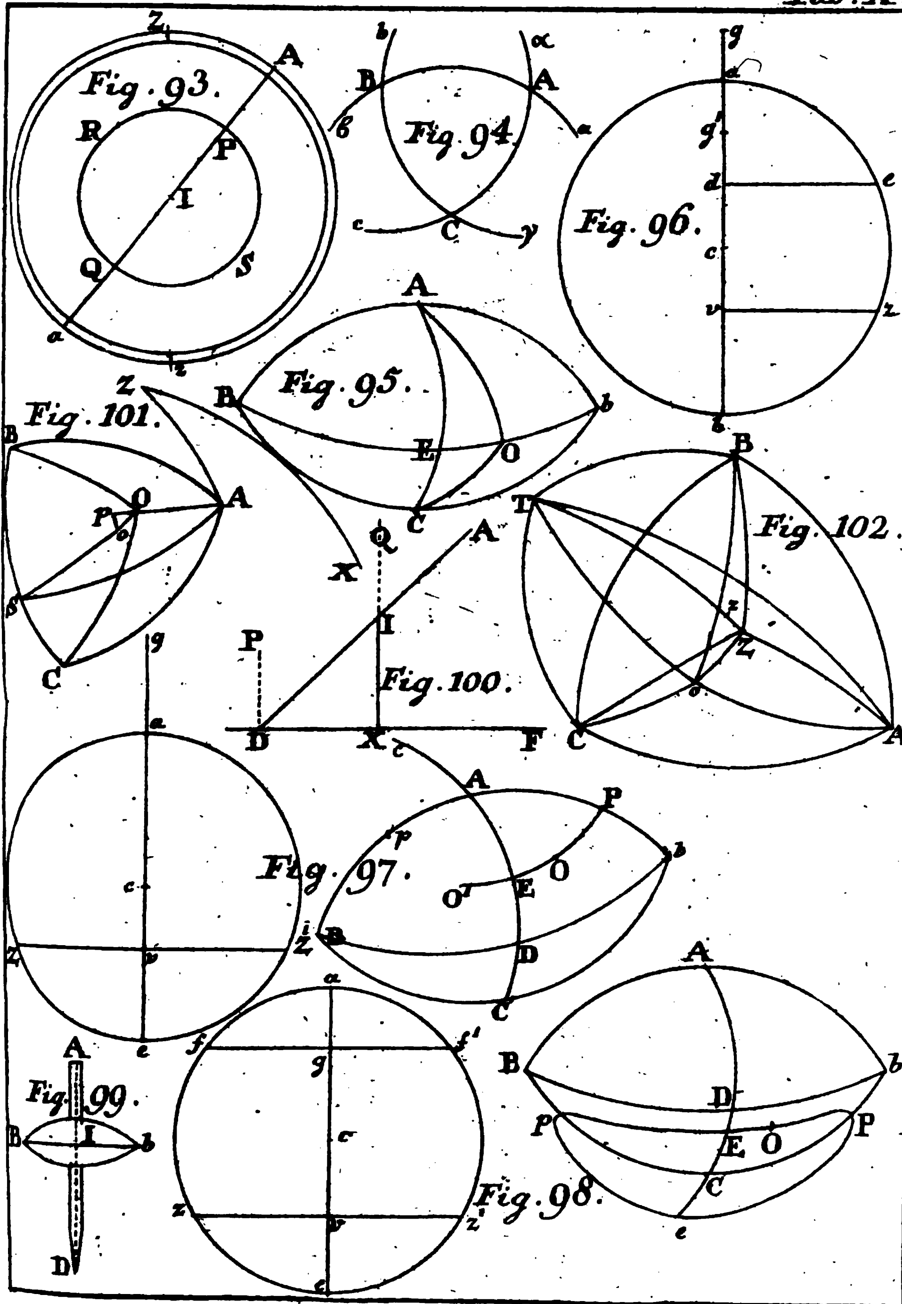
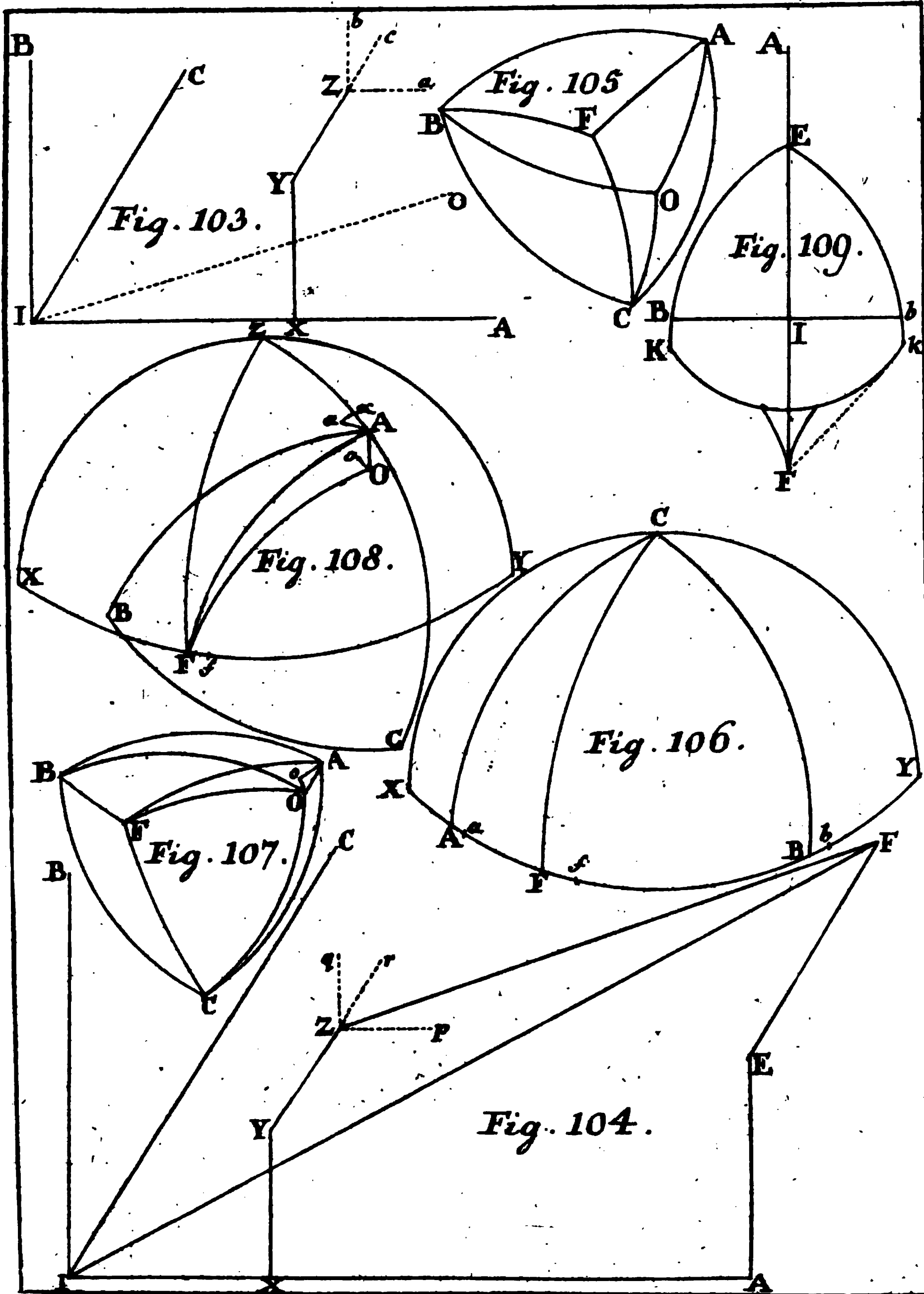
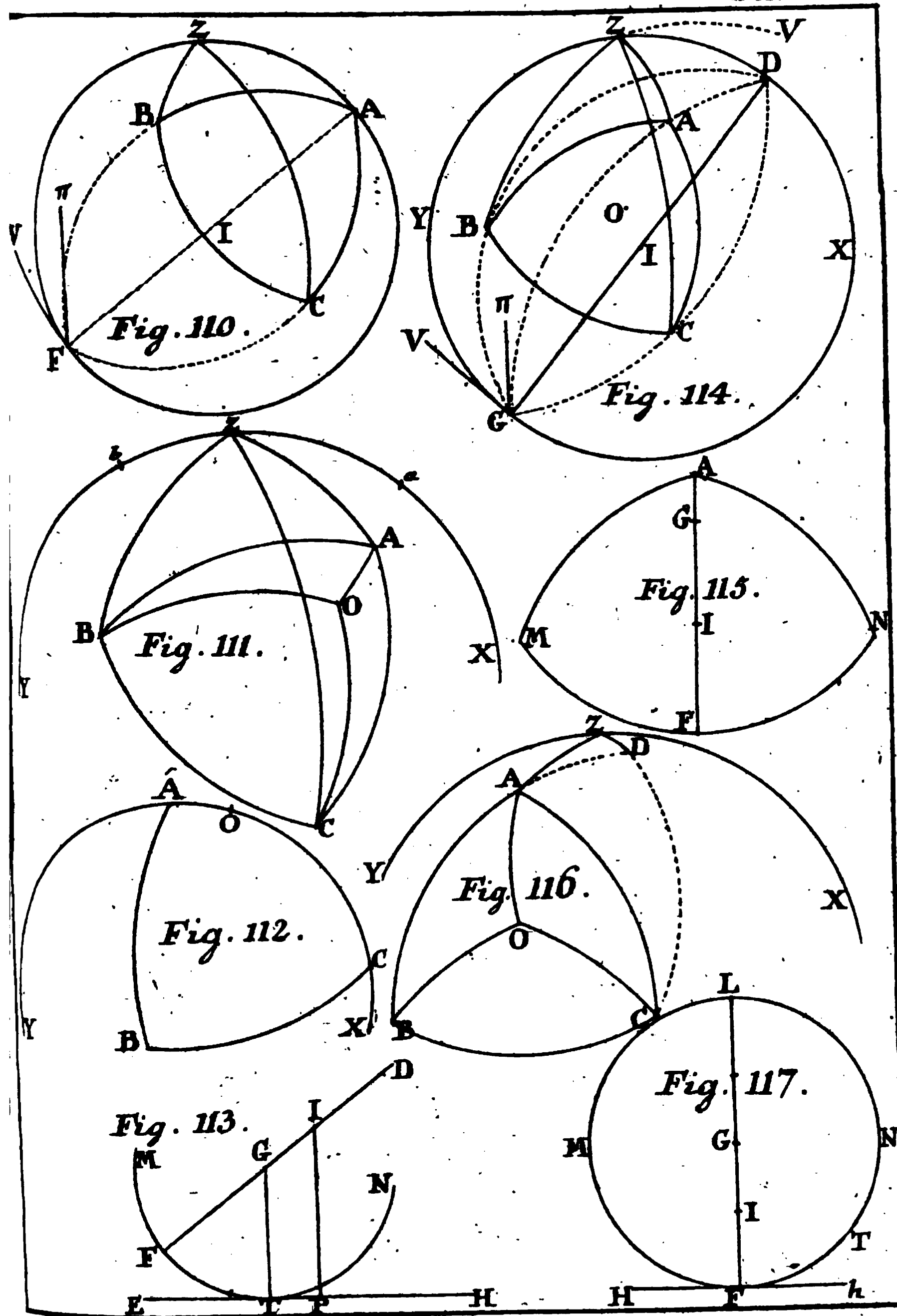


Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.

Tab. XI.




Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.

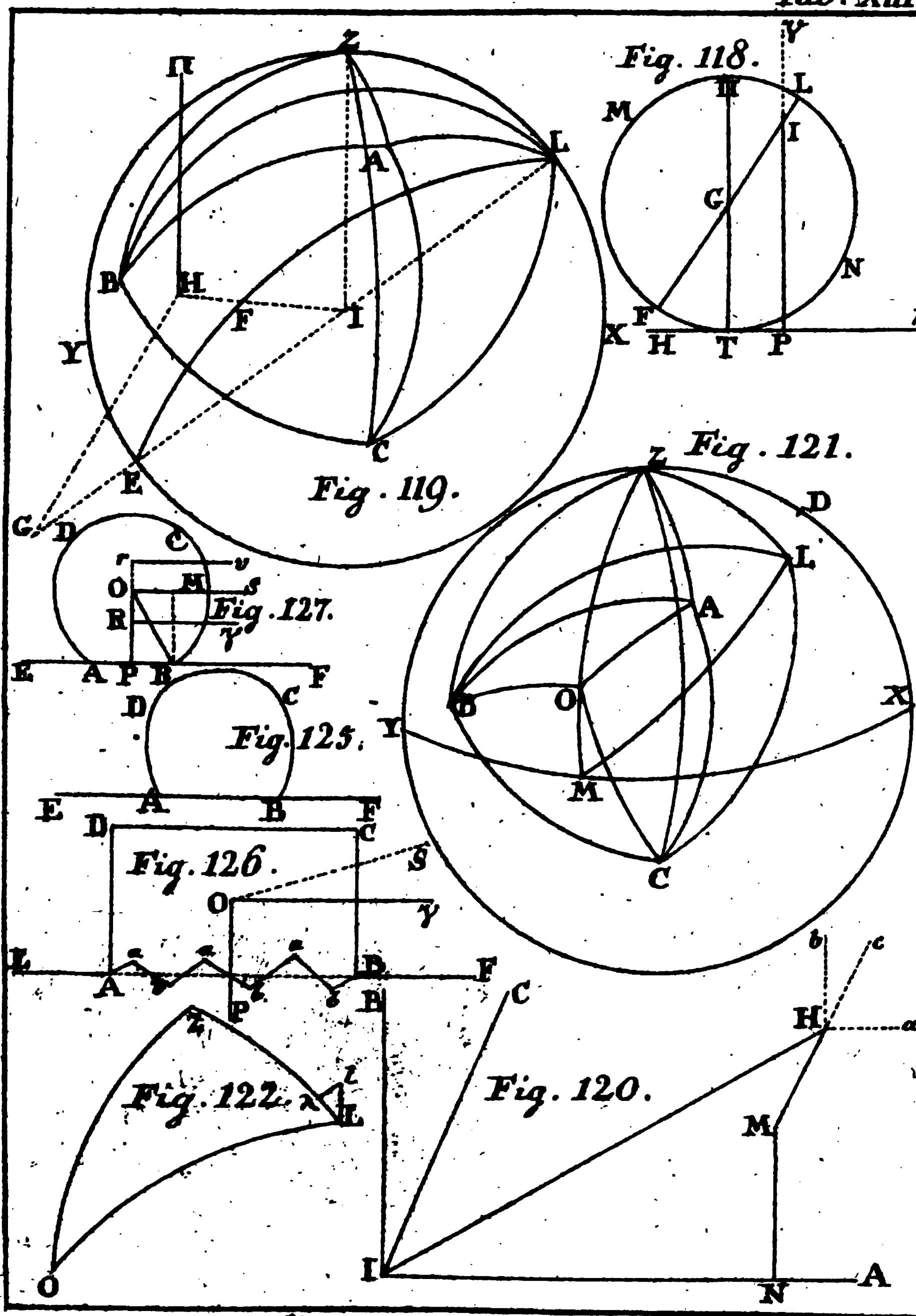
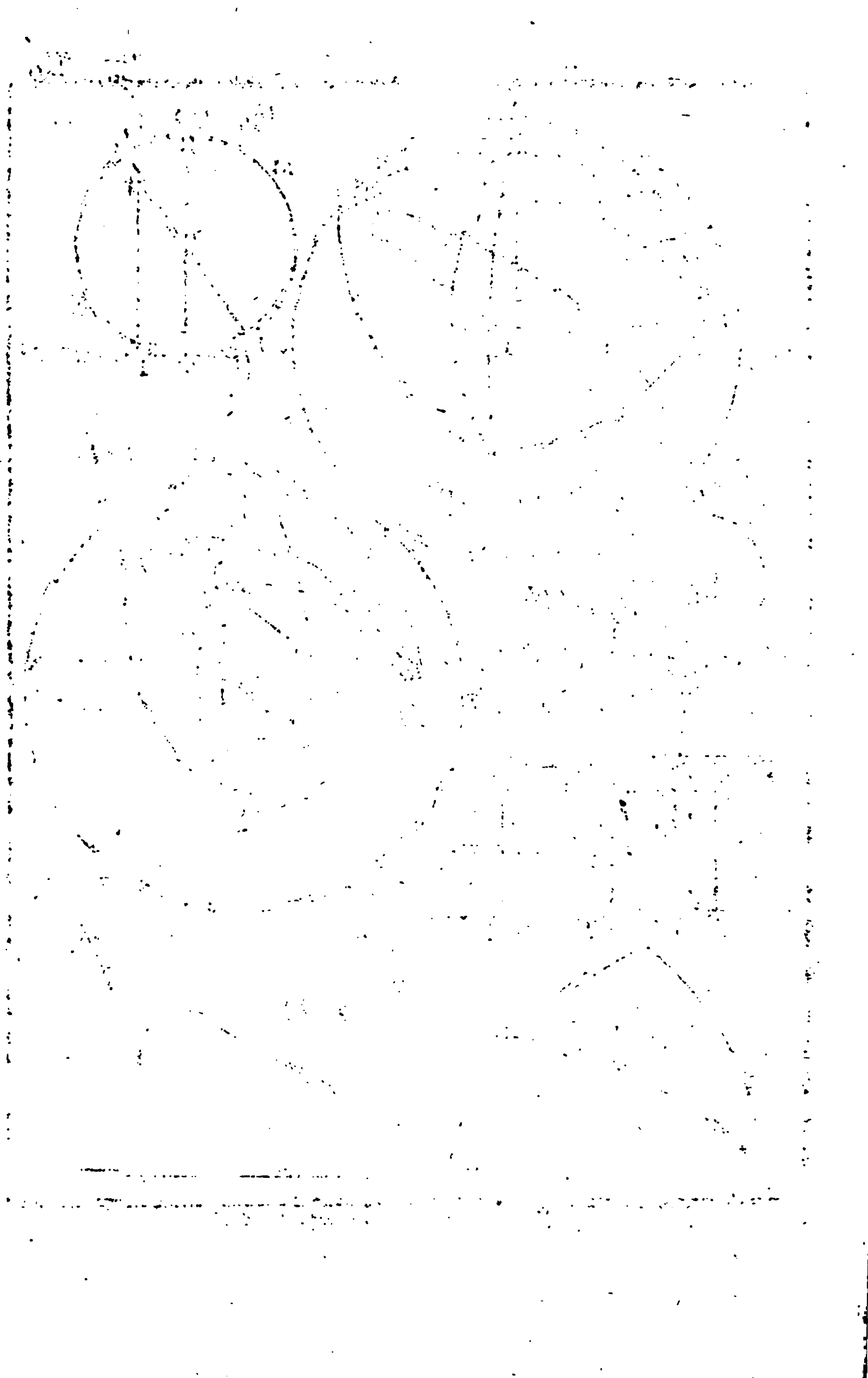
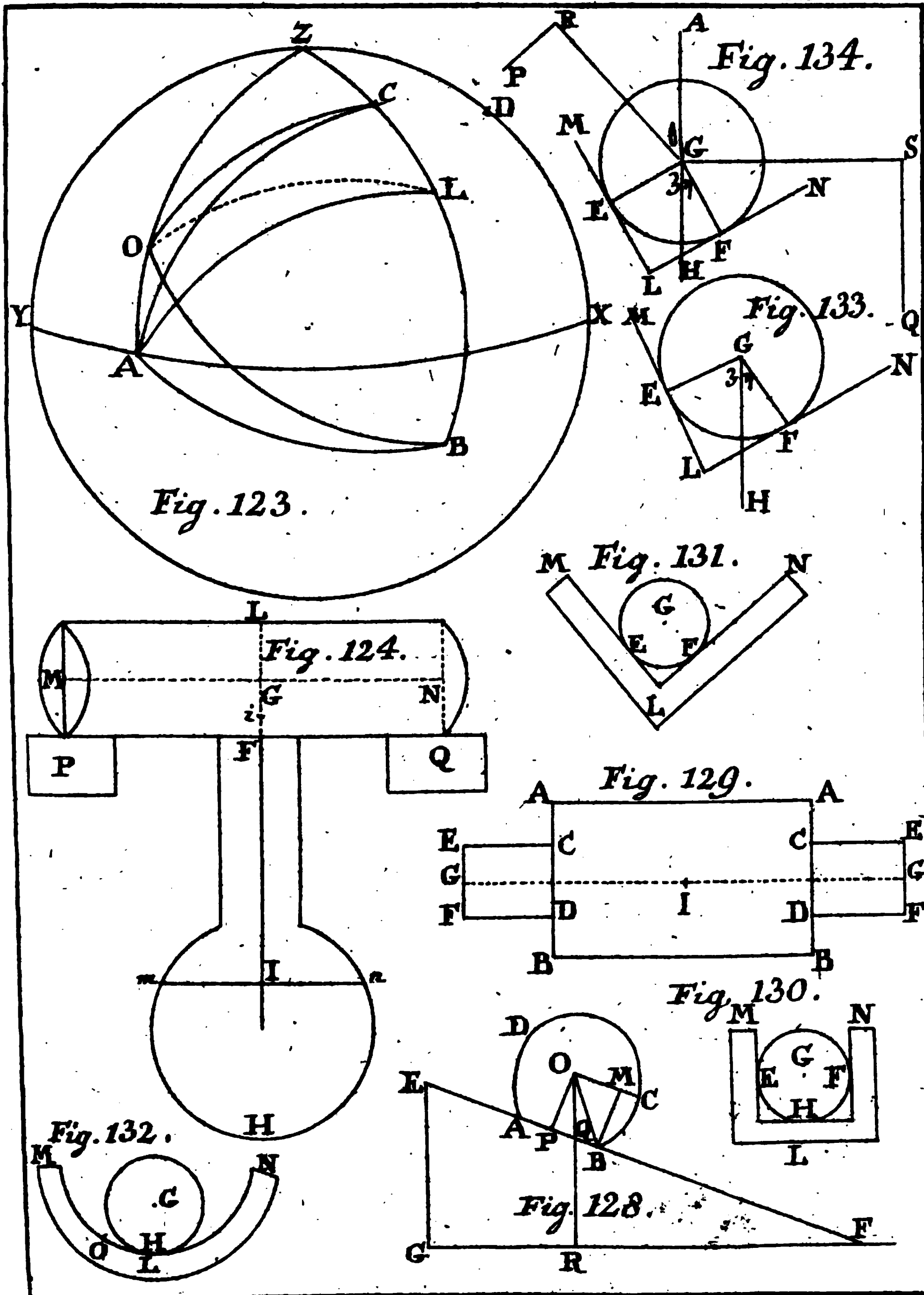
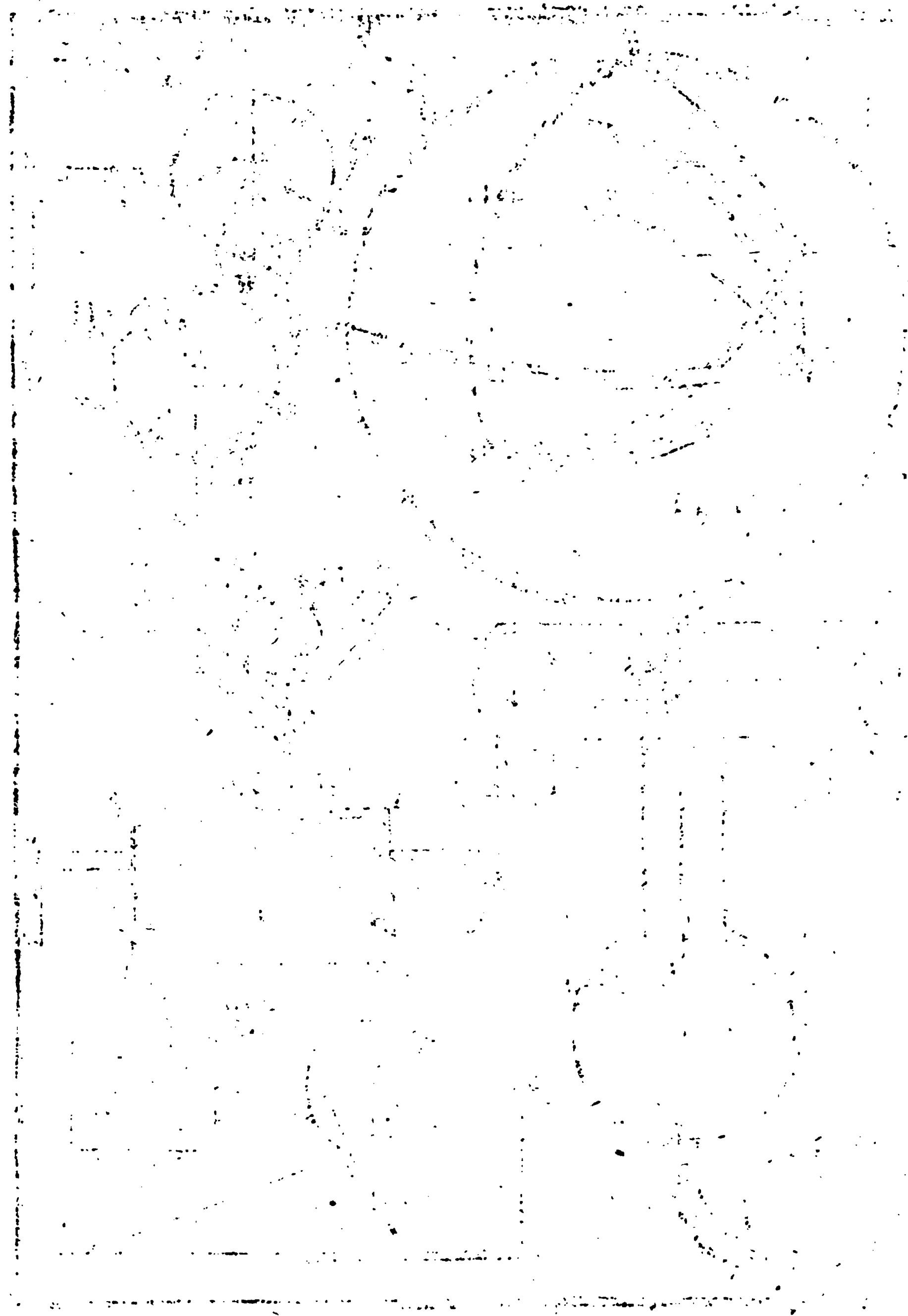


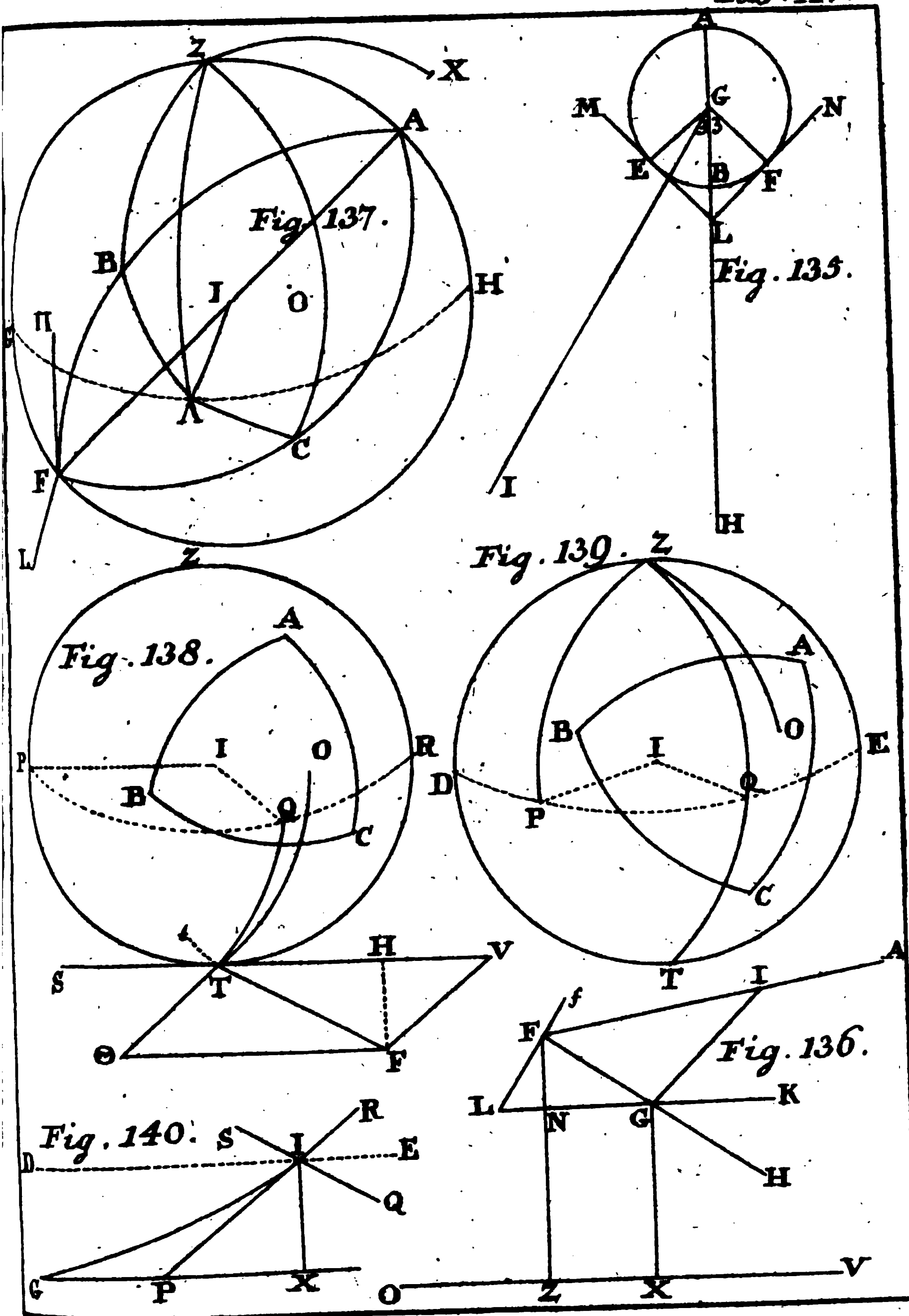
Fig. 123 u. 124. stehen auf Tab. XIV.

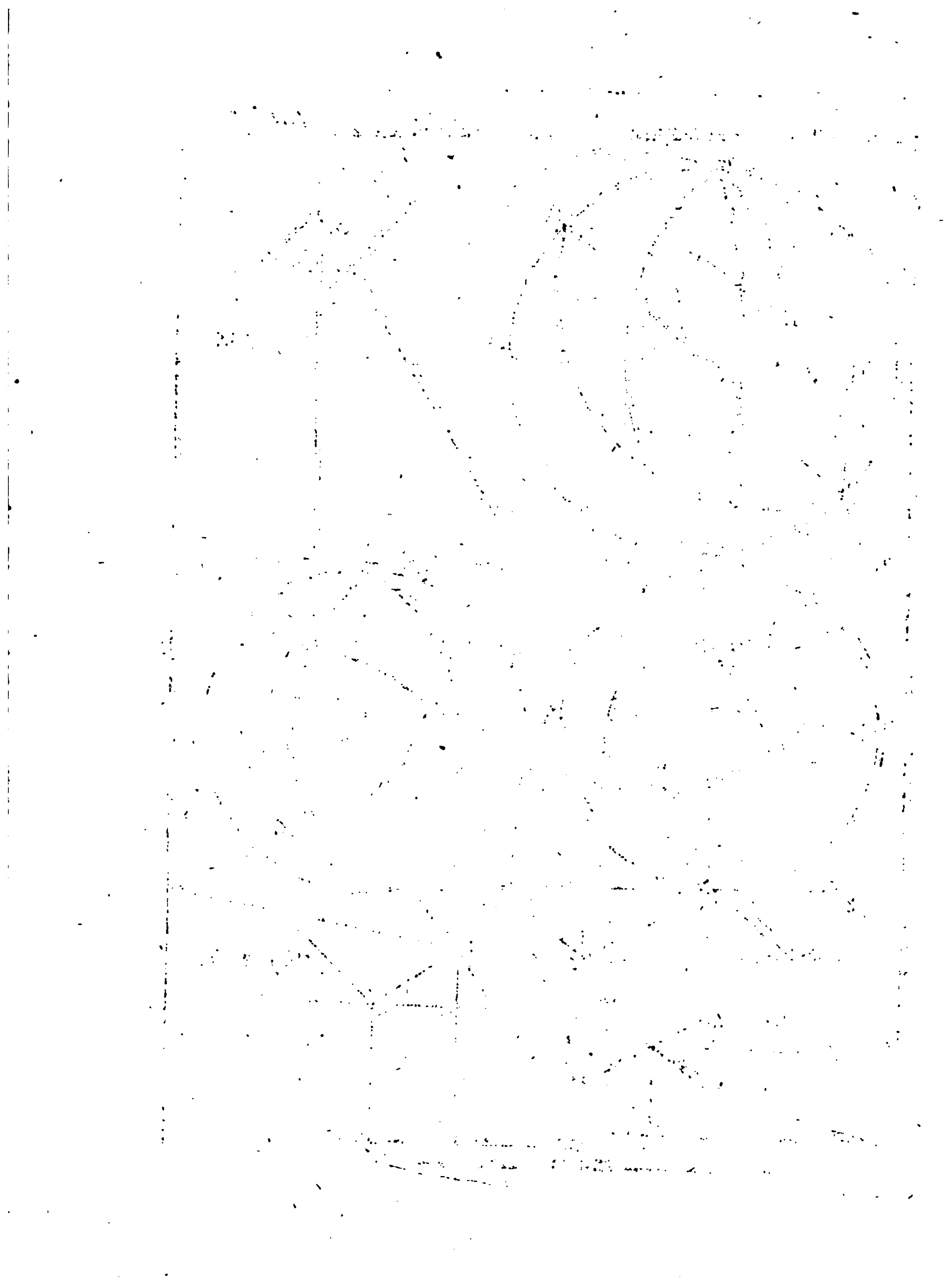


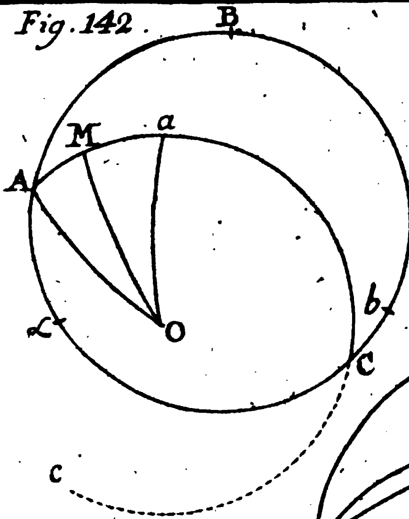

Fig. 123.
Z
C
D
L
O
Y
X
A
B
Fig. 124.
L
M
G
N
i
F
P
Q
m
I
n
H
Fig. 132.
M
N
G
O
H
L
Fig. 134.
R
A
P
M
G
S
E
N
L
H
F
Fig. 133.
Q
M
G
E
N
L
F
H
Fig. 131.
M
N
G
E
F
L
Fig. 129.
A
A
E
C
C
E
G
G
F
D
I
D
F
B
B
Fig. 130.
M
N
G
E
F
H
L
D
O
M
C
E
A
P
Q
B
Fig. 128.
G
R
F

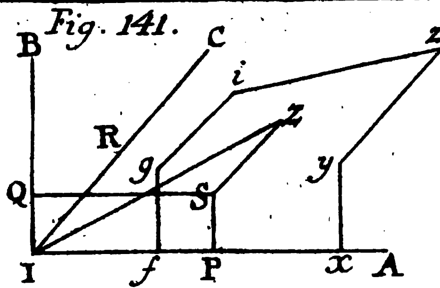


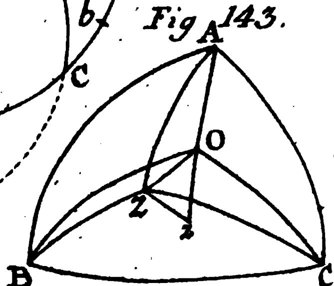
Tab. XV.

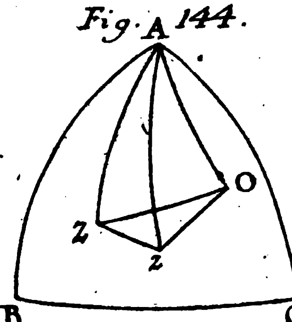


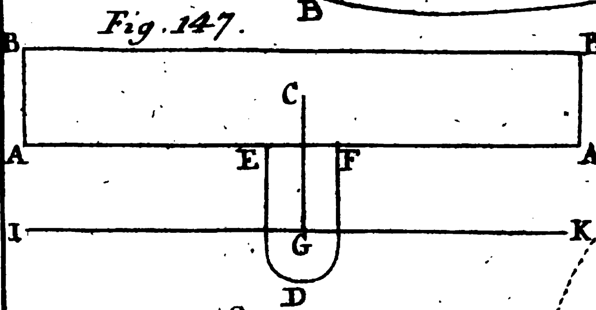


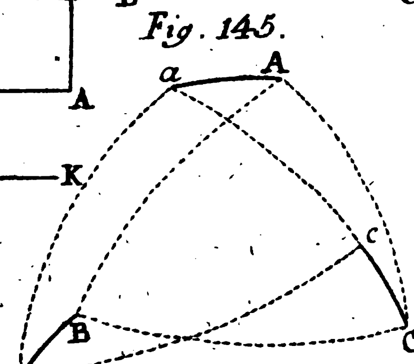

Fig. 142.
B
M
a
A
b
O
C
c

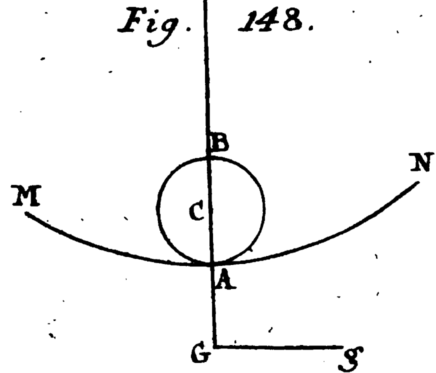

Fig. 141.
B
C
z
i
R
z
g
y
Q
S
I
f
P
x
A

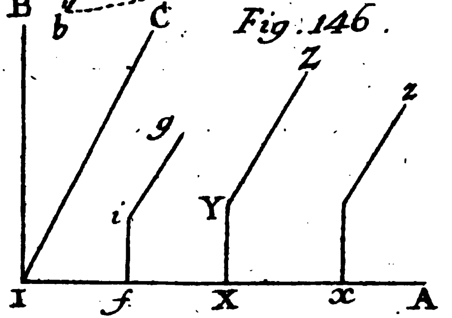

Fig. 143.
A
O
z
z
B
C

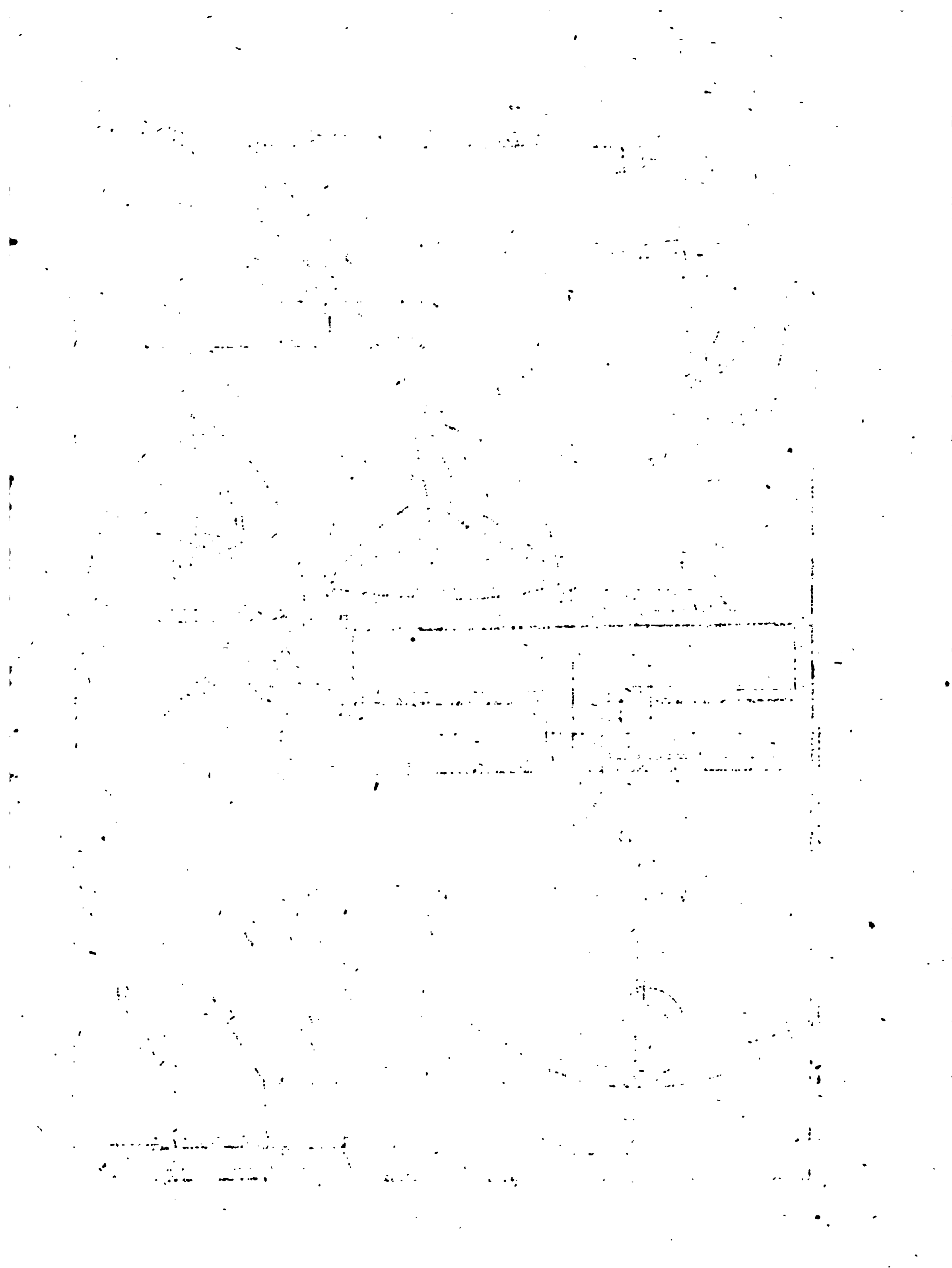

Fig. 144.
A
O
z
z
B
C

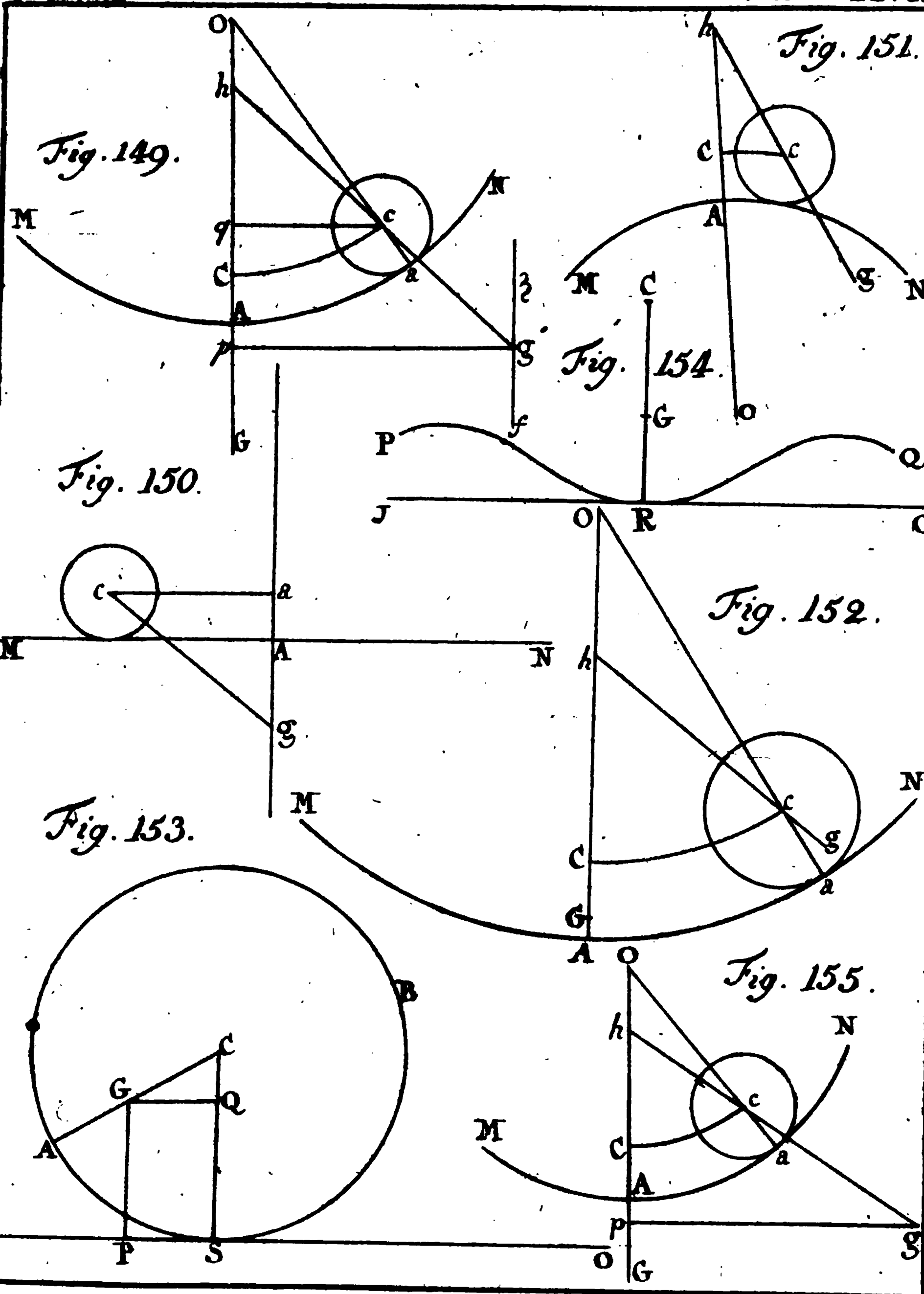

Fig. 147.
B
B
C
A
E
F
A
I
G
K
D


Fig. 145.
a
A
c
B
C
b


O
Fig. 148.
B
M
C
N
A
G
g


B
C
Fig. 146.
Z
g
z
i
Y
I
f
X
x
A




Fig. 149.
O
h
q
c
C
A
p
G
M
N
a
z
g
f
Fig. 150.
c
a
M
A
N
g
Fig. 151.
h
C
c
A
M
g
N
o
Fig. 154.
C
G
P
Q
J
O
R
Fig. 152.
h
c
g
N
M
C
G
A
a
Fig. 153.
B
C
G
Q
A
P
S
O
Fig. 155.
O
h
N
M
c
C
A
a
p
g
G



SUPPLEMENTUM

DE

MOTU CORPORUM RIGIDORUM A FRICTIONE PERTURBATO.

CAPUT I.

DE FRICTIONE IN GENERE.

DEFINITIO.

1091. Frictio est *resistentia*, quam corpus super superficie aspera incedens eamque radens, in motu suo patitur. Est ergo frictio vis motus directioni contraria, et basi corporis, qua superficiem tangit, applicata.

COROLL. 1.

1092. Quamdiu corpus quiescit, frictio nullam plane vim exerit, statim autem atque corpus movetur, subito ejus vis existit motui semper contraria eumque propterea retardans.

COROLL. 2.

1093. Si corpus a vi quapiam sollicitetur, etiamsi quiescat, frictio se illi vi opponit, quoniam in prima motus generatione statim existit, ac nisi vis sollicitans frictionem superet, corpus movere non valebit.

COROLL. 3.

1094. Quia directio frictionis motus directioni jugiter est contraria, mutata motus directione simul frictionis directio mutatur. Statim autem atque corpus ad quietem redigitur, uti motus directio tollitur, ita subito frictio evanescit.

EXPLICATIO.

1095. Ad haec, quae ad frictionem pertinent, dilucidanda, ad omnes circumstantias, quae ad frictionem quicquam conferre posse videantur, attendi conveniet, etsi adhuc minime pateat, quid quisque efficere valeat. Primo igitur superficies, super qua fit incessus, considerari debet, quae sive sit plana sive secus parum refert, quoniam quovis tempore ad contactum est respiciendum. Sit igitur EF superficies, quam tanquam planam contemplemur, siquidem hinc facile ad superficies convexas et concavas judicium extendere licebit: hujus ergo asperitas praecipuum lo- Fig. 125.

cum inter caussas frictionis tenet, quoniam si superficies perfecte esset polita et laevigata, frictioni nullus locus relinqueretur: ex quo colligitur, quo magis superficies fuerit aspera, eo majorem frictionem fieri oportere. Deinde basis corporis AB, qua fit contactus, in computum est ducenda, cujus magnitudo et figura an quicquam ad frictionem conferat, nondum liquet, asperitas vero certe cum asperitate superficiei conjuncta, ubi imprimis motui est obstaculo, ita frictionem generare est putanda. Circa ipsum denique corpus ABCD praeter ejus massam reliquasque proprietates, ejus pressio ad superficiem sine dubio maximi est momenti, quoniam si nulla vi ad eam apprimeretur, nulla certe frictio adesset, corpusque perinde moveretur, ac si superficies abesset. Cum tandem frictio non nisi in motu cernatur, celeritas quoque tanquam insigne frictionis momentum videri posset, sed praeter expectationem videbimus, celeritatem nullo modo ad frictionem determinandam concurrere, quod eo magis est mirandum, cum sublata celeritate omnis frictio certe cesset. Quod si ergo corpus secundum directionem BF super superficie promoveatur, vis aderit, qua id secundum directionem oppositam AE sollicitatur, haecque vis frictio vocatur.

SCHOLION.

1096. Frictionem hic primo tanquam phaenomenon considerabo, cujus quantitas et indoles nobis experientia innotuerit, deinceps in ejus caussas, quantum fieri licet, inquisiturus. Cum enim hic physicae corporum qualitates, cujusmodi sunt asperitates superficierum, et ratio, qua duae superficies invicem appressae sibi mutuo cedant, et minimis particulis quasdam impressiones inducant, totum quasi negotium conficiant; ob defectum talis cognitionis corporum contenti esse debemus phaenomena frictionis ita accipere, prouti ea nobis ab experientia suppeditantur, quemadmodum etiam aliarum virium, quarum effectus in Mechanica evolvimus, origo minime est perspecta. Quae ergo per experientiam nobis circa frictionis indolem innotuerunt, breviter recenseamus.

PHAENOMENON 1.

1097. *Si cetera sint paria, frictio non pendet a corporis celeritate, sed sive id celerius incedat sive tardius, eandem exerit vim, cujus directio semper est contraria motus directioni.*

COROLL. 1.

1098. Frictio ergo non tanquam functio quaedam celeritatis spectari potest, cum perpetuo eandem quantitatem servet, sive motus sit celerrimus, sive tardissimus. Interim tamen, motu penitus cessante, subito evanescit.

COROLL.

COROLL. 2.

1099. Etsi autem frictio a motus celeritate neutiquam pendet, tamen ejus directio per motus directionem unice determinatur, quippe cui est contraria et in ipso contactu applicata.

SCHOLION.

1100. De motu corporis absoluto haec sunt intelligenda, si superficies, in qua corpus incedit, absolute quiescat, sin autem haec superficies ipsa moveatur, ex motu corporis respectivo ad superficiem relato judicium est pendendum. Scilicet si corpus respectu superficiei quiescat, etiamsi utcumque moveatur absolute, frictio est nulla, sin autem respectu superficiei moveatur, frictio eam impetrat quantitatem, quam reliquae circumstantiae exigunt, neque quantitas motus huc quicquam confert. Directio autem frictionis per directionem respectivam corporis respectu superficiei constanter determinatur: neque igitur hic motum secundum duas tresve directiones resolvere licet, et pro quolibet, quasi solus adesset, frictionem definire, indeque frictionem totam colligere: sed uti quantitas frictionis non a motus quantitate pendet, ita directio semper ex directione, secundum quam corpus super superficie incedit, definiri debet. Ceterum hoc phaenomenon non ita accurate per experimenta indicatur, ut nullis plane dubiis sit subjectum: quin potius motus celerrimi ab hac regula aliquantillum recedere videntur. Quodsi forte veritati fuerit consentaneum, id potius alii causae tribuamus, quam stabilitam frictionis notionem immutemus: et cum aberratio sit valde parva, eam eo magis negligamus, cum alias nonnullas exiguas vires, quae ex eodem fonte atque frictio originem trahere videntur, negligere cogamur. Hic scilicet in eos tantum effectus, qui a frictione prouti vulgo concipi solet, inquirere constitui, de aliis motus obstaculis minime sollicitus.

PHAENOMENON 2.

1101. *Si cetera sunt paria, quantitas frictionis etiam neque a figura neque magnitudine basis, qua corpus superficiem contingit, pendet; sed sive a fuerit major sive minor, et cujuscunque figurae, frictio eandem semper vim exerit.*

COROLL. 1.

1102. Quodsi ergo basis, qua corpus superficiem contingit, AB ponatur $= bb$, haec quantitas non in expressionem frictionis ingreditur, aeque parum ac velocitas corporis. Fig. 125.

COROLL. 2.

1103. Neque etiam frictio mutatur, licet contactus in unico fiat puncto, quemadmodum evenit, si corpus sit globus seu corpus basi convexa praeditum: dummodo corpus superficiem radat.

SCHOLION.

1104. Hoc phaenomenon, etsi certissimis experimentis confirmatum, exceptionem tamen patitur, si corpus in acutissimam desinat cuspidem, qua superficiei infigi queat, quo casu sine dubio penitus coerceretur. Excipiendi scilicet hinc sunt casus, quibus superficies ab incedente corpore damnum patitur, de quibus etiam hic non tractabimus. Ceterum maxime paradoxon videbitur, quod a contactu in unico puncto facto tanta frictio nasci queat, quanta a basi satis vasta, cum frictio ab asperitate ambarum superficierum, quae se mutuo terunt producatur, in ampliori autem contactu plus asperitatis superari debeat. Verum hoc dubium mox evanescet, cum ostendemus, quomodo frictio se ratione pressionis habere debeat.

PHAENOMENON 3.

1105. *Si cetera sint paria, frictio proportionalis est pressioni, qua corpus ad superficiem apprimitur: eoque majori pressionis parti aequatur, quo major fuerit asperitas superficierum se mutuo atterentium.*

COROLL. 1.

1106. Quodsi corpus nulla plane vi ad superficiem, super qua incedit, apprimatur, nullam etiam patietur frictionem; quae autem eo major evadet, quo magis appressio augetur.

COROLL. 2.

1107. Si ergo asperitas fuerit eadem, frictio, quam corpora super superficiebus incedentia patiuntur, certae cuidam parti pressionis aequatur, qua parte cognita, frictionis quantitas perfecte determinatur.

COROLL. 3.

Fig. 125. 1108. Quodsi ergo corpus ABCD vi $= P$ ad superficiem apprimatur, ac super ea incedat in directione BF, frictio erit $= \delta P$ (denotante δ partem illam memoratam) qua corpus secundum directionem oppositam AE retrahitur.

SCHO-

SCHOLION. 1.

1109. Haec manifesta sunt, quando corpus motu progressivo incedit super superficie, quo casu frictio motus directioni est contraria. Verum si corpus insuper habeat motum quempiam gyratorium, videndum est, in quanam directione basis superficiem terat, huicque erit contraria frictionis directio, cujus quantitas cum expressione constet, effectus frictionis in motu corporis perturbando ex principiis supra stabilitis definiri poterit. Ceterum quemadmodum frictio a solo attritu corporis et superficiei oritur, patet si corpus ita volvendo promoveatur, ut nullus attritus existat, cujusmodi motus provolutio perfecta vocatur, nulla etiam frictio locum habebit: simulatque autem motus volutorius tantillo fuerit celerior vel tardior, quam illa conditio postulat, sicque attritus sese admisceat, etiamsi sit minimus, tamen statim subito plena frictio δP effectum suum exerit. Quare phaenomena hinc orta ingentem saltum implicare debent, cum pro certa motus specie omnis frictio subito tollatur, dum autem motus tantillum inde discrepat, pleno effectu adsit.

SCHOLION. 2.

1110. Insigne calculi compendium hinc consequimur, quod frictio tam simpliciter exprimitur, et a sola pressione P cum fractione δ, quam asperitas definit, pendet; si enim insuper tam a celeritate corporis quam ab ejus basi penderet, facile in calculos inextricabiles illaberemur. Ac si calculum ad praxin accommodare velimus, totum negotium ad valorem fractionis δ reducitur, quem unico experimento pro singulis corporum generibus assignasse sufficit. Pro corporibus autem ligneis experimenta ostendunt litterae δ valorem circiter $\frac{1}{3}$ tribui debere, si quidem eorum superficies mediocriter fuerit dolata, sin autem magis sit rudis et aspera, majorem valorem sortitur, quemadmodum e contrario corpora metallica probe polita pro littera δ fractionem $\frac{1}{4}$ adeoque minorem exigunt. Verum ex sequentibus patebit, quomodo quovis casu per experimenta conveniens fractionis δ quantitas facile explorari queat. Experientia autem didicimus, nullam superficiem neque corpus tam perfecte poliri posse, ut frictio plane evanescat, quin potius semper satis notabili adhuc parti pressionis aequari deprehenditur. Quare quae supra de motu corporum super plano politissimo, quod nullam gignat frictionem, sunt allata, in praxi neutiquam locum inveniunt.

PROBLEMA. 1.

1111. Si corpus superficiei cuicunque incumbens quiescat, simulque a viribus quibuscunque sollicitetur, distinguere casus, quibus id vel ad motum impellatur vel in quiete perseveret.

SOLU-

SOLUTIO.

Fig. 125. Omnes vires, quibus corpus ABCD sollicitatur, resolvantur in binas, quarum altera sit ad superficiem normalis, altera eidem parallela. Sit P summa omnium ad superficiem perpendicularium, quatenus corpus ab iis ad superficiem apprimitur, erit P pressio, foretque δP frictio, si corpus moveretur. Quod ad alteras vires attinet, consideremus hic tantum casum, quo ab iis corpori motus progressivus induceretur, si nulla esset frictio; quoniam motus gyratorius ampliorem postulat evolutionem infra suscipiendam. Cum igitur corpus alium motum nisi secundum directionem superficiei recipere nequeat, vires huic parallelae quasi uni puncto applicatae spectentur, earumque quaeratur aequivalens, quae sit $= V$ secundum directionem BF urgens, atque manifestum est, quamdiu fuerit $V < \delta P$ corpus in quiete esse perseveraturum, neque id commoveri posse, nisi vis sollicitans V major fuerit, quam δP. Habemus ergo pro vi sollicitante V terminum δP, quo si vis fuerit minor, nullus motus sit consecuturus, sin autem fuerit major, tum demum motus producatur.

COROLL. 1.

1112. Cum corpus in quiete persistere pergat, quamdiu fuerit $V < \delta P$, frictio censenda est vim exercere ipsi vi V aequalem et contrariam: si enim fortius urgeret, corpus in plagam oppositam AE moveri deberet, quod esset absurdum, cum in plagam BF incitetur.

COROLL. 2.

1113. Dum ergo corpus quiescit, frictio non determinatam exerit vim, sed quovis casu tantam, quanta opus est ad corpus in quiete conservandum, nisi opus fuerit vi majori quam δP. Unde si corpus a nulla vi sollicitetur ad motum, etiam frictio nullam vim exerceret.

COROLL. 3.

1114. Quamdiu ergo motus a vi, quae non superet δP, impediri potest, eam vim frictio suppeditat, et quidem secundum eam directionem, qua opus est ad motum impediendum. Sin autem quieris conservatio majorem postulet vim, quoniam frictio tantum praestare nequit, motus generabitur.

SCHOLION 1.

1115. Cum supra dixerimus, in quiete corporum nullam dari frictionem, id de vera quiete tantum, in qua corpus esset perseveraturum, etiamsi

etiamsi nulla adesset frictio, est intelligendum. Statim enim atque corpus a viribus sollicitatur, quibus ad motum incitaretur, si nulla esset frictio, huic etiam motus productioni frictio reluctatur, etiamsi corpus adhuc sit in quiete. Ita igitur frictio tam ratione motus quam quietis est definienda, ut dum corpus movetur, vim exerat perpetuo ipsi δP aequalem et secundum directionem motui contrariam: dum autem corpus quiescit, eadem vim non per se definitam, sed tantam duntaxat exerceat, quanta motui impediendo sufficit, nisi forte ad hoc majori vi opus sit quam δP: tum enim hac tantum vi δP motus productioni resistit, quae cum motum coercere non valeat, motus revera generabitur. Vis scilicet δP est maximus conatus, quo frictio anniti potest, quo revera semper ipsi motui resistit, et quo etiam motus generationi reluctatur, si opus est. Sin autem minor vis sufficiat, etiam minorem tantum exerit: seu quoties vis ad motus productionem cohibendam necessaria non fuerit major quam δP, ea vis a frictione suppeditatur. Haec autem tantum de motu progressivo sunt tenenda, si enim motus gyratorius accedat, praecipue si axis gyrationis fuerit ad superficiem inclinatus, res est altioris indaginis, et quia hoc casu non omnia basis elementa secundum eandem directionem moventur, superficiemque terunt, frictio singulorum elementorum considerari debet, ex quo etiam basis figura et magnitudo in computum ingredietur. Atque ad hanc circumstantiam supra, ubi basis figuram a determinatione frictionis removimus, non respeximus.

SCHOLION. 2.

1116. Difficile sane est frictionis, quemadmodum hic eam experientiae consentaneam statuimus, causam assignare, facile autem causas, quae forte menti occurrant, refellere. Perspicuum enim est, neque ab abrasione quadam particularum, neque a depressione filamentorum, dum corpus super superficie incedit, frictionem oriri posse, quia tum necessario baseos magnitudo in computum intraret. Quod ad frictionem, quatenus motus generationi resistit, attendamus, ea sequenti modo haud inepte explicari posse videtur. Dum nempe corpus ABCD superficiei EF incumbit, contactus non secundum planum AB, ut sensus ostendit, fieri est concipiendus, sed ob minimas utrinque prominentias et cavitates secundum superficiem sinuosam et quasi undulatam, *ab ab ab*, dum ob pressionem prominentiae alterius in cavitates alterius se insinuant. Hoc admisso corpus moveri nequit, quin simul supra superficiem AB aliquantillum elevetur; seu prima motus impressio non secundum directionem OV ipsi AB parallelam, sed secundum quandam directionem OS inclinatam fieri debet, Fig. 126.

quae scilicet parallela sit maximae quasi declivitati in contactu illo sinuoso: atque haec declivitas seu obliquitas respondet asperitati utriusque superficiei in contactu ita, ut pro majore minoreve asperitate angulus VOS major minorve sit concipiendus. Statuatur ergo iste angulus $VOS = \zeta$, corpusque superficiei apprimatur vi $OP = P$, ac jam videamus, quanta vi secundum directionem OV agente opus sit, ut corpus de situ suo dimovere valeat. Agat ergo vis $OV = V$, a qua corpus secundum directionem OS sollicitabitur vi $= V \cos\zeta$: at vis pressionis $OP = P$ huic actioni resistit vi $= P \sin\zeta$. Quare nisi fuerit $V \cos\zeta > P \sin\zeta$ seu $V > P \tang\zeta$, corpus de quiete non deturbabitur; vel quamdiu vis sollicitans $OV = V$ minor fuerit quam $P \tang\zeta$, corpus in quiete perseverabit. Id quod egregie cum supra traditis convenit, cum loco fractionis illius δ hic habeamus tangentem cujuspiam anguli ζ. Verum fateri cogor, hinc non intelligi, cur dum corpus movetur, frictionis vis motui contraria etiam ipsi $P \tang\zeta$ aequalis esse debeat: cum enim basis corporis alternatim se ex illis sinuositatibus expediat, iterumque se eo insinuet, minus patet quantum detrimentum hinc motus sit passurus. Quoniam tamen hypothesis stabilita hinc non evertitur, ei inhaereamus, causamque hic assignatam tanquam a vero non abhorrentem spectemus.

CAPUT II.

DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM GRAVIUM A FRICTIONE IMPEDITO.

PROBLEMA 2.

1117. Si corpus grave super plano horizontali motu progressivo incedat, determinare motus retardationem a frictione oriundam.

SOLUTIO.

Fig. 127. Sit M corporis massa idemque ejus pondus, quod planum horizontale EF tangat basi sua AB, quam pariter planum esse oportet. Consideretur corporis centrum inertiae O, in quo ejus pondus M collectum concipia-

cipiatur, ita ut corpus deorsum sollicitetur vi $OP = M$, quae cum ad planum EF sit normalis, tanta quoque vi ad planum apprimitur: ubi primum observo, nisi recta OP intra corporis basin AB cadat, motum progressivum esse non posse. Verum ne hoc quidem sufficit, cum enim progrediente corpore secundum directionem BF id secundum directionem contrariam BE ob frictionem retrahatur vi $= \delta M$, denotante $1 : \delta$ rationem pressionis ad frictionem, haec vis conatur corpori motum gyratorium circa horizontalem axem per O transeuntem inducere, cujus momentum est $= \delta M . OP$. Cui vi si corpus obsequatur, primo instanti basis punctum A elevari incipiet, ita ut jam totum corpus extremitati basis B innitatur, quo etiam pressio transferetur. In hoc ergo statu ad gyrandum proclivi corpus in B sursum urgeri censendum est vi $BM = M$, unde momentum gyrationi resistens nascitur $= M . BP$: quod nisi superet illud $\delta M . OP$, corpus revera incipiet. Quare cum hic tantum motum progressivum contemplari statuerimus, haec conditio insuper requiritur, ut sit $BP > \delta . OP$, quam ergo hic locum habere assumamus. Fuerit ergo initio corporis celeritas secundum directionem $EF = c$, et elapso tempore t confecerit spatium $= s$, habeatque celeritatem $= v$. Atque ob vim δM motui contrariam erit $\frac{dv}{2gdt} = \frac{-\delta M}{M} = -\delta$, ideoque $v = c - 2gdt$. Porro quia est $ds = vdt$, fiet $s = ct - \delta gtt$. Motus autem tamdiu tantum durabit, quoad corpus ad quietem fuerit reductum, frictione δM tum subito cessante: corpus ergo ad quietem redigetur elapso tempore $t = \frac{c}{2\delta g}$ et percurso spatio $= \frac{cc}{4\delta g}$.

COROLL. 1.

1118. Ut ergo corpus grave super plano horizontali motu progressivo incedere possit, perpendiculum OP ex centro inertiae corporis O in planum demissum non solum intra basin AB cadere, sed etiam a termino basis anteriori B tanto intervallo BP remotum esse debet, ut sit $BP > \delta . OP$.

COROLL. 2.

1119. Ductis igitur ex centro inertiae O cum perpendiculari OP, tum ad anteriorem basis terminum B recta OB, angulum BOP majorem esse oportet angulo, cujus tangens est $= \delta$. Unde si fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, angulus BOP major esse debet quam $18°, 26'$. Sin autem fuerit minor, corpus progrediendo simul provolvetur.

COROLL. 3.

1120. At si corpus motu progressivo puro promoveatur, ejus motus erit uniformiter retardatus, et similis ei, quo corpus celeritate c sursum projectum ascenderet, deorsum sollicitatum vi, quae sit ad ejus massam ut δ ad 1. Hoc tantum discrimine, quod hic corpus ad quietem redactum perpetuo in quiete sit permansurum.

SCHOLION. 1.

1121. Ut tali corpori quieto motus imprimatur, necesse est ut secundum directionem horizontalem impellatur vi, quae major sit quam δM: quamdiu autem sollicitatur vi minore, in quiete perseverabit, nisi forte ad provolutionem incitetur, quod quando evenire debeat, accuratius evolvamus. Sollicitetur ergo primo corpus secundum directionem horizontalem OS, quae per ejus centrum inertiae O transeat, vi $OS = S$, ut sit $S < \delta M$, et frictio pari vi S secundum BA renitetur. An autem circa extremitatem B provolvatur? judicium petetur ex momento frictionis $S . OP$ et momento pressionis M in B translatae, quod est $= M . BP$: hin si fuerit $S . OP > M . BP$, corpus provolvetur, sin minus, in quiete persistet: quia enim vis sollicitans $OS = S$ ipsi centro inertiae est applicata, ea nihil huc confert. Sit nunc vis S infra centrum inertiae in R applicata, et quia hinc momentum provolutioni contrarium nascitur $= S . OR$, ne corpus provolvatur, esse oportet $S . OR + M . BP > S . OP$, seu $S . PR < M . BP$; unde simul patet, si vis horizontalis S sublimius in r esset applicata, corpus provolutioni non fore obnoxium, si fuerit $S . Pr < M . BP$, ubi quidem assumimus esse $S < \delta M$. Idem etiam hinc magis fit perspicuum, si punctum B ut axem fixum, corpusque circa eum mobile spectemus, tum enim vis $rv = S$ momentum in sensum DC est $= S . Pr$ ex pondere autem corporis M in O collecto oritur momentum in sensum contrarium $M . BP$: ideoque corpus provolvetur si $S . Pr > M . BP$, quiescet vero si $S . Pr < M . BP$.

SCHOLION. 2.

1122. Sin autem vis $rv = S$ major fuerit quam δM, motus corpori progressivus inducetur ab excessu $S - \delta M$, quia frictio jam tantum vi $= \delta M$ secundum directionem BE reluctatur. Utrum autem simul corpus sit motum gyratorium adepturum, nec ne? hoc modo cognoscetur. Seposito nimirum motu progressivo, assumo corpori alium motum gyratorium imprimi non posse, nisi circa axem horizontalem per centrum inertiae O transeuntem et ad motus directionem OS normalem, ad quem investi-

vestigandum, cum basis punctum B maneat in plano horizontali, simul ac punctum A elevari incipit, tota pressio in puncto B exercetur, ita ut tum in B habeatur vis sursum urgens BM $=$ M. Nunc igitur ex viribus $rv = S$, $BE = \delta M$, $OP = M$ et $BM = M$ colligitur momentum provolutionem producens $= S . Or + \delta M . PO - M . BP$; quare ut corpus solo motu progressivo feratur, haec conditio requiritur, ut sit $S . Or + \delta M . PO < M . BP$, ubi per hypothesin est $S > \delta M$. Si vis horizontalis S infra centrum inertiae in R esset applicata, corpus provolutioni non erit obnoxium, si fuerit $\delta M . PO < M . BP + S . OR$ seu $S . OR + M BP > \delta M . PO$. Hinc igitur clare intelligimus, quantum cum amplitudo basis, seu distantia perpendiculi ex centro inertiae dimissi OP ab ejus terminis, tum elevatio centri inertiae supra planum horizontale, tum altitudo in qua vis horizontalis applicatur, atque ipsa frictio conferant, ut nulla provolutio sit metuenda.

PROBLEMA. 3.

1123. Si corpus grave ABCD plano inclinato EF imponatur, definire conditiones, sub quibus id ob frictionem in quiete sit permansurum. Fig. 128.

SOLUTIO.

Sit angulus, quem planum inclinatum EF cum horizonte GF constituit, $GFE = \zeta$, corporis autem ei impositi massa $= M$, et centrum inertiae O, basi autem AB plano inclinato incumbat. Ducatur recta verticalis OQR, secundum quam corpus ob gravitatem sollicitari censendum est vi $= M$, quae resolvatur secundum directiones OP et OC, quarum illa in planum EF sit normalis, haec vero eidem parallela, et ob angulum $POQ = GFE = \zeta$, erit vis $OP = M \cos\zeta$ et vis $OC = M \sin\zeta$. Illa autem vi OP corpus ad planum EF apprimitur, unde si moveretur, frictio foret $= \delta M \cos\zeta$: hac vero vi $OC = M \sin\zeta$ ad motum secundum plani inclinati EF directionem sollicitatur. Nisi ergo haec vis $M \sin\zeta$ major sit, quam $\delta M \cos\zeta$, corpus nullum motum progressivum adipiscetur: quare ut corpus quiescat, necesse est, sit $M \sin\zeta < \delta M \cos\zeta$ seu $\tang\zeta < \delta$. Prima ergo conditio ad conservationem quietis necessaria exigit, ut anguli inclinationis $F = \zeta$ tangens minor sit quam fractio δ qua frictio determinatur. Deinde manifesto requiritur, ut recta verticalis OQ intra basin AB cadat. Nam ne corpus circa basis extremitatem B provolvatur, necesse est, ut vis $OQ = M$ momentum respectu puncti B, quod est $M . BQ \cos\zeta$ sit positivum, ideoque BQ positivum, seu punctum Q intra basin AB cadere

dere debet. Quod etiam ex motu gyratorio circa O generando ita ostendi potest. Fingamus enim corpus jam talem motum gyratorium incipere, et dum punctum A elevatur, tota pressio M $\cos\zeta$ in B transferetur, ut nunc corpus in B sollicitetur primo vi BM = M $\cos\zeta$, ob frictionem autem vi BA = M $\sin\zeta$, ex quibus momentum generans motum gyratorium erit = M $\sin\zeta$. OP — M $\cos\zeta$. BP. Quare ne talis motus oriatur, debet esse BP $\cos\zeta$ > OP . $\sin\zeta$ seu BP > OP tang ζ, at OP tang ζ = PQ, ergo ob BP > PQ intervallum BQ positivum esse oportet. Consequenter ut corpus ABCD plano inclinato EF impositum quiescat, primo requiritur, ut verticalis OQ intra basin AB cadat, deinde ut tangens anguli inclinationis F minor sit quam δ.

COROLL. 1.

1124. Hinc igitur facillimum modum nanciscimur, explorandi frictionem seu fractionem δ: planum enim EF eousque elevetur, quoad corpus super eo descendere incipiat, et tangens anguli maximi F, quo corpus etiamnum in quiete persistit, dabit valorem fractionis δ.

COROLL. 2.

1125. Quodsi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, corpus tamdiu in quiete permanebit, quamdiu angulus elevationis GFE non superat 18°, 26′. Sin autem sit $\delta = \frac{1}{4}$, hunc angulum minorem esse oportet, quam 14°, 2′, sicque vicissim ex hoc angulo valor ipsius δ innotescit.

COROLL. 3.

1126. Ut autem corpus super plano inclinato quiescat, non sufficit ut sit tang GFE < δ, sed etiam basis corporis tum ampla esse debet, ut sit BP > OP tang GFE; seu ut angulus BOP major sit quam angulus GFE.

SCHOLION.

1127. In figura repraesentatur sectio corporis verticalis per ejus centrum inertiae O facta, quae simul ad planum inclinatum sit normalis; in qua propterea recta OP ad id est perpendicularis, et OC sit directio motus progressivi, quem gravitas corpori imprimere conatur. Ex dictis autem manifestum est, motum progressivum coerceri, si fuerit tang F < δ. Verum ad judicium expediendum, num corpus motum gyratorium sit accepturum, non sufficit ad solam sectionem ABCD ejusque basin AB spectare, cum fieri posset, ut in hac sectione corpus plano nusquam incumberet, sed contactus in extremitatibus corporis tantum existeret. Tum igitur universus

versus contactus considerari ac dispici debet, quomodo et circa quamnam lineam provolutio oriri possit, quae utique ex figura basis est dijudicanda. Quodsi ergo corpora tam irregularia adhibeantur, ut hoc judicium nimis difficile evadat, experientiam consulere conveniet, an corpus ad provolutionem sit proclive? prior vero conclusio de angulo F manet, et ab hac irregularite neutiquam pendet.

PROBLEMA 4.

1128. Si elevatio plani inclinati EF major fuerit, quam ut grave ei incumbens ABCD in quiete persistere possit, definire conditiones, quibus id solo motu progressivo super plano inclinato EF sit descensurum.

SOLUTIO.

Sit massa, idemque pondus corporis $= M$, et ejus centrum inertiae Fig. 128. O ut ante, atque δ exponens frictionis. Vocato ergo angulo elevationis $GFE = \zeta$, erit per hypothesin $\tang \zeta > \delta$. Iam ex vi gravitatis $OQR = M$ colligimus pressionem in planum inclinatum, seu vim $OP = M \cos \zeta$, et vim ad descensum sollicitantem $OC = M \sin \zeta$. Cum igitur frictio ei renitatur vi $= \delta M \cos \zeta$, corpus revera ad descensum incitabitur excessu virium $M \sin \zeta - \delta M \cos \zeta = M (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$, a qua motus progressivus producetur, dummodo praeterea in corpore nullus motus gyratorius generetur. Videamus ergo, sub quibusnam conditionibus corpori motus gyratorius circa axem horizontalem et ad planum COP normalem per centrum inertiae O ductum generari possit; statim autem ac talis motus incipit, tota pressio $M \cos \zeta$ in B transfertur, ita ut nunc corpus sollicitetur a vi $BM = M \cos \zeta$, et ob frictionem a vi $BA = \delta M \cos \zeta$. unde momentum gyrationem in sensum BADC generans est $= \delta M \cos \zeta . OP - M \cos \zeta . BP$. Quare ne corpus provolutioni sit obnoxium, oportet hanc quantitatem esse negativam, ideoque $BP > \delta OP$. seu $\tang BOP > \delta$.

COROLL. 1.

1129. Quia conditio inventa $\tang BOP > \delta$ non pendet ab inclinatione plani EF, si corpus in minori inclinatione provolutioni non fuerit obnoxium, etiam in majori elevatione nulla provolutio erit metuenda.

COROLL. 2.

1130. Quodsi ergo fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, dummodo angulus BOP major sit quam 18°, 26′, corpus nullum motum volutorium accipiet, sed super plano inclinato vel quiescet, vel solo motu progressivo descendet.

SCHO-

SCHOLION.

1131. In hoc autem judicio pro puncto B non tam extremitas in ipsa sectione ABCD per centrum inertiae O facta est sumenda, sed in tota basi, qua fit contactus, linea per terminos a puncto P maxime remotos ducta est intelligenda, cujus a P distantia pro intervallo PB accipi debet.

PROBLEMA 5.

1132. Si corpus ita fuerit comparatum, ut nulla provolutio sit metuenda, ejus motum descensus super plano inclinato EF determinare.

SOLUTIO.

Posita corporis massa eodemque pondere $= M$, et elevatione plani supra horizontem seu angulo GFE $= \zeta$, ut sit tang $\zeta > \delta$, quia alioquin corpus in quiete perseveraret. Confecerit jam corpus tempore $= t$ super plano inclinato spatium $= s$, motu scilicet a quiete inchoato, et quia vis accelerans est $= M \sin \zeta$, a gravitate oriunda, retardans autem $= \delta M \cos \zeta$ a frictione profecta, hinc nanciscimur istam aequationem: $\frac{dds}{2g\,dt^2}$ $= \frac{M \sin \zeta - \delta M \cos \zeta}{M} = \sin \zeta - \delta \cos \zeta$, hincque integrando $\frac{ds}{dt}$ $= 2gt (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$, quae est celeritatis corporis hoc tempore t acquisita, ipsum autem spatium interea confectum fit $s = gtt (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$.

COROLL. 1.

1133. Frictio ergo non impedit, quo minus corpus super plano inclinato descendat motu uniformiter accelerato, cum celeritates in ratione temporum crescant: verum in multo minore ratione crescunt: sublata enim frictione foret $s = gtt \sin \zeta$.

COROLL. 2.

1134. Si observetur tempus t quo datum spatium s fuerit confectum, simulque elevatio plani seu angulus ζ fuerit exploratus, inde exponens frictionis δ colligi poterit: erit enim $\delta = \text{tang}\,\zeta - \frac{s}{gtt \cos \zeta}$.

SCHOLION.

1135. Hoc modo explorari poterit, utrum pro quiete idem valor exponentis δ reperiatur, ac pro motu eoque sive celeriore sive tardiore: sed

sed hujusmodi experimenta sunt lubrica, quia exiguus error in observatione temporis t commissus multum turbat. Tum vero etiam resistentiae aeris ratio est habenda; quae praesertim in motibus velocioribus insigne momentum afferre potest. Quare nonnisi plurimis hujusmodi experimentis summa cura institutis quicquam certi in hoc negotio concludi poterit. Ne autem resistentia aeris moram faceffat, planum non multum ultra statum quietis elevari convenit, quia in motibus tardioribus ejus effectus est minimus. Tum vero corpus quantum fieri potest, ponderosum efficiatur, frustum plumbi intra ejus volumen includendo, ut tamen basis ex ea constet materia, cujus frictionem explorare lubet.

EXEMPLUM.

1136. Ponamus tabulae EF longitudinem esse 6 ped. Rehn. tempusque t observari, quo corpus descendendo totam hanc longitudinem conficiat, ac videamus, quantum discrimen in tempore t frictione δ parumper mutatu oriri debeat. Cum igitur sit $g = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. erit tempus descensus $t = \sqrt{\dfrac{48}{125(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}}$.

Ponamus $\delta = \frac{1}{3}$, et angulum $\zeta = 20°$, quia debet esse tang $\zeta > \frac{1}{3}$, ac reperietur tempus dascensus $t = 3,\ 652$ min. sec. seu $t = 3\frac{2}{3}$ sec. proxime.

Sit jam δ aliquantulum majus, nempe $\delta = \frac{1}{3} + \frac{1}{100}$, manente $\zeta = 20°$, et prodit tempus $t = 4,\ 45 = 4\frac{9}{20}$ sec.

At si esset $\delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{100}$ manente $\zeta = 20$, invenitur tempus $t = 3,\ 171 = 3\frac{1}{6}$ sec.

Pars igitur centesima unitatis in valore ipsius δ gignit temporis discrimen illo casu $\frac{4}{5}$ sec. hoc vero tantum $\frac{1}{2}$ sec. unde in observatione temporis valde attentum esse oportet. Si plano minor tribuatur elevatio, ut motus multo lentior oriatur, dubium est, an observationibus multum confidere queamus. Levissima enim inaequalitas in superficie descensum vehementer perturbare valebit, ita ut si experimentum idem aliquoties repetatur, phaenomena multum discrepare possint. Atque hanc ob causam, etsi hic calculum hypothesi de frictione stabilitae superstruo, tamen si conclusiones inde deductas cum experientia conferre velimus, minime perfectum consensum expectare debemus.

CAPUT III.

DE MOTU GYRATORIO CORPORUM GRAVIUM CIRCA AXEM FIXUM A FRICTIONE RETARDATO.

PROBLEMA 6.

1137. Efficere ut corpus circa axem fixum per ejus centrum inertiae transeuntem gyrari possit.

SOLUTIO.

Fig. 129. Si corpus debeat gyrari circa axem GG, necesse est, ut utrinque instructum sit terminis cylindricis CEFD, quos axis GG medium trajiciat, ita ut utriusque cylindri axis existat: atque hic quidem assumo, hunc axem GG per corporis centrum inertiae I transire, quanquam eadem structura est observanda, si recta GG non per corporis centrum gravitatis transire debeat. Ut jam durante motu gyratorio haec recta GG fixa maneat, id pluribus modis obtineri potest. Primo hi termini cylindrici annulis fixis ejusdem amplitudinis inseri possunt, intra quas libere, frictione saltem excepta, converti queant: verum si amplitudo annulorum non excedat amplitudinem cylindrorum CEFD, verendum est, ne ob nimis arctam insertionem ingens resistentia oriatur, ac si termini illi cylindrici vel nimium intumescant, motus omnis coerceatur.

Fig. 130. Deinde termini cylindrici utrinque canali MLN in figuram quadrati excavato imponi possunt, ut contactus tantum in tribus punctis E, H, F fiat; dum enim corpus intra has cavitates circumvolvitur, axis GG manet immotus. Ne autem motus nimis impediatur, non opus est, ut ambo parietes verticales M et N cylindrum tangant, sed majore intervallo a se invicem distare possunt. Statim enim atque corpus gyratur, cylindrici termini se alterutri parieti applicabunt, perindeque est, ac si alter abesset; qui tantum ideo adjicitur, ut corpus si forte in sensum contrarium gyretur, se ei pari modo applicare possit.

Fig. 131. Tertio termini cylindrici etiam utrinque cavitati MLN, ex duobus planis inclinatis ML et NL efformatae, imponi possunt; hoc modo contactus

tactus, perpetuo fiet in duobus punctis E et F, axisque GG manebit in quiete; dummodo inclinatio illorum planorum tanta sit, ut termini cylindrici super illis non ascendant, quam conditionem deinceps investigabimus.

Quarto imponi etiam possunt ambo termini cylindrici fulcris in figuram circularem MLN excavatis, quibus quidem corpus dum quiescit ita incumbit, ut contactus fiat in imo puncto H. Quando autem gyratur, contactus fiet in alio puncto elevato, quod cum perpetuo maneat idem, uti ostendemus, axis GG, quamdiu motus gyratorius in eundem sensum durat, manebit immotus. Hic sufficit radium circuli MLM majorem fuisse radio termini cylindrici, sed tanta profunditas huic cavitati tribui debet, ut non sit verendum, ne corpus supra ejus oras M et N transiliat. Fig. 132.

COROLL. 1.

1138. Dum corpus hoc modo utrinque talibus cavitatibus incumbit, ob pondus suum eas premet: ac si centrum inertiae I in medio versetur, utrinque pressio aequalis exeretur: sin autem id non fuerit medio, pressiones erunt distantiis reciproce aequales, ita ut summa sit toti ponderi aequalis.

COROLL. 2.

1139. Quodsi autem corpus gyretur, pressio non amplius a solo pondere corporis pendet, sed ob ipsam frictionem immutabitur, ideoque ex frictionis ratione determinari debet, unde etiam ultimo casu punctum contactus est definiendum.

SCHOLION.

1140. Pressio etiam, ideoque et frictio, plurimum perturbatur a viribus, quibus corpus dum gyratur, praeter gravitatem sollicitatur Quare quo hoc argumentum dilucide pertractemus, primo mentem ab hujusmodi viribus abstrahamus, corpusque tantum grave spectemus, cui initio motus gyratorius fuerit impressus; et quantum is ob frictionem retardari debeat, indagemus. Tum vero etiam assumamus, axem gyrationis GG per centrum inertiae corporis I transire, ab eoque ambos terminos aeque esse remotos, ita ut corpus utrinque sibi sit simile. Quin etiam ne vires obliquae calculum turbent, statuamus, rectam GG simul esse axem principalem corporis. Minime enim consultum videtur, corpori figuram nimis irregularem tribuendo, investigationes nostras difficilibus calculis implicare, cum ipsa principia hactenus stabilita etiam his casibus evolvendis sufficiant, si quis laborem suspicere voluerit. Casus autem fig. 130. re-

 prae-

praesentatus in fig. 131. continetur, dum alterum planum sit verticale et alterum horizontale: deinde vero etiam casum fig. 132. ex eo dijudicari posse videbimus.

PROBLEMA. 7.

Fig. 133. 1141. Si corporis (in fig. 129. repraesentati) termini cylindrici utrinque inter duo plana utcunque inclinata ML et NL sustententur, corpusque in gyrum agatur celeritate quacunque, definire frictionem ejusque effectum in motu corporis retardando.

SOLUTIO.

Quia centrum inertiae I in medio axis GG situm assumimus, respectu terminorum cylindricorum utrinque omnia erunt paria. Sit igitur pro altero termino radius basis circularis GE = GF = f, et puncta contactus in E et F. Ducta verticali GH ponantur anguli EGH = ζ et FGH = η, quibus positio planorum ML et NL determinantur: tum vero corpus jam elapso tempore t gyretur in sensum EF celeritate angulari = ε, quae initio fuerit = $\mathfrak{e}$. Quia ergo ex hac parte corpus in punctis E et F sustinetur, sint E et F pressiones, quibus corpus planis innititur, ac vicissim secundum directiones eo normales EG et FG urgetur. Frictio porro in punctis E et F, ubi fit attritus, ita se exeret, ut in E corpus sollicitetur vi sec. EM = δE et in F vi sec. FL = δF, ita ut ex hac parte quatuor habeantur vires.

vis EG = E; vis EM = δE; vis FG = F; vis FL = δF,

totidemque pares ex altera parte. Posita ergo massa eodemque pondere corporis = M, quia omnis motus progressivus excluditur, hae vires centro inertiae applicatae se mutuo destruere debent: Colligitur autem ex illis quaternis viribus vis verticaliter sursum tendens

$$E\cos\zeta + F\cos\eta + \delta E\sin\zeta - \delta F\sin\eta$$

et vis horizontalis dextorsum directa

$$E\sin\zeta - F\sin\eta - \delta E\cos\zeta - \delta F\cos\eta,$$

ubi haec debet evanescere, illa autem dimidio ponderi corporis aequari. Hinc nanciscimur:

$$E\sin\zeta - F\sin\eta = \delta(E\cos\zeta + F\cos\eta) \text{ et}$$

$$(1+\delta\delta)(E\cos\zeta + F\cos\eta) = \tfrac{1}{2}M, \text{ ideoque}$$

$$E\cos\zeta + F\cos\eta = \frac{M}{2(1+\delta\delta)} \text{ et}$$

$$E\sin\zeta - F\sin\eta = \frac{M\delta}{2(1+\delta\delta)}$$

ex

ex quibus elicitur

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)};\quad F = \frac{M(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$

ubi statim est observandum, cum vires E et F negative esse nequeant, necessario esse oportere $\sin\zeta > \delta\cos\zeta$ seu $\tang\zeta > \delta$.

Nunc denique colligantur momenta ex frictione nata, quae erunt $\delta(E+F)f = \frac{M\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$ cujus duplum motui opponitur. Quare si momentum inertiae corporis respectu axis GG fuerit $= Maa$, habebimus hanc aequationem:

$$\frac{d\mathfrak{s}}{2gdt} = \frac{-\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{(1+\delta\delta)aa\sin(\zeta+\eta)},$$ et integrando

$$\mathfrak{s} = \varepsilon - \frac{2\delta fgdt(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{(1+\delta\delta)aa\sin(\zeta+\eta)}.$$

COROLL. 1.

1142. Quo minor ergo est f, seu quo graciliores termini cylindrici, eo minor est effectus frictionis. Sed hos terminos non pro lubitu diminuere licet, quia eos satis fortes esse oportet ad onus gestandum, atque quantitas f fere rationem subduplicatam ponderis M sequi debet.

COROLL. 2.

1143. Si sit $\zeta = 90$ et $\eta = 0$, qui est casus fig. 130. momentum frictionis est $= \frac{M\delta(1+\delta)f}{1+\delta\delta}$; Sin autem sit $\eta = \zeta$, seu plana ML et NL aequaliter ad horizontem inclinata, erit momentum frictionis

$$= \frac{2M\delta f\sin\zeta}{(1+\delta\delta)\sin 2\zeta} = \frac{M\delta f}{(1+\delta\delta)\cos\zeta}:$$ ubi debet esse $\tang\zeta > \delta$.

COROLL. 3.

1144. Minimum autem fit momentum frictionis sumendo $\tang\zeta = \delta$, tum enim ob $F = 0$, erit $E = \frac{M}{2(1+\delta\delta)\cos\zeta} = \frac{M}{2\sqrt{(1+\delta\delta)}}$ ideoque momentum frictionis $= \frac{M\delta f}{\sqrt{(1+\delta\delta)}}$. Hoc ergo casu corpus soli plano ML innititur, et alterum NL plane non in computum venit.

COROLL. 4.

1145. Hinc casus fig. 132. quaecunque sit cavitatis MLN figura facile evolvitur. Termini enim cylindrici puncto O applicabuntur, ubi tangens cum horizonte facit angulum, cujus tangens est $= \delta$, eritque momentum frictionis $= \frac{M\delta f}{\sqrt{(1+\delta\delta)}}$.

SCHOLION.

1146. Terminos ergo cylindricos ita sustentari convenit, ut contactus utrinque in unico fiat puncto, quia tum momentum frictionis minimum redditur: quem in finem eos cavitatibus MLN (fig. 132.) imponi expediet, quae in formam semicirculi crassitiem non multum superantis sint excavatae, ne situs, quem in motu obtinent, multum discrepet a situ quietis. Tum vero hos terminos cylindricos quam maxime tenues effici oportet, quantum quidem eorum firmitas ratione ponderis gestandi permittit. Praeterea etiam hi termini oleo aliave materia lubrica inungi solent, quo magis attritus diminuatur, fractionique δ minor valor concilietur. Interim tamen casu, quem sumus contemplati, motus mox extinguetur, quod fiet elapso tempore $t = \frac{e(1+\delta\delta)\, aa \sin(\zeta+\eta)}{2\delta fg(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}$. Quando autem vires adhibentur, ad motum conservandum, ex iisdem principiis earum quantitas definiri potest, ut motus maneat uniformis. Quin etiam hujusmodi machinae, dum in gyrum aguntur, ad onera elevanda instrui solent, quae operatio ut motu uniformi perficiatur, tantis viribus opus est, quae non solum oneris resistentiam, sed etiam frictionem superare valeant; quem casum, cum in vita communi frequentissime occurrat, hic evolvamus.

PROBLEMA. 8.

1147. Si cylindrus (fig. 129.) adhibeatur ad onus quodpiam elevandum, determinare vires ei applicandas, ut habita frictionis ratione motus servetur uniformis.

SOLUTIO.

Fig. 134. Incumbat alter terminus cylindricus, cujus radius GE $=$ GF $= f$ binis planis inclinatis ML et NL, quae cum horizonte angulos faciant ζ et η, quibus aequales erunt anguli, quos radii GE et GF ad puncta contactus E et F ducti cum recta verticali GH faciunt. Dum autem corpus in sensum

sum EF gyratur, ope cordae in medio circumvolutae elevet onus $= Q$, quod pondere suo $= Q$ vecti horizontali $GS = s$ secundum directionem verticalem SQ motui reluctetur. Tum vero radio $GR = r$, a verticali GA declinanti angulo $AGR = \vartheta$ jugiter applicata sit vis $RP = P$ ad eum normalis, cujus quantitas quaeritur, ut motus maneat uniformis existente celeritate angulari circa axem $GG = \varepsilon$. Quodsi jam pondus ipsius corporis, per cujus centrum inertiae axis gyrationis GG transit, ponatur ut ante $= M$, et vires quibus alter terminus cylindricus a planis, quibus in E et F incumbit, repellitur, secundum $EG = E$ et secundum $FG = F$, unde frictiones nascuntur secundum $EM = \delta E$ et secundum $FL = \delta F$, supra vidimus, hinc oriri vim verticaliter sursum tendentem $E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta(E \sin\zeta - F \sin\eta)$, et vim horizontalem dextrorsum directam $= E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta(E \cos\zeta + F \cos\eta)$, quas ob binos terminos cylindricos duplicari oportet. Deinde ex pondere ipsius corporis habemus vim verticaliter deorsum nitentem $= M$ et ex onere elevando vim $= Q$. Ex vi sollicitante P vero oritur vis deorsum urgens $= P \sin\vartheta$, et vis horizontaliter sinistrorsum $= P \cos\vartheta$: quae vires cum se mutuo debeant destruere, obtinebimus has aequationes:

$$E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta(E \sin\zeta - F \sin\eta) = \tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{2} P \sin\vartheta$$

$$E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta(E \cos\zeta + F \cos\eta) = \tfrac{1}{2} P \cos\vartheta.$$

unde colligimus

$$E \cos\zeta + F \cos\eta = \frac{M + Q + P \sin\vartheta - \delta P \cos\vartheta}{2(1 + \delta\delta)}$$

$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \frac{M\delta + Q\delta + P\delta \sin\vartheta + P \cos\vartheta}{2(1 + \delta\delta)}$$

hincque porro

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta) + Q(\sin\eta + \delta\cos\eta) + P(\sin\eta + \delta\cos\eta)\sin\vartheta + P(\cos\eta - \delta\sin\eta)\cos\vartheta}{2(1 + \delta\delta)\sin(\zeta + \eta)}$$

$$F = \frac{(M + Q + P \sin\vartheta)(\sin\zeta - \delta\cos\zeta) - P(\cos\zeta + \delta\sin\zeta)\cos\vartheta}{2(1 + \delta\delta)\sin(\zeta + \eta)}.$$

Praeterea vero, quia motum uniformem desideramus, momenta virium respectu axis gyrationis se destruere debent. Est autem momentum accelerans $= Pr$, et momenta opposita $= 2\delta(E + F)f + Qs$, unde necesse est sit $Pr = 2\delta(E + F)f + Qs$, ideoque $Pr - Qs$

$$= \frac{\delta(M + Q + P\sin\vartheta)(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta) + \delta P(\cos\eta - \cos\zeta - \delta\sin\eta - \delta\sin\zeta)\cos\vartheta}{(1 + \delta\delta)\sin(\zeta + \eta)} f$$

hincque vim sollicitantem P definire licet. Quodsi jam ponamus terminos cylin-

cylindricos in cavitatibus circularibus sustineri, ut contactus unico loco fiat, ubi scilicet tangens ad horizontem inclinetur angulo $= \zeta$: erit $F = 0$, ideoque $(M+Q+P \sin\vartheta - \delta P \cos\vartheta) \tang\zeta = \delta (M+Q+P \sin\vartheta) + P \cos\vartheta$ et $E = \frac{M+Q+P \sin\vartheta - \delta P \cos\vartheta}{2(1+\delta\delta)\cos\zeta}$. Inde colligitur P

$$= \frac{(M+Q)(\delta - \tang\zeta)}{(\sin\vartheta - \delta\cos\vartheta)\tang\zeta - \cos\vartheta - \delta\sin\vartheta}$$ quo valore in postrema aequatione, quae fit $Pr - Qs = 2\delta Ef$, substituto prodet

$$(M+Q)\delta f \cos\vartheta = (M+Q) r (\sin\zeta - \delta\cos\zeta) + Qs ((\sin\vartheta - \delta\cos\vartheta)\sin\zeta - (\cos\vartheta + \delta\sin\vartheta)\cos\zeta)$$

ubi si ponamus $\delta = \tang\lambda$, haec aequatio erit

$$(M+Q) f \sin\lambda \cos\vartheta = (M+Q) r \sin(\zeta-\lambda) - Qs \cos(\zeta+\vartheta-\lambda)$$

unde angulus ζ erui debet, quo invento erit $P = \frac{(M+Q)\sin(\zeta-\lambda)}{\cos(\zeta+\vartheta-\lambda)}$

seu $P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q) f \sin\lambda \cos\vartheta}{r\cos(\zeta+\vartheta-\lambda)}$.

COROLL. 1.

1148. Si terminus cylindricus unico loco incumbat in alveolo cavo, pro P substituto valore prodit pressio in eo loco E

$$= \frac{(M+Q)\cos\vartheta}{2(1+\delta\delta)\cos\lambda\cos(\zeta+\vartheta-\lambda)} = \frac{(M+Q)\cos\lambda\cos\vartheta}{2\cos(\zeta+\vartheta-\lambda)}$$ posito $\delta = \tang\lambda$. Haec ergo pressio evanescit casu $\cos\vartheta = 0$, nisi simul fiat $\cos(\zeta+\vartheta-\lambda) = 0$.

COROLL. 2.

1149. Posito autem $\vartheta = 90°$, erit

$$(M+Q) r \sin(\zeta-\lambda) + Qs \sin(\zeta-\lambda) = 0$$

quo ergo casu fit $\zeta = \lambda$ seu $\tang\zeta = \delta$, et $P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q) f \sin\lambda}{r}$. ∴ Cum autem sit $E = \frac{M+Q+P}{2(1+\delta\delta)\cos\lambda}$, erit $Pr - Qs = \frac{\delta(M+Q+P) f}{(1+\delta\delta)\cos\lambda}$ $= (M+Q+P) f \sin\lambda$ et $P = \frac{Qs + (M+Q) f \sin\lambda}{r - f\sin\lambda}$.

COROLL.

COROLL. 3.

1150. Si ponamus $\vartheta = -90°$, primo ob $F = o$ habemus $(M + Q - P)\,\text{tang}\,\zeta = \delta (M + Q - P)$ tum vero cum sit E $= \frac{M + Q - P}{2(1 + \delta\delta)\cos\zeta}$, erit $Pr - Qs = \frac{\delta f (M + Q - P)}{(1 + \delta\delta)\cos\zeta}$. Quare si capiatur $P = M + Q$, pressio ideoque et frictio evanescit, sumique oportet $r = \frac{Qs}{M + Q}$.

COROLL. 4.

1151. Nisi autem hoc casu $\vartheta = -90°$ statuatur $P = M + Q$, erit $\text{tang}\,\zeta = \delta$, et $Pr - Qs = \frac{\delta f (M + Q - P)}{\sqrt{(1 + \delta\delta)}} = f (M + Q - P) \sin\lambda$ hincque $P = \frac{Qs + (M + Q) f \sin\lambda}{r + f \sin\lambda}$. At r ita sumi oportet, ut valor ipsius E ne fiat negativus. Hoc enim casu sustentatio ex opposito fieret, ibique frictio oriretur.

SCHOLION 1.

1152. Hoc ergo modo frictio penitus tolli posset, vim P ita applicando, ut cum pondere corporis M et onere Q aequilibrium constituat. Verum hic casus in praxi parum utilitatis haberet, quia termini cylindrici intra alveos suos, quos ipsis ampliores esse oportet, hinc inde vacillarent, quo incommodo motus magis quam frictione impediretur. Deinde vero pleraeque hujus generis machinae ita disponi solent, ut vis sollicitans P multo sit minor quam onus elevandum Q, ideoque multo magis $P < M + Q$. Si enim vi oneri aequalem impendere velimus, negotium sine machina absolvi posset, unde non mirum hoc casu frictionis lucrum obtineri posse. Ac si vis P pro data sumatur, ex nostris formulis elicitur r, pro loco applicationis: unde si celeritas angularis machinae sit $= \varepsilon$, onus elevabitur celeritate εs, vis vero sollicitans aget celeritate $= \varepsilon r$. Nisi ergo frictio motum impediret, foret $P\varepsilon r = Q\varepsilon s$, nunc autem ob frictionem erit $P\varepsilon r - Q\varepsilon s = 2\delta\varepsilon E f$: ubi conservari convenit, denotare $P\varepsilon r$ actionem vis sollicitantis, $Q\varepsilon s$ vero quantitatem effectus uno minuto secundo producti, cum εr et εs sint spatia uno minuto secundo confecta. Verum haec ad Theoriam machinarum sunt referenda, quam seorsim pertractari convenit.

SCHOLION. 2.

1153. Si vis sollicitans P cum angulo ϑ fuerit data, quaeraturque distantia applicationis seu longitudo vectis GR $= r$, ex prima aequatione statim colligitur angulus ζ seu punctum E, ubi in cavitate fiet contactus, scilicet: $\tan \zeta = \frac{\delta(M + Q + P \sin \vartheta) + P \cos \vartheta}{M + Q + P \sin \vartheta - \delta P \cos \vartheta}$; ad quem cognoscendum statuantur duo anguli λ et ξ ut sit $\tan \lambda = \delta$ et $\tan \xi = \frac{P \cos \vartheta}{M + Q + P \sin \vartheta}$ eritque $\tan \zeta = \frac{\tan \lambda + \tan \xi}{1 - \tan \lambda \tan \xi}$ ideoque $\zeta = \lambda + \xi$. Unde patet fore $\zeta > \lambda$, si $\cos \vartheta > 0$, hoc est, si recta GR sursum vergat, sin autem deorsum dirigatur, fore $\zeta < \lambda$, quo casu fieri potest, ut contactus fiat in infimo puncto, si scilicet fuerit $P = \frac{\delta(M + Q)}{-\cos \vartheta - \delta \sin \vartheta}$. Tum vero habebitur pressio $E = \frac{(M + Q + P \sin \vartheta - \delta P \cos \vartheta) \cos \lambda^2}{2 \cos(\lambda + \xi)}$, seu $E = \frac{P \cos \lambda \cos \vartheta}{2 \sin \xi} = \frac{1}{2} \cos \lambda \sqrt{((M + Q)^2 + 2P(M + Q) \sin \vartheta + PP)}$ hincque tandem concluditur longitudo vectis $GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f \sin \lambda}{P} \cdot \sqrt{((M + Q)^2 + 2P(M + Q) \sin \vartheta + PP)}$. Ut igitur pro eadem vi sollicitante P pressio E ideoque et frictio fiat minima, angulum ϑ esse oportet $= -90^\circ$, seu vectem GR in ipso radio GS capi convenit, quo casu fit, ut jam vidimus, $\xi = 0$, hincque $\zeta = \lambda$, et $E = \frac{1}{2}(M + Q - P) \cos \lambda$ atque $GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f(M + Q - P) \sin \lambda}{P}$. Investigemus nunc etiam motum penduli, terminis cylindricis simili modo suspensi, qui scilicet utrinque binis planis inclinatis incumbant: et quia hic motus est reciprocus, ista plana aequaliter ad horizontem inclinata statui conveniet.

PROBLEMA 9.

1154. Si pendulum oscilletur circa axem horizontalem fixum, cujus termini cylindrici utrinque binis planis aequaliter inclinatis incumbant, definire ejus motum ob frictionem perturbatum.

SOLU-

SOLUTIO.

Sit AEBF basis alterius termini cylindrici, qui incumbat planis ML et NL ad horizontem inclinatis angulo $= \zeta$ erunt puncta contactus in E et F, ut radii GE et GF cum verticali ABLH angulos constituant $= \zeta$, quae omnia ad alteram partem perinde se habeant, ut axis gyrationis sit recta horizontalis GG. Sit porro penduli forma utrinque sibi similis, ac jam elapso tempore t declinet penduli centrum inertiae I a situ verticali angulo HGI $= \phi$, unde ad situm verticalem accedat celeritate angulari $= g$, ita ut motus gyratorius fiat in sensum EBF. Sit massa tota idemque pondus penduli $=$ M, distantia GI $= h$, et momentum inertiae ejus respectu axis gyrationis GG $=$ Mkk. Quod ergo ad actionem gravitatis attinet, totum pondus M in puncto I collectum concipere licet. Fig. 135.

Ponatur jam terminorum cylindricorum radius GE $=$ GF $= f$, sintque vires, quibus ii a planis sustentantur, secundum EG $=$ E et secundum GF $=$ F: unde frictiones erunt secundum EM $= \delta$E, et secundum FL $= \delta$F.

Ex his autem viribus ut supra §. 1141. ubi $\eta = \zeta$ nascuntur primo vis verticalis sursum tendens $= (\mathrm{E}+\mathrm{F})\cos\zeta + \delta(\mathrm{E}-\mathrm{F})\sin\zeta$ et vis horizontalis dextrorsum directa $= (\mathrm{E}-\mathrm{F})\sin\zeta - \delta(\mathrm{E}+\mathrm{F})\cos\zeta$. Pondus autem praebet vim deorsum tendentem $=$ M. Unde pro motu progressivo seu motu centri inertiae I habemus primo vim verticaliter deorsum directam: $\mathrm{M} - 2(\mathrm{E}+\mathrm{F})\cos\zeta - 2\delta(\mathrm{E}-\mathrm{F})\sin\zeta = \mathrm{P}$ et vim dextrorsum tendentem horizontalem $2(\mathrm{E}-\mathrm{F})\sin\zeta - 2\delta(\mathrm{E}+\mathrm{F})\cos\zeta = \mathrm{Q}$. Motus autem hujus, cum celeritas centri inertiae sit $= hg$, celeritas verticalis deorsum tendens est $= hg\sin\phi$ et celeritas horizontalis dextrorsum directa $= hg\cos\phi$, unde colligimus: $\dfrac{hdg\sin\phi + hgd\phi\cos\phi}{2gdt} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$ et $\dfrac{hdg\cos\phi - hgd\phi\sin\phi}{2gdt} = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{M}}$ ubi est $gdt = -d\phi$. Deinde cum corpus circa axem fixum GG gyretur, cujus respectu est momentum virium ad accelerandum $= \mathrm{M}h\sin\phi - 2\delta(\mathrm{E}+\mathrm{F})f$, erit $\dfrac{dg}{2gdt}$ $= \dfrac{\mathrm{M}h\sin\phi - 2\delta(\mathrm{E}+\mathrm{F})f}{\mathrm{M}kk}$. Qui valor si in illis substituatur, habebimus $\dfrac{\mathrm{M}hh\sin\phi^2 - 2\delta(\mathrm{E}+\mathrm{F})fh\sin\phi}{\mathrm{M}kk} - \dfrac{hgg\cos\phi}{2g} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$

 Mhh

$$\frac{Mhh \sin\phi \cos\phi - 2\delta(E+F)fh\cos\phi}{Mkk} + \frac{hgg \sin\phi}{2g} = \frac{Q}{M}$$ hincque

$$\frac{Mhh \sin\phi - 2\delta(E+F)fh}{Mkk} = \frac{P\sin\phi + Q\cos\phi}{M}$$ et $\frac{hgg}{2g}$

$= \frac{Q\sin\phi - P\cos\phi}{M}$, ex quibus quantitatibus pressiones E et F definiri debent. Cum autem sit $P + \delta Q = M - 2(1+\delta\delta)(E+F)\cos\zeta$, erit $M - 2(1+\delta\delta)(E+F)\cos\zeta$

$$= \frac{Mhh\sin\phi(\sin\phi + \delta\cos\phi) - 2\delta(F+F)fh(\sin\phi + \delta\cos\phi)}{kk}$$

$- \frac{Mhgg(\cos\phi - \delta\sin\phi)}{2g}$ hincque $2(E+F)((1+\delta\delta)kk\cos\zeta - \delta fh$ $(\sin\phi + \delta\cos\phi)) = Mkk - Mhh\sin\phi(\sin\phi + \delta\cos\phi)$

$+ \frac{Mhkkgg(\cos\phi - \delta\sin\phi)}{2g}$ unde valor ipsius $E+F$ substitutus praebet

$$\frac{dg}{2gdt} = \frac{(1+\delta\delta)h\cos\zeta\sin\phi - \delta f - \frac{dfhgg(\cos\phi - \delta\sin\phi)}{2g}}{(1+\delta\delta)kk\cos\zeta - \delta fh(\sin\phi + \delta\cos\phi)}$$

ex qua aequatione motus penduli ope formulae $gdt = -d\phi$ determinari potest.

COROLL. 1.

1155. De pressione in E nullum est dubium, quin ea fiat positiva; sed pressio in F sequenti modo determinatur.

$$2F\left((1+\delta\delta)\sin 2\zeta + \frac{2\delta fh}{kk}\cos\zeta\cos\phi - \frac{2\delta\delta fh}{kk}\cos\zeta\sin\phi\right) =$$

$$M\left(\sin\zeta - \delta\cos\zeta + \frac{\delta fh}{kk}\cos\phi\right) - \frac{Mhh\sin\phi}{kk}\left(\cos(\zeta-\phi) + \delta\sin(\zeta-\phi)\right)$$

$$+ \frac{Mhgg}{2g}\left(\sin(\zeta-\phi) - \delta\cos(\zeta-\phi) + \frac{\delta fh}{kk}\cos 2\phi\right)$$

unde valor ipsius F positivus prodire debet, quod fit, dum fuerit $\tang\zeta > \delta$ existente ϕ angulo parvo.

COROLL.

COROLL. 2.

1156. Si frictio esset nulla seu $\delta = 0$, foret $\frac{du}{2g\,dt} = \frac{h \sin\phi}{kk}$, unde motus pendulorum supra definitus facile eruitur, pro pressionibus autem E et F haberemus has aequationes:

$$2(E + F)\,kk \cos\zeta = M\left(kk - hh \sin\phi^2 + \frac{hkkuu\cos\phi}{2g}\right)$$

$$\text{et } 2Fk^2 \sin 2\zeta = M\left(kk\sin\zeta - hh\sin\phi\cos(\zeta-\phi) + \frac{hkkuu\sin(\zeta-\phi)}{2g}\right)$$

$$\text{et } 2Ek^2 \sin 2\zeta = M\left(kk\sin\zeta + hh\sin\phi\cos(\zeta+\phi) + \frac{hkkuu\sin(\zeta+\phi)}{2g}\right)$$

quarum utraque ut sit positiva debet esse:

$$\tang\zeta > \frac{2ghh\sin\phi\cos\phi + hkkuu\sin\phi}{2gkk - 2ghh\sin\phi^2 + hkkuu\cos\phi}$$

ubi notandum est, esse $kk > hh$.

COROLL. 3.

1157. Aequatio differentialis inventa ob $dt = \frac{-d\phi}{u}$ abit in hanc formam

$$0 = u\,du\,((1 + \delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fh(\sin\phi + \delta\cos\phi)) - \delta fhuu\,d\phi\,(\cos\phi - \delta\sin\phi)$$
$$+ 2(1 + \delta\delta)\,gh\,d\phi\cos\zeta\sin\phi - 2\delta fg\,d\phi$$

quae per $(1 + \delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fh(\sin\phi + \delta\cos\phi)$ multiplicata fit integrabilis, proditque

$$C = uu((1 + \delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fh(\sin\phi + \delta\cos\phi))^2$$
$$+ 4g\int d\phi\,((1 + \delta\delta)\,h\cos\zeta\sin\phi - \delta f)((1 + \delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fh(\sin\phi + \delta\cos\phi))$$

SCHOLION.

1158. Si hoc integrale evolvamus, reperiemus

$$C = uu((1 + \delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fh(\sin\phi + \delta\cos\phi))^2 - 4(1 + \delta\delta)^2\,ghkk\cos\zeta^2\cos\phi$$
$$- \delta(1 + \delta\delta)\,fghh\cos\zeta\,(2\phi - \sin 2\phi - \delta\cos 2\phi) - 4\delta(1 + \delta\delta)\,fgkk\phi\cos\zeta$$
$$- 4\delta\delta ffgh(\cos\phi - \delta\sin\phi).$$

 Quare

Quare si sumamus angulum HGI initio fuisse $= \vartheta$, indeque pendulum a quiete descensum inchoasse, constans C ita definitur, ut sit

$$C = -4(1+\delta\delta)^2 ghkk \cos\zeta^2 \cos\vartheta - \delta(1+\delta\delta) fghh \cos\zeta \, (2\vartheta - \sin 2\vartheta - \delta\cos 2\vartheta) - 4\delta(1+\delta\delta) fgkk\vartheta \cos\zeta - 4\delta\delta ffgh(\cos\vartheta - \delta\sin\vartheta)$$

quo valore substituto pendulum ex altera parte eousque ascendet, donec iterum fiat $\varepsilon = 0$. Verum hanc determinationem in genere suscipere haud licet. Neque vero ipsum problema in latissimo sensu resolvimus, ut ad omnia cujuscunque formae pendula pateret, sed primo assumsimus, binos terminos cylindricos utrinque a centro gravitatis aeque esse remotos: deinde etiam talem structuram statuimus, ut recta per centrum inertiae I axi gyrationis GG parallela ducta simul esset corporis axis principalis. Quae conditio nisi locum haberet, non licuisset momenta virium statim ad axem gyrationis GG transferre, sed etiam ratio habenda fuisset virium obliquarum, quae in terminis axis GG inaequales pressiones produxissent, ideoque formulae multo magis intricatae prodiissent. Ut igitur hinc quicquam ad usum concludamus, statuamus oscillationes esse minimas, et quomodo earum motus a frictione perturbetur, diligentius investigemus.

PROBLEMA. 10.

1159. Si pendulum eo modo suspensum, uti in problemate praecedente assumsimus, oscillationes peragat quam minimas, earum motum a frictione perturbatum determinare.

SOLUTIO.

Maneant omnia uti in problemate praecedente constituimus, ac si initio pendulum ad angulum HGI $= \vartheta$ fuerit declinatum, unde descensum ex quiete inchoaverit, elapso autem tempore t angulus HGI sit $= \varphi$, et celeritas angularis in sensum IH $= \varepsilon$, in praesenti hypothesi anguli ϑ et φ erunt minimi, qui ergo loco sinuum et cosinuum ita introducantur, ut eorum potestates quadrato altiores rejiciantur. Hinc aequatio integralis §. praec. eruta induet hanc formam:

$$C = \varepsilon\varepsilon((1+\delta\delta)kk\cos\zeta - \delta fh(\varphi + \delta - \tfrac{1}{2}\delta\varphi\varphi))^2 - 4(1+\delta\delta)^2 ghkk\cos\zeta^2(1-\tfrac{1}{2}\varphi\varphi) + \delta\delta(1+\delta\delta) fghh\cos\zeta(1-2\varphi\varphi) - 4\delta(1+\delta\delta) fgkk\varphi\cos\zeta - 4\delta\delta ffgh(1-\delta\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\varphi)$$

ubi constans $C = -4(1+\delta\delta)^2 ghkk\cos\zeta^2(1-\tfrac{1}{2}\vartheta\vartheta) + \delta\delta(1+\delta\delta) fghh\cos\zeta(1-2\vartheta\vartheta) - 4\delta(1+\delta\delta) fgkk\vartheta\cos\zeta - 4\delta\delta ffgh(1-\delta\vartheta-\tfrac{1}{2}\vartheta\vartheta)$.

Hac

Hac igitur aequatione evoluta obtinebimus:

$$gg\,((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta\delta fh)^2 =$$
$$2gh\,((1+\delta\delta)^2\,kk\cos\zeta^2 - \delta\delta(1+\delta\delta)\,fh\cos\zeta + \delta\delta ff)\,(\vartheta\vartheta - \varphi\varphi)$$
$$-\,4\delta fg\,((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta\delta fh)\,(\vartheta - \varphi)$$

ubi in coefficiente ipsius gg angulum φ neglexi, quia in evolutione perducturus esset ad altiores potestates. Ad hanc aequationem resolvendam statuamus brevitatis gratia:

$$(1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta\delta fh = \mathrm{A}$$
$$(1+\delta\delta)^2\,kk\cos\zeta^2 - \delta\delta(1+\delta\delta)\,fh\cos\zeta + \delta\delta ff = \mathrm{B}$$

ut sit $\quad \mathrm{AA}\,gg = 2\mathrm{B}gh\,(\vartheta\vartheta - \varphi\varphi) - 4\,\mathrm{A}\delta fg\,(\vartheta - \varphi)$

unde ponendo $g = 0$ invenimus, quousque pendulum sit ascensurum, donec iterum ad quietem perducatur. Divisione autem per $2g\,(\vartheta - \varphi)$ instituta oritur $\mathrm{B}h\,(\vartheta + \varphi) - 2\,\mathrm{A}\delta f = 0$ hincque $\varphi = -\vartheta + \frac{2\,\mathrm{A}\delta f}{\mathrm{B}h}$, seu ad alteram partem ultra H tantum per angulum $\vartheta - \frac{2\,\mathrm{A}\delta f}{\mathrm{B}h}$ ascendet. Porro ad durationem hujus oscillationis investigandum, cum sit $g = \frac{\sqrt{(2\mathrm{B}gh\,(\vartheta\vartheta - \varphi\varphi) - 4\,\mathrm{A}\delta fg\,(\vartheta - \varphi))}}{\mathrm{A}} = \frac{-d\varphi}{dt}$, erit

$$dt = \frac{-\mathrm{A}d\varphi}{\sqrt{(2\mathrm{B}gh\,(\vartheta\vartheta - \varphi\varphi) - 4\,\mathrm{A}\delta fg\,(\vartheta - \varphi))}} \text{ seu}$$

$$dt = \frac{-\mathrm{A}d\varphi}{\sqrt{2g\,(\vartheta - \varphi)\,(\mathrm{B}h\,(\vartheta + \varphi) - 2\,\mathrm{A}\delta f)}}$$

unde integrando colligitur:

$$t = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\mathrm{B}gh}}\,.\,\mathrm{Arc.}\cos\frac{\mathrm{B}h\varphi - \mathrm{A}\delta f}{\mathrm{B}h\vartheta - \mathrm{A}\delta f}.$$

Statuatur nunc $\varphi = -\vartheta + \frac{2\,\mathrm{A}\delta f}{\mathrm{B}h}$ seu $\mathrm{B}h\varphi - \mathrm{A}\delta f = -\mathrm{B}h\vartheta + \mathrm{A}\delta f$, erit tempus oscillationis integrae $= \frac{\pi\mathrm{A}}{\sqrt{2\mathrm{B}gh}}$; quod ergo non pendet ab amplitudine oscillationis, ita ut omnes oscillationes minimae maneant isochronae perinde ac si nulla frictio adesset. Sed non pari tempore absolventur. Quantum autem frictio tempus cujusque oscillationis turbet, quaeratur valor $\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{B}}}$, ubi si crassitiem terminorum cylindricorum

rum

rum seu f ut minimam spectamus, est $\frac{1}{\sqrt{B}} = \frac{1}{(1+\delta\delta)k\cos\zeta} + \frac{\delta\delta fh}{2(1+\delta\delta)^2 k^3 \cos\zeta^2}$ ideoque $\frac{A}{\sqrt{B}} = k - \frac{\delta\delta fh}{2(1+\delta\delta)k\cos\zeta}$: quare tempus unius oscillationis $= \frac{\pi}{\sqrt{2gh}}\left(k - \frac{\delta\delta fh}{2(1+\delta\delta)k\cos\zeta}\right)$, unde patet, ob frictionem tempora oscillationum minui.

COROLL. 1.

1160. Si radius terminorum cylindricorum f sit valde exiguus prae quantitatibus h et k, erit proxime $B = A(1+\delta\delta)\cos\zeta$. Hinc si primus arcus descensus sit $= \vartheta$, erit sequens arcus ascensus $= \vartheta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$, qui simul est arcus descensus in secunda oscillatione.

COROLL. 2.

1161. Oscillationes ergo successivae sequenti modo se habebunt:

In Oscillatione	arcus descensus	arcus ascensus	totus arcus
prima	ϑ	$\vartheta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$2\vartheta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$
secunda	$\vartheta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$\vartheta - \frac{4\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$2\vartheta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$
tertia	$\vartheta - \frac{4\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$\vartheta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$2\vartheta - \frac{10\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$
quarta	$\vartheta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$\vartheta - \frac{8\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$	$2\vartheta - \frac{14\delta f}{(1+\delta\delta)h\cos\zeta}$

COROLL. 3.

1162. Oscillationes tamdiu durabunt, quamdiu arcus ascensuum manent positivi. Statim enimque ac vel evanescunt, vel adeo negativi evadunt, motus omnis cessat. Atque ut motus oriatur, necesse est, ut sit $\vartheta > \frac{A\delta f}{Bh}$, si enim fuerit $\vartheta =$ vel $< \frac{A\delta f}{Bh}$ pendulum ob frictionem plane in quiete coercetur, etsi teneat situm inclinatum.

COROLL.

COROLL. 4.

1163. Ut ergo pendulum saltem unam oscillationem peragat, debet esse $\vartheta > \frac{A\delta f}{Bh}$ existente $\frac{A}{B} = \frac{1}{(1+\delta\delta)\cos\zeta}$: ut duas peragat oscillationes, debet esse $\vartheta > \frac{3A\delta f}{Bh}$: ut tres, debet esse $\vartheta > \frac{5A\delta f}{Bh}$, atque in genere, ut peragat n oscillationes, debet esse $\vartheta > \frac{(2n-1)A\delta f}{Bh}$. Verum hic numerum n majorem assumere non licet, quam ut angulus ϑ adhuc satis parvus maneat.

SCHOLION. 1.

1164. Quod ad diminutionem temporis oscillationum singularum attinet, notasse juvabit, significare $\frac{kk}{h}$ distantiam centri oscillationis ab axe gyrationis, quae si ponatur $= l$, erit tempus unius oscillationis $= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 - \frac{\delta\delta f}{2(1+\delta\delta)\,l\cos\zeta}\right)$. Hic autem primum observetur, capi debere tang $\zeta > \delta$, ut axis GG in loco suo maneat immotus. Quare si fuerit $l = 3$ pedum, quo casu pendulum, nisi frictio obstaret, fere singulis minutis secundis oscillationes absolveret: axiculorum autem radius sit $f = \frac{1}{100}$ pedis, tum vero sumatur $\delta = \frac{1}{3}$ et $\zeta = 20^\circ$, fiet tempus unius oscillationis $= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 - \frac{1}{28191}\right)$, ita ut ob frictionem demum post 28191 oscillationes peractas seu post 8 fere horas error unius minuti secundi producatur. Hoc eodem casu ut pendulum n oscillationes peragere possit, antequam ad quietem redigatur, debet esse $\vartheta > \frac{2n-1}{4698}$, seu $\vartheta > 4,3905\,(2n-1)$ min. sec. Quare si 100 oscillationes absolvere debeat, primum sumi debet $\vartheta > 874''$ seu $\vartheta > 14', 34''$. Quod si ergo ϑ capiatur $= 5^\circ$, pendulum peraget oscillationes 2050, antequam ad quietem redigetur. Si f sit major vel minor quam $\frac{1}{100}$, effectus frictionis in eadem ratione major vel minor evadet.

SCHOLION. 2.

1165. Cum jam determinaverimus motum corporum circa axem fixum, ad alias motus species progrediamur, quibus corpus, dum movetur,

tur, ad ſuperficiem quandam atteritur. Hic igitur praecipue figura corporis, quatenus ſucceſſive aliae atque aliae partes ſuperficiei applicantur, ſpectari debet: ubi quidem primo ejusmodi corpora occurrunt, quae unico tantum puncto eodemque perpetuo ſuperficiem tangunt. Hic ſcilicet eſt caſus turbinum in cuſpidem deſinentium, qua continuo ſuperficiei inſiſtunt, quorum motum, quantum ob frictionem cuſpidis perturbetur, definiri conveniet. Deinde occurrunt corpora, quae unico quidem puncto perpetuo ſuperficiem tangunt, quod autem jugiter varietur, quemadmodum fit, ſi globi aliave corpora ſphaeroidica ſuper quadam ſuperficie moveantur, ac praeter motum progreſſivum motu gyratorio quocunque ferantur. His caſibus ad effectum frictionis cognoſcendum directio motus, quo punctum contactus ſuperficiem terit, quovis momento eſt ſpectanda, quippe cui directio vis frictionis eſt contraria. Sequuntur caſus, quibus corpus eadem quidem baſi ſuperficiem perpetuo tangit, uti fit in motu progreſſivo, ſed ubi corpus ſimul gyratur circa axem ad baſin normalem, ita ut ipſa baſis ſuper ſuperficie in gyrum agatur. Porro progrediamur ad motus corporum cylindricorum ſuper planis ſuperficiebus, ubi contactus perpetuo fit ſecundum lineam rectam, ex cujus motu et appreſſione frictio eſt definienda. Quae autem corpora figuram ejusmodi habent angulosam, ut dum moventur, aliae atque aliae hedrae ſuperficiei applicentur, quoniam conflictus talem motum comitatur, dum nova hedra ad contactum pertingit, eorum motus hic nondum evolvere licet, ſed prius ratio conflictus explicari debet. Secundum hanc ergo diviſionem motum turbinum in cuſpidem deſinentium ſuper plano horizontali determinare aggrediamur.



CAPUT IV.

DE MOTU TURBINUM IN CUSPIDEM DESINENTIUM SUPER PLANO HORIZONTALI FRICTIONIS HABITA RATIONE.

PROBLEMA 11.

Fig. 136. 1166. Si turbo ſuper plano horizontali moveatur utcunque, deturque ſingulis momentis ejus preſſio in planum, definire frictionem motumque turbinis progreſſivum.

SOLU-

SOLUTIO.

Repraesentet tabula planum horizontale, super quo turbo incedit, cujus axis transiens per centrum inertiae et cuspidem nunc elapso tempore t situm teneat AIF, ut I sit centrum inertiae in sublimi situm, F vero cuspis, qua fit contactus in plano horizontali; voceturque intervallum IF $= f$, quod est constans. Ex I in planum demittatur perpendiculum IG, et sumta in plano recta directrice OV ad fixam mundi plagam spectante, ad eam ex G et F ducantur normales GX et FZ, itemque per G recta KL ipsi OV parallela. Ponatur angulus FIG $= \rho$, qui exprimit declinationem axis turbinis AF a situ verticali: et angulus KGH $= \phi$, qui praebet declinationem plani verticalis, in quo jam axis turbinis versatur, a plano verticali super OV vel LK extructo. Erit ergo GI $= f \cos\rho$ et GF $= f \sin\rho$: tum vero GN $= f \sin\rho \cos\phi$ et FN $= f \sin\rho \sin\phi$. Praeterea vero sit OX $= x$, et XG $= y$; unde pro puncto F fit OZ $= x - f \sin\rho \cos\phi$ et ZF $= y + f \sin\rho \sin\phi$: ex quibus motus cuspidis F colligi potest, cujus celeritas secundum directionem OV vel NG est $= \frac{dx - fd . \sin\rho \cos\phi}{dt}$, et celeritas secundum directionem NF $= \frac{dy + fd . \sin\rho \sin\phi}{dt}$: quarum utraque nisi evanescat, cuspis F super plano movebitur frictionemque excitabit; ad cujus directionem inveniendam, sit Ff directio secundum quam cuspis progreditur, quae retro in L producta dabit directionem frictionis FL, pro qua ponatur angulus FLG $= \omega$ eritque $\tang\omega = \frac{dy + fd . \sin\rho \sin\phi}{dx - fd . \sin\rho \cos\phi}$. Sit jam pressio, quam cuspis in planum exerit $= \Pi$, pondere totius turbinis existente $= M$, atque ob frictionem turbo in F sollicitatur secundum directionem FL vi $= \delta\Pi$, quae resoluta dat vim sec. XO $= \delta\Pi \cos\omega$ et sec. FZ $= \delta\Pi \sin\omega$. Ad motum ergo progressivum centri inertiae I definiendum, praeter has vires frictionis, ei applicata concipiatur vis deorsum urgens secundum IG, $= M - \Pi$, ac principia motus suppeditabunt has ternas aequationes:

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{-\delta\Pi \cos\omega}{M}; \quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-\delta\Pi \sin\omega}{M}$$

$$\text{et} \quad \frac{f\,dd \cos\rho}{2g\,dt^2} = -1 + \frac{\Pi}{M},$$

unde statim colligimus $ddx \sin\omega = ddy \cos\omega$. Ex his aequationibus, si anguli ρ et ω ad tempus t ut cogniti spectentur, inde primo $\frac{\Pi}{M}$ tum

 vero

vero differentialia dx et dy determinantur; ex iisque tandem angulus ϕ ex formula $\tang\omega = \frac{dy + fd . \sin\varrho \sin\phi}{dx - fd . \sin\varrho \cos\phi}$.

COROLL. 1.

1167. Si pro $\frac{\Pi}{M}$ valor inventus per ϱ substituatur, pro quantitatibus x et y determinandis habebimus has aequationes differentiales secundi gradus

$$ddx = -2\delta g dt^2 \cos\omega - df \cos\omega\, dd . \cos\varrho$$
$$ddy = -2\delta g dt^2 \sin\omega - df \sin\omega . dd . \cos\varrho.$$

COROLL. 2.

1168. Pro directione frictionis FL, ratione rectae FH, cum sit angulus LGF $= \phi$ et angulus FLG $= \omega$, erit angulus GFL $= 180° - \phi - \omega$; ipsa autem frictio est $= \delta\Pi$: nisi sit celeritas cuspidis F nulla, quo casu frictio subito evanescit: id quod evenit, si fuerit $dx = fd . \sin\varrho \cos\phi$ et $dy = -fd . \sin\varrho \sin\phi$.

SCHOLION.

1169. Ex his aequationibus nihil adhuc concludere licet, cum relatio variabilium ω et Π seu ϱ ad tempus t nondum constet, quae demum ex motu gyratorio erui debet. Iis autem inventis, per formulas hic traditas variabiles x et y, sicque motus progressivus centri inertiae I definiri poterit. Quamobrem angulum ω in determinationem motus gyratorii introducamus, etiamsi ejus relatio ad angulos ϱ, ϕ et tempus assignari possit. Cum enim sit

$$dy \cos\omega + f \cos\omega\, d . \sin\varrho \sin\phi - dx \sin\omega + f . \sin\omega\, d . \sin\varrho \cos\phi = 0$$

quo x et y facilius elidere queamus, ponamus

$$f \cos\omega\, d . \sin\varrho \sin\phi + f \sin\omega\, d . \sin\varrho \cos\phi = sdt$$

ut sit $dy \cos\omega - dx \sin\omega + sdt = 0$:
quae aequatio differentiata ob $ddy \cos\omega = ddx \sin\omega$ dat

$$-dy \sin\omega - dx \cos\omega + \frac{dsdt}{d\omega} = 0.$$

Differentietur porro, et ob $ddy \sin\omega + ddx \cos\omega = \frac{-2\delta g \Pi dt^2}{M}$ prodit

$$\frac{2\delta g \Pi dt^2}{M} - dy\, d\omega \cos\omega + dx\, d\omega \sin\omega + dt\, d . \frac{ds}{d\omega} = 0:$$

adda-

addatur prima per $d\omega$ multiplicata, fietque per dt dividendo

$$\frac{2\delta g\Pi dt}{M} + sd\omega + d.\frac{ds}{d\omega} = 0,$$

qua aequatione relatio inter s, ω, Π et t exprimitur, quae forte in sequentibus usum habebit. Involvit autem s angulos ϱ, ϕ et ω, estque $\frac{\Pi}{M}$ $= 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$, ita ut hic adhuc insint quatuor variabiles ϱ, ϕ, ω et t.

PROBLEMA. 12.

1170. Dum turbo utcunque super plano horizontali movetur, et frictionem patitur, determinare virium, quibus sollicitatur, momenta respectu axium principalium turbinis.

SOLUTIO.

In sphaera centro inertiae turbinis I descripta repraesentet circulus GZH planum verticale, in quo jam axis turbinis per centrum inertiae I et cuspidem F ductus AIF versetur, qui simul sit axis principalis turbinis, ejusque respectu momentum inertiae $= Maa$, bini reliqui vero axes principales ex I ad sphaerae puncta B et C pertingant, quorum respectu sint momenta inertiae aequalia $= Mcc$, ita ut in formulis nostris generalibus sit $bb = cc$ quemadmodum jam supra assumsimus. Posito Z puncto sphaerae verticali, erit arcus $ZA = \varrho$, ponamus autem ductis arcubus ZB et ZC, ut supra $ZA = l$, $ZB = m$, et $ZC = n$, ut sit $\varrho = l$. His positis vires, quibus turbo sollicitatur, sunt primo ejus pondus $= M$, quae vis centro inertiae I applicata nulla praebet momenta; deinde adest pressio, qua planum horizontale in cuspidem F reagit, cujus directio est verticalis sursum directa $F\Pi$, quae vis sit $= \Pi$, vidimusque esse $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$. Fig. 137.

Denique sollicitatur turbo in F a frictione $= \delta\Pi$, nisi cuspis quiescat, cujus directio FL est horizontalis: ac pro ejus situ ducatur circulus maximus horizontalis $G\Lambda H$, in quo capiatur secundum §. 1168. arcus $H\Lambda = 180° - \phi - \omega$ seu $G\Lambda = \phi + \omega$, ubi ϕ denotat declinationem plani GZH a plano quodam verticali fixo; angulus ω autem ex formulis in praecedente problemate traditis definiri debet: eritque directio FL radio $I\Lambda$ parallela. Iam ad virium harum momenta respectu axium principalium investiganda;

 pri-

primum ipsae vires secundum directiones horum axium resolvantur, quem in finem ut in centro inertiae applicatae considerentur. Vis ergo $F\Pi = \Pi$, in directione IZ applicata praebet vim sec. $IA = \Pi \cos ZA = \Pi \cos l$; vim sec. $IB = \Pi \cos ZB = \Pi \cos m$ et vim sec. $IC = \Pi \cos ZC = \Pi \cos n$. Deinde vis $FL = \delta\Pi$ in $I\Lambda$ applicata resolvitur in vires 1° sec. $IA = \delta\Pi \cos A\Lambda$, 2° sec. $IB = \delta\Pi \cos B\Lambda$, 3° sec. $IC = \delta\Pi \cos C\Lambda$. Ad has autem evolvendas sit ZX ille circulus verticalis fixus, ideoque angulus $XZA = \varphi$, ponamus autem ut supra angulos $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$, ut sit $\varphi = \lambda$, et ob $AZ\Lambda = 180° - \lambda - \omega$, erit $XZ\Lambda = 180° - \omega$, hincque $BZ\Lambda = \mu + \omega - 180°$, et $CZ\Lambda = 180° - \nu - \omega$, unde ob $Z\Lambda$ quadrantem prodit $\cos A\Lambda = -\sin l \cos(\lambda + \omega)$, $\cos B\Lambda = -\sin m \cos(\mu + \omega)$ et $\cos C\Lambda = -\sin n \cos(\nu + \omega)$. Quocirca habebimus

$$\text{vim sec. } IA = \Pi \cos l - \delta\Pi \sin l \cos(\lambda + \omega)$$
$$\text{vim sec. } IB = \Pi \cos m - \delta\Pi \sin m \cos(\mu + \omega)$$
$$\text{vim sec. } IC = \Pi \cos n - \delta\Pi \sin n \cos(\nu + \omega)$$

has autem vires nunc in puncto F applicatas concipi oportet, existente $IF = f$: unde momenta earum respectu axium principalium, quae supra litteris P, Q, R designavimus, concluduntur

$$P = 0,$$
$$Q = \Pi f \cos n - \delta f \Pi \sin n \cos(\nu + \omega)$$
$$R = -\Pi f \cos m + \delta \Pi f \sin m \cos(\mu + \omega).$$

PROBLEMA. 13.

1171. His virium momentis inventis exhibere aequationes, quibus motus turbinis super plano horizontali incedentis et a frictione perturbatus, contineatur.

SOLUTIO.

Fig. 137. Primo pro motu gyratorio teneat elapso tempore t turbo situm in figura repraesentatum, ubi omnes denominationes modo factae maneant. Ac nunc gyretur turbo circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \varepsilon$, pro puncto O autem sint arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$, ponaturque $\varepsilon \cos\alpha = x$, $\varepsilon \cos\beta = y$, $\varepsilon \cos\gamma = z$,

quae quantitates per momenta modo inventa ita determinantur, ut primo sit $dx = 0$, ideoque $x =$ const. Ponatur ergo $x = h$, et pro y et z has habebimus aequationes

$$dy + \frac{(aa - cc)}{cc} hz\,dt = \frac{2\Pi f g\,dt}{Mcc} (\cos n - \delta \sin n \cos(\nu + \omega))$$

dz —

$$dz - \frac{(aa - cc)}{cc} hydt = \frac{-2\Pi fgdt}{Mcc} \operatorname{cos} m - \delta \operatorname{sin} m \operatorname{cos}(\mu + \omega)).$$

Tum vero pro arcubus l, m, n itemque angulis λ, μ, ν ostendimus esse:

$$dl \operatorname{sin} l = dt\,(y \operatorname{cos} n - z \operatorname{cos} m);\quad d\lambda \operatorname{sin} l^2 = -dt\,(y \operatorname{cos} m + z \operatorname{cos} n)$$
$$dm \operatorname{sin} m = dt\,(z \operatorname{cos} l - h \operatorname{cos} n);\quad d\mu \operatorname{sin} m^2 = -dt\,(z \operatorname{cos} n + h \operatorname{cos} l)$$
$$dn \operatorname{sin} n = dt\,(h \operatorname{cos} m - y \operatorname{cos} l);\quad d\nu \operatorname{sin} n^2 = -dt\,(h \operatorname{cos} l + y \operatorname{cos} m)$$

ubi praeterea hae relationes sunt notandae:

$$\operatorname{cos}(\mu - \lambda) = \frac{-\operatorname{cos} l \operatorname{cos} m}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} m};\quad \operatorname{cos}(\nu - \lambda) \frac{= \operatorname{cos} l \operatorname{cos} n}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} n}$$

$$\operatorname{sin}(\mu - \lambda) = \frac{-\operatorname{cos} n}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} m};\quad \operatorname{sin}(\nu - \lambda) = \frac{+\operatorname{cos} m}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} n}$$

unde anguli μ et ν per λ ita definiuntur:

$$\operatorname{cos}\mu = \frac{-\operatorname{cos}\lambda \operatorname{cos} l \operatorname{cos} m + \operatorname{sin}\lambda \operatorname{cos} n}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} m};\quad \operatorname{cos}\nu = \frac{-\operatorname{cos}\lambda \operatorname{cos} l \operatorname{cos} n - \operatorname{sin}\lambda \operatorname{cos} m}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} n}$$

$$\operatorname{sin}\mu = \frac{-\operatorname{sin}\lambda \operatorname{cos} l \operatorname{cos} m - \operatorname{cos}\lambda \operatorname{cos} n}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} m};\quad \operatorname{sin}\nu = \frac{-\operatorname{sin}\lambda \operatorname{cos} l \operatorname{cos} n + \operatorname{cos}\lambda \operatorname{cos} m}{\operatorname{sin} l \operatorname{sin} n}.$$

Hicque est $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd\,.\operatorname{cos} l}{2gdt^2}$. At angulus ω ex motu progressivo est ingressus, pro quo si in fig. 136. ad situm centri inertiae I definiendum, distinctionis causa vocemus coordinatas OX = X et XG = Y, existente GI $= f \operatorname{cos} l$, ad superiores aequationes insuper has adjungere debemus:

$$\frac{ddX}{2gdt^2} = \frac{-\delta\Pi}{M} \operatorname{cos}\omega;\quad \frac{ddY}{2gdt^2} = \frac{-\delta\Pi}{M} \operatorname{sin}\omega$$

et $dY \operatorname{cos}\omega - dX \operatorname{sin}\omega + f \operatorname{cos}\omega\, d\,.\operatorname{sin} l \operatorname{sin}\lambda + f \operatorname{sin}\omega\, d\,.\operatorname{sin} l \operatorname{cos}\lambda = 0$. Atque in his aequationibus omnia, quae tam ad motum progressivum quam gyratorium spectant, determinantur. Si primo quantitates X et Y e calculo excludere velimus, loco harum trium postremarum aequationum sequentem unicam adhibuisse sufficit: pro qua si ponatur

$$sdt = f \operatorname{cos}\omega\, d\,.\operatorname{sin} l \operatorname{sin}\lambda + f \operatorname{sin}\omega\, d\,.\operatorname{sin} l \operatorname{cos}\lambda$$

seu sumtis his differentialibus locoque dl et $d\lambda$ valoribus superioribus substitutis erit $s = -fy \operatorname{sin} n \operatorname{sin}(\omega + \nu) + fz \operatorname{sin} m \operatorname{sin}(\omega + \mu)$.
et aequatio loco illarum trium usurpanda supra inventa est

$$\frac{2\delta g\Pi dt}{M} + sd\omega + d\,.\frac{ds}{d\omega} = 0.$$

SCHO-

SCHOLION 1.

1172. Multitudo harum aequationum, praecipue autem angulus ω primas aequationes ingrediens in causa est, quod earum resolutionem nullo modo suscipere liceat. Unde patet motum turbinum ob frictionem maxime fore peturbatum, ita ut ex his aequationibus nihil omnino, unde hic motus cognosci posset, concludere valeamus. Quodsi vero hujus motus causas obiter tantum contemplemur, evidens est centrum inertiae I non in recta tantum verticali, ut remota frictione eveniebat, ascendere vel descendere, sed etiam motum horizontalem adipisci, qui oritur a vi frictionis, cujus directio cum sit contraria motui cuspidis, motus centri inertiae secundum eandem directionem incitatur, unde neque uniformis neque rectilineus erit, et quatenus incurvatur, ejus convexitas in eam regionem spectabit, in quam cuspis progreditur. Simili modo etiam motus gyratorius tam ratione celeritatis quam ratione axis gyrationis maxime perturbabitur, de quo vix quicquam ex consideratione frictionis affirmare licet.

SCHOLION. 2.

1173. Verum haec tanta motus perturbatio tamdiu duntaxat durat, donec frictio cessat, hoc autem tandem evenire debere per se est evidens, quandoquidem motus ob frictionem continuo retardatur. At frictio cessare nequit, nisi cuspis turbinis in eodem loco persistat, ex quo necesse est motum ita temperari debere, ut cuspis tandem in eodem plani puncto sit perseveraturus, dummodo hoc eveniat, antequam turbo procumbat. Si enim turbini primo motus gyratorius nimis tardus fuerit impressus, nullum est dubium, quin procumbat, antequam illud phaenomenon oriatur: ex quo vicissim concludere licet, si motus satis fuerit celer, fore, ut antequam turbo procumbat, cuspis a frictione ad idem plani horizontalis punctum redigatur. Quod cum evenerit, atque in turbine adhuc motus insit gyratorius, ex superioribus patet, axem turbinis verticalem esse debere; si enim esset inclinatus, nullo modo ita gyrari posset, ut cuspis eidem puncto insisteret. Ex his igitur conjunctis hanc conclusionem deducimus: turbinem, si modo ei satis celer motus gyratorius fuerit impressus, ob frictionem se tandem in situm verticalem erigere, et tum circa axem verticalem motum gyratorium esse continuaturum. Quod phaenomenon eo magis est notatu dignum, quod soli frictioni debeatur; ita ut ope frictionis linea verticalis, ideoque etiam planum horizontale obtineri queat; id quod in navigatione magnum usum habere potest, ad quem etiam in Anglia olim fuit commendatum.

CAPUT

CAPUT V.

DE MOTU GLOBORUM, CENTRUM INERTIAE IN IPSORUM CENTRO SITUM HABENTIUM, SUPER PLANO HORIZONTALI.

PROBLEMA 14.

1174. Si globus super plano horizontali utcunque tam motu progressivo quam gyratorio moveatur, determinare celeritatem et directionem, qua punctum contactus radit superficiem horizontalem.

SOLUTIO.

Sit I centrum simulque centrum inertiae globi, ejusque radius $= f$, Fig. 138. et contactus fiet in puncto imo T. Motus autem globi ita sit comparatus, ut centrum inertiae moveatur secundum directionem PIR celeritate $= v$, simul vero gyretur circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= \varepsilon$, in eum sensum, ut punctum T circa O incedat per arculum Tt, ac pro positione puncti O statuamus angulum $PTO = \vartheta$ et arcum $TO = s$, ubi quidem arcus ita sumo, quasi radius globi esset $= 1$. Ducatur TV ipsi PIR parallela, ac si motus gyratorius abesset, punctum contactus T rasurum esset planum horizontale celeritate $= v$ in directione TV. Deinde si globus solo motu gyratorio ferretur, quia punctum T per Tt moveretur celeritate $= f\varepsilon \sin TO = f\varepsilon \sin s$, cujus directio cum sit horizontalis, in plano per rectam $T\Theta$ referatur, ita ut sit angulus $ST\Theta = PTt = \vartheta - 90°$ ob OTt rectum. Erit ergo $VT\Theta = 270° - \vartheta$. Capiantur rectae $TV = v$ et $T\Theta = f\varepsilon \sin s$, et quia punctum T his duobus motibus conjunctim movetur, ejus verus motus fiet secundum rectam TF diagonalem parallelogrammi $TVF\Theta$. Ex F ad TV ducta normali FH, erit VH, erit $VH = f\varepsilon \sin s \sin\vartheta$ et $FH = -f\varepsilon \sin s \cos\vartheta$, unde fit $TH = v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta$ atque celeritas radens $TF = \surd(vv - 2f\varepsilon v \sin s \sin\vartheta + ff\varepsilon\varepsilon \sin s^2)$ et $\tang VTF = \dfrac{-f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta}$. Ducatur ex centro I ipsi TF parallela IQ, erit arcus TQ quadrans, et angulus $RTQ = VTF$. Quare si IQ sit directioni, secundum quam punctum T radit, parallela, erit

erit tang $PTQ = \frac{fg \sin s \cos \vartheta}{v - fg \sin s \sin \vartheta}$, ac posita celeritate radente $\surd(vv - 2fgv \sin s \sin \vartheta + ffgg \sin s^2) = u$ erit $\sin PTQ = \frac{-fg \sin s \cos \vartheta}{u}$ et $\cos PTQ = \frac{fg \sin s \sin \vartheta - v}{u}$.

COROLL. 1.

1175. Fieri ergo potest, ut celeritas radens ideoque et attritus evanescat, quo casu hae duae conditiones locum habere debent, altera $g \sin s \cos \vartheta = 0$, altera $v = fg \sin s \sin \vartheta$. Unde statim patet, si nullus adsit motus progressivus, seu $v = 0$, nullum attritum affore, si $\sin s = 0$, hoc est si globus circa axem verticalem ZT gyretur.

COROLL. 2.

1176. Deinde motus globi ab attritu erit liber, si fuerit primo $\cos \vartheta = 0$, seu angulus PTO rectus: deinde celeritas progressiva v ad angularem g hanc relationem tenere debet, ut sit $v = fg \sin s$, seu TV = TΘ, et angulus STΘ = 0.

COROLL. 3.

1177. Quando ergo globus hujusmodi motum est consecutus, quia sublato omni attritu etiam nulla adest frictio, globus eundem motum constanter conservabit, siquidem axis gyrationis IO habeat proprietatem axis principalis.

SCHOLION. 1.

1178. Quemadmodum hic frictionem constituimus, ea non obstat, quominus globus super plano horizontali motum suum intemeratum conservare possit, quod tamen minime fieri observamus, cum globus super tabula tali motu latus mox omnem motum amittat, cujus rei causa resistentiae aeris tribui nequit. Verum hic primum animadverto, experimenta nunquam Theoriae perfectissime congruere: veluti dum casu hic tractato assumsimus, contactum unico fieri puncto, id semper in praxi secus evenit. Interim tamen si arcus TO est quadrans et PTO = 90°, existente $v = fg$, tametsi contactus non fiat in uno puncto, tamen attritus evanescit, ideoque hic motus extinctio neutiquam frictioni adscribi potest. Ex quo concludere debemus, praeter frictionem, uti hic eam definivimus,

mus, aliud adhuc dari motus impedimentum, dum corpora super superficiebus incedunt, a frictione probe distinguendum, cujus ratio utcunque fuerit comparata, ejus effectus potius seorsim investigari convenit, quam frictionis indolem hic stabilitam immutari. Et quemadmodum hic a resistentia aëris mentem abstrahimus, ita etiam licebit hoc obstaculum frictionem concomitans a praesenti argumento sejungere.

SCHOLION. 2.

1179. Corpora hic sphaerica considero, in quorum centro situm sit ipsorum centrum inertiae I, quod ergo ipsum etiam in plano horizontali moveatur, e puncto contactus T perpetuo verticaliter immineat. Ex quo patet, pressionem in contactu semper fore ponderi corporis M aequalem. Si ergo corpus ex materia uniformi constaret, omnes ejus diametri proprietate axium principalium gauderent, sed concipiamus materiae distributionem utcunque inaequabilem, ita tamen ut centrum inertiae cadat in centrum figurae: Quare necesse erit in globo ternos axes principales considerari, qui ex centro I pertingant in puncta A, B, C, quadrantibus a se invicem distantia, quorum respectu sit, ut supra posuimus, momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Quanquam autem deinceps bina vel omnia haec momenta inter se aequalia statuemus, tamen conveniet hujusmodi tria puncta in superficie fixa notasse, quo ex eorum relatione ad spatium absolutum, facilius motus globi definiri possit. Constitutis autem in globo his tribus punctis A, B, C, quoniam motus gyrationis circa O, quem in plagam Tt dirigi assumsimus, sensum habet CBA contrarium ei, quem supra statuimus, in applicatione formularum generalium ad hunc casum celeritatem angularem ε ut negativam spectare debemus.

PROBLEMA. 15.

1180. Si globus super plano horizontali utcunque moveatur, definire vires, quibus sollicitatur, earumque momenta respectu ternorum axium principalium globi.

SOLUTIO.

Inclusus concipiatur globus sphaerae vel fixae vel cum eo parem motum progressivum habenti, in qua Z sit punctum verticale ejusque oppositum T punctum contactus, DE vero sit diameter horizontalis ad certam mundi plagam tendens, et DPQE circulus maximus horizontalis. Nunc autem elapso tempore t, moveatur globus motu progressivo secundum directionem PI celeritate $= v$, ponaturque arcus DP seu angulus DZP $= \varphi$; Fig. 139.

axes autem principales nunc sint in A, B, C. Tum vero globus iam gyretur circa axem IO, celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ACB: sitque pro situ puncti O angulus PTO seu PZO $= \vartheta$, et arcus ZO $= s$. Etsi enim ante arcum TO posuimus $= s$, quia tantum eius sinus in computum intrat, perinde est. Erit ergo angulus DZO $= \vartheta + \varphi$, et EZO $= 180° - \vartheta - \varphi$. Deinde si a punctis A, B, C tam ad O quam ad Z arcus circulorum magnorum ducti concipiantur, sint ut hactenus arcus AO $= \alpha$, BO $= \beta$, CO $= \gamma$; ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$, et anguli EZA $= \lambda$, EZB $= \mu$, EZC $= \nu$. In praecedente autem problemate ostendimus, punctum contactus T planum subiectum radere secundum directionem radio IQ parallelam celeritate $= \sqrt{(vv - 2f\varepsilon v \sin s \sin\vartheta + ff \sin s^2)}$, foreque

$$\operatorname{tang} PTQ = \operatorname{tang} PZQ = \frac{f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta}$$

denotante f radium globi. Cum igitur pressio in T sit $= M$, frictio erit $= \delta M$, quae puncto T est applicata secundum directionem ipsi QI parallelam. Hac ergo vi resoluta secundum directiones axium principalium IA, IB, IC, prodit vis sec. IA $= -\delta M \cos AQ$; vis sec. IB $= -\delta M \cos BQ$, et vis sec. IC $= -\delta M \cos CQ$, quae ternae vires in puncto T applicatae sunt concipiendae, unde colliguntur momenta

Resp. axis IA in sensum BC $= -\delta M f \cos CQ \cos BT + \delta M f \cos BQ \cos CT = P$

Resp. axis IB in sensum CA $= -\delta M f \cos AQ \cos CT + \delta M f \cos CQ \cos AT = Q$

Resp. axis IC in sensum AB $= -\delta M f \cos BQ \cos AT + \delta M f \cos AQ \cos BT = R$.

Erunt ergo haec tria momenta:

$$P = \delta M f (\cos m \cos CQ - \cos n \cos BQ)$$
$$Q = \delta M f (\cos n \cos AQ - \cos l \cos CQ)$$
$$R = \delta M f (\cos l \cos BQ - \cos m \cos AQ).$$

Pro puncto autem Q ponamus angulum PZQ $= \xi$ ut sit $\operatorname{tang} \xi = \dfrac{f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta}$ et posita celeritate radente $\sqrt{(vv - 2f\varepsilon v \sin s \sin\vartheta + ff\varepsilon\varepsilon \sin s^2)} = u$, erit $\sin\xi = \dfrac{-f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{u}$ et $\cos\xi = \dfrac{f\varepsilon \sin s \sin\vartheta - v}{u}$.

Fit ergo DZQ $= \varphi + \xi$ et EZQ $= 180° - \xi - \varphi$; hincque

$$AZQ = 180° - \xi - \varphi - \lambda;\quad BZQ = \mu + \xi + \varphi - 180°;$$
$$CZQ = 180° - \xi - \varphi - \nu$$

ergo

ergo $\cos AQ = -\cos(\xi + \varphi + \lambda) \sin l$

$\cos BQ = -\cos(\xi + \varphi + \mu) \sin m$

$\cos CQ = -\cos(\xi + \varphi + \nu) \sin n$

Ex relatione igitur, quae inter angulos λ, μ et ν intercedit, concludemus momenta virium:

$$P = \delta M f \sin l \sin(\lambda + \varphi + \xi)$$

$$Q = \delta M f \sin m \sin(\mu + \varphi + \xi)$$

$$R = \delta M f \sin n \sin(\nu + \varphi + \xi).$$

PROBLEMA. 16.

1181. Si motum gyratorium ad quodvis tempus ut datum spectemus, definire motum progressivum globi.

SOLUTIO.

Quia centrum globi in plano horizontali movetur, descripserit id tempore t lineam GI, quae referatur ad directricem GX superiori directioni fixae DE parallelam, ductaque IX ad GX normali, sint coordinatae GX $= X$, XI $= Y$. Per I ducatur recta DE ipsi GX parallela, quae erit ipsa diameter DE in fig. 139. Ducatur IP, ut sit DIP $=$ EIR $= \varphi$ et centrum I per hypothesin progreditur in directione IR celeritate $= v$, ita ut sit celeritas secundum GX $= v \cos\varphi$ et celeritas secundum XI $= v \sin\varphi$, ideoque $dX = vdt \cos\varphi$ et $dY = vdt \sin\varphi$. Ducatur recta QIS, ut IQ sit directioni, qua punctum contactus radit, parallela, erit angulus EIQ $=$ DIS $= 180° - \xi - \varphi$, est enim aequalis angulo EZQ in praec. figura, unde globus sollicitari censendus est vi $= \delta M$ in directione IS. Hinc ergo oritur vis secundum ID $= -\delta M \cos(\xi + \varphi)$ et vis secundum XI $= \delta M \sin(\xi + \varphi)$. Ex quibus colligitur Fig. 140.

$$\frac{d\,v\cos\varphi}{2gdt} = \frac{dv\cos\varphi - vd\varphi\sin\varphi}{2gdt} = \delta\cos(\xi + \varphi)$$

$$\frac{d.v\sin\varphi}{2gdt} = \frac{dv\sin\varphi + vd\varphi\cos\varphi}{2gdt} = \delta\sin(\xi + \varphi)$$

hincque porro $\frac{dv}{2gdt} = \delta\cos\xi$ et $\frac{vd\varphi}{2gdt} = \delta\sin\xi$

ita ut sit $\frac{vd\varphi}{dv} = \operatorname{tang}\xi = \frac{f8 \sin s \cos\vartheta}{v - f8 \sin s \sin\vartheta}$.

PROBLEMA 17.

1182. Definito motu progressivo globi, determinare ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Fig. 139. Spectetur nunc centrum globi I ut quiescens, et maneant omnes denominationes in probl. 15. adhibitae, sintque Maa, Mbb, Mcc momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC, quae primo ut inaequalia consideremus. Quoniam vero hic celeritatem angularem ε ut negativam spectare debemus, quia tendit in sensum ACB, si ponamus $\varepsilon \cos\alpha = x$, $\varepsilon \cos\beta = y$ et $\varepsilon \cos\gamma = z$, in formulis generalibus has literas x, y, z negative sumi oportet, ex §. 946. habebimus has aequationes motum determinantes,

$$dx + \frac{bb-cc}{aa}\, yzdt + \frac{2\delta fg}{aa}\, dt \sin l \sin(\lambda + \varphi + \zeta) = 0$$

$$dy + \frac{cc-aa}{bb}\, xzdt + \frac{2\delta fg}{bb}\, dt \sin m \sin(\mu + \varphi + \zeta) = 0$$

$$dz + \frac{aa-bb}{cc}\, xydt + \frac{2\delta fg}{cc}\, dt \sin n \sin(\nu + \varphi + \zeta) = 0$$

$$dl \sin l = dt\,(z \cos m - y \cos n);\quad d\lambda \sin l^2 = dt\,(y \cos m + z \cos n)$$
$$dm \sin m = dt\,(x \cos n - z \cos l);\quad d\mu \sin m^2 = dt\,(z \cos n + x \cos l)$$
$$dn \sin n = dt\,(y \cos l - x \cos m);\quad d\nu \sin n^2 = dt\,(x \cos l + y \cos m).$$

Tum vero ex motu progressivo habemus:

$$dv = 2\delta g dt \cos\zeta;\quad v d\varphi = 2\delta g dt \sin\zeta \text{ et } \operatorname{tang}\zeta = \frac{f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta}.$$

Ubi est PZO $= \vartheta$ et ZO $= s$. Cum ergo sit EZO $= 180° - \vartheta - \varphi$: erit AZO $= 180° - \lambda - \vartheta - \varphi$: hincque

$$\cos\alpha = \cos l \cos s - \sin l \sin s \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)$$
$$\cos\beta = \cos m \cos s - \sin m \sin s \cos(\mu + \vartheta + \varphi)$$
$$\cos\gamma = \cos n \cos s - \sin n \sin s \cos(\nu + \vartheta + \varphi)$$

existente $\cos s = \cos l \cos\alpha + \cos m \cos\beta + \cos n \cos\gamma$ unde sequitur fore

$$\sin l \cos l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + \sin m \cos m \cos(\mu + \vartheta + \varphi) + \sin n \cos n \cos(\nu + \vartheta + \varphi) = 0.$$

Ponamus $\varepsilon \cos s = p$ et $\varepsilon \sin s = q$, ut sit $\operatorname{tang}\zeta = \dfrac{fq\cos\vartheta}{v - fq\sin\vartheta} = \dfrac{v d\varphi}{dv}$; eritque

$$x = p \cos l - q \sin l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)$$
$$y = p \cos m - q \sin m \cos(\mu + \vartheta + \varphi)$$
$$z = p \cos n - q \sin n \cos(\nu + \vartheta + \varphi)$$

ex

ex quibus valoribus fit

$$dl = qdt \sin(\lambda + \vartheta + \varphi); \quad d\lambda = pdt + qdt \cot l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)$$
$$dm = qdt \sin(\mu + \vartheta + \varphi); \quad d\mu = pdt + qdt \cot m \cos(\mu + \vartheta + \varphi)$$
$$dn = qdt \sin(\nu + \vartheta + \varphi); \quad d\nu = pdt + qdt \cot n \cos(\nu + \vartheta + \varphi)$$

indeque porro

$$dx = dp \cos l - dq \sin l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi) \sin l \sin(\lambda + \vartheta + \varphi)$$
$$dy = dp \cos m - dq \sin m \cos(\mu + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi) \sin m \sin(\mu + \vartheta + \varphi)$$
$$dz = dp \cos n - dq \sin n \cos(\nu + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi) \sin n \sin(\nu + \vartheta + \varphi).$$

At fine subsidio harum substitutionum ex aequationibus ternis primis, cum in genere sit $\sin l \cos l \sin(\lambda + A) + \sin m \cos m \sin(\mu + A) + \sin n \cos n \sin(\nu + A) = 0$, elicimus hanc aequationem

$$aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n - aaxdl \sin l - bbydm \sin m - cczdn \sin n = 0$$

cujus integrale est $aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = C$ quae adhibitis substitutionibus abit in hanc formam:

$$p(aa \cos l^2 + bb \cos m^2 + cc \cos n^2)$$
$$- q(aa \sin l \cos l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + bb \sin m \cos m \cos(\mu + \vartheta + \varphi) + cc \sin n \cos n \cos(\nu + \vartheta + \varphi)) = \text{Const.}$$

Deinde etiam per reductiones §. 1070. traditas pro vi viva colligitur haec aequatio differentialis $aaxdx + bbydy + cczdz = 2\delta fgqdt \sin(\xi - \vartheta)$.

SCHOLION.

1183. Ad reductiones hic factas intelligendas ex formulis supra traditis, ubi angulos μ et ν per λ, l, m, n expressimus, notari convenit fieri:

$$\cos(\mu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos m \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + \cos n \sin(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin m}$$
$$\cos(\nu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos n \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) - \cos m \sin(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin n}$$
$$\sin(\mu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos m \sin(\lambda + \vartheta + \varphi) - \cos n \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin m}$$
$$\sin(\nu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos n \sin(\lambda + \vartheta + \varphi) + \cos m \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin n}.$$

Ac simili modo anguli $\mu + \varphi + \xi$ et $\nu + \varphi + \xi$ ad angulum $\lambda + \varphi + \xi$ revocari possunt. Deinde etiam pro sequentibus reductionibus haec forma imprimis est notanda

sin(μ

$$\sin(\mu + B)\cos(\nu + C) = \sin(\nu + B)\cos(\mu + C)$$

quae ob $\sin M \cos N = \frac{1}{2}\sin(M + N) + \frac{1}{2}\sin(M - N)$ reducitur ad $\sin(\mu - \nu)\cos(B - C)$; hocque modo reductionem pro aliis formulis instituendo, reperimus:

$$\sin(\mu + B)\cos(\nu + C) - \sin(\nu + B)\cos(\mu + C) = \sin(\mu - \nu)\cos(B - C)$$

$$\sin(\mu + B)\sin(\nu + C) - \sin(\nu + B)\sin(\mu + C) = -\sin(\mu - \nu)\sin(B - C)$$

$$\cos(\mu + B)\cos(\nu + C) - \cos(\nu + B)\cos(\mu + C) = -\sin(\mu - \nu)\sin(B - C)$$

ubi $\sin(\mu - \nu)$ per formulas usurpatas datur, est enim $\sin(\mu - \nu) = \frac{\cos l}{\sin m \sin n}$.

PROBLEMA. 18.

1184. Si globus ex materia uniformi constet: vel saltem ita fuerit comparatus, ut omnia momenta inertiae sint inter se aequalia, eique initio impressus fuerit motus quicunque, determinare ejus continuationem.

SOLUTIO.

Cum hic sit $aa = bb = cc$, seu momentum inertiae respectu omnium diametrorum $= Maa$, prima aequatio integrata praebet $aap =$ Const. unde p erit quantitas constans. Statuatur ergo $p = h$: et ternae aequationes differentiales priores induent has formas:

$$\text{I.} \quad -dq\cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi)\sin(\lambda + \vartheta + \varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\lambda + \varphi + \xi) = 0$$

$$\text{II.} \quad -dq\cos(\mu + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi)\sin(\mu + \vartheta + \varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\mu + \varphi + \xi) = 0$$

$$\text{III.} \quad -dq\cos(\nu + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi)\sin(\nu + \vartheta + \varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\nu + \varphi + \xi) = 0$$

quarum autem sufficit binas consideraffe, quia inde jam nota est conclusio $p = h$. Iam per superiores reductiones binae posteriores ita combinentur:

II. $\cos(\nu + \vartheta + \varphi)$ — III. $\cos(\mu + \vartheta + \varphi)$ praebet

q (dϑ

$q(d\vartheta + d\phi)\sin(\mu - \nu) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\mu - \nu)\cos(\xi - \vartheta) = 0$ seu $q(d\vartheta + d\phi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\cos(\xi - \vartheta) = 0$. Deinde II. $\sin(\nu + \vartheta + \phi)$ — III. $\sin(\mu + \vartheta + \phi)$ dat $dq\sin(\mu - \nu) - \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\mu - \nu)\sin(\xi - \vartheta) = 0$ seu $dq = \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\xi - \vartheta)$ qui valor in ultima aequatione pro viribus vivis substitutus praebet $xdx + ydy + zdz = qdq$ hincque $xx + yy + zz = gg = \text{Const.} + qq = \text{Const.} + gg\sin s^2$ ita ut fit $gg\cos s^2 = \text{const.}$ ut jam invenimus ob $g\cos s = p = h$. Hinc istas habemus aequationes a litteris $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ immunes:

I. $q(d\vartheta + d\phi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\cos(\xi - \vartheta) = 0$; II. $dq = \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\xi - \vartheta)$

III. $dv = 2\delta g\,dt\cos\xi$; IV. $vd\phi = 2\delta g\,dt\sin\xi$

quibus adjungatur haec finita $\tang\xi = \frac{fq\cos\vartheta}{v - fq\sin\vartheta}$, quae transformata in hanc $v\sin\xi - fq\cos(\xi - \vartheta) = 0$, differentietur $dv\sin\xi + vd\xi\cos\xi - fdq\cos(\xi - \vartheta) + fqd\xi\sin(\xi - \vartheta) - fqd\vartheta\sin(\xi - \vartheta) = 0$. Iam I. $\sin(\xi - \vartheta)$ + II. $\cos(\xi - \vartheta)$ dat $q(d\vartheta + d\phi)\sin(\xi - \vartheta) + dq\cos(\xi - \vartheta) = 0$ quae per f multiplicata illi addatur $dv\sin\xi + vd\xi\cos\xi + fq(d\xi + d\phi)\sin(\xi - \vartheta) = 0$. Porro ob $\frac{dv}{vd\phi} = \frac{\cos\xi}{\sin\xi}$, erit $v(d\phi + d\xi)\cos\xi + fq(d\xi + d\phi)\sin(\xi - \vartheta) = 0$ seu $(d\phi + d\xi)(v\cos\xi + fq\sin(\xi - \vartheta)) = 0$ quorum factorum finitus $v\cos\xi + fq\sin(\xi - \vartheta)$ evanescere nequit, ob $v\sin\xi - fq\cos(\xi - \vartheta) = 0$, sequeretur enim inde $v\cos\vartheta = 0$, et $fq\cos\vartheta = 0$; quod nonnisi casu $\vartheta = 90°$ locum habet. Relinquitur ergo ut sit $d\phi + d\xi = 0$ ideoque $\phi + \xi = \text{Const.}$

Hic impetrato reliqua non difficulter expedientur; ad integrationes autem determinandas pro statu initiali $t = 0$, ponamus fuisse celeritatem progressivam $v = e$, ang. $\phi = 0$; ang. $PZO = \vartheta = \mathfrak{h}$, arcum $ZO = s = \mathfrak{f}$; et celeritatem angularem $g = \varepsilon$ in sensum ACB; hincque $p = h = g\cos s = \varepsilon\cos\mathfrak{f}$, et $q = \varepsilon\sin\mathfrak{f}$; porro $\tang\xi = \frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{e - \varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}}$.

Statuatur $\frac{\epsilon f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h}}{e - \epsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}} = \tang \zeta$ ut fuerit initio $\xi = \zeta$, ac perpetuo erit $\xi + \phi = \zeta$, ita ut angulus DZQ $= \zeta$ maneat constans. Quare cum sit $\xi = \zeta - \phi$: erit $v \sin(\zeta - \phi) = fq \cos(\zeta - \vartheta - \phi)$. Supra autem invenimus: $\frac{d.v\cos\phi}{2gdt} = \delta \cos(\xi + \phi) = \delta \cos\zeta$; et $\frac{d.v\sin\phi}{2gdt} = \delta \sin(\xi + \phi) = \delta \sin\zeta$ unde integrando colligimus $v \cos\phi = e + 2\delta gt \cos\zeta$ et $v \sin\phi = 2\delta gt \sin\zeta$ hincque $v = \sqrt{(ee + 4\delta egt \cos\zeta + 4\delta\delta ggtt)}$ et $\tang\phi = \frac{2\delta gt \sin\zeta}{e + 2\delta gt \cos\zeta}$ atque $\tang(\zeta - \phi) = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt} = \frac{fq\cos\vartheta}{v - fq\sin\vartheta} = \tang\xi$. Deinde ob $d\phi = -d\xi$ binae priores aequationes abeunt in I. $q(d\xi - d\vartheta) = \frac{2\delta fg}{aa} dt \cos(\xi - \vartheta)$;

$$\text{II. } dq = \frac{2\delta fg}{aa} dt \sin(\xi - \vartheta),$$

quarum haec per illam divisa dat: $\frac{dq}{q(d\xi - d\vartheta)} = \frac{\sin(\xi - \vartheta)}{\cos(\xi - \vartheta)}$, quae integrata dat $q\cos(\xi - \vartheta) = \text{Const.}$ ideoque $q\cos(\xi - \vartheta) = \epsilon \sin \mathfrak{f} \cos(\zeta - \mathfrak{h})$, unde valor ipsius q in prima substitutus praebet: $\frac{\epsilon(d\xi - d\vartheta)\sin\mathfrak{f}\cos(\zeta - \mathfrak{h})}{\cos(\xi - \vartheta)^2} = \frac{2\delta fg}{aa} dt$, et integrando $\epsilon \sin\mathfrak{f} \cos(\zeta - \mathfrak{h}) \tang(\xi - \vartheta) = C + \frac{2\delta fg}{aa} t$, ubi $C = \epsilon \sin\mathfrak{f} \sin(\zeta - \mathfrak{h})$. At $\tang(\xi - \vartheta) = \tang(\zeta - \phi - \vartheta) = \frac{\tang(\zeta - \phi) - \tang\vartheta}{1 + \tang\vartheta \tang(\zeta - \phi)}$, et $\tang\vartheta = \frac{\tang\xi - \tang(\xi - \vartheta)}{1 + \tang\xi \tang(\xi - \vartheta)}$. Sed per hypothesin est $\epsilon \sin\mathfrak{f} = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\zeta - \mathfrak{h})}$, unde fit $\tang(\xi - \vartheta) = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa\sin\zeta}$, at $\tang\xi = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt}$ hincque angulus ϑ facile determinatur: indeque $q = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi - \vartheta)}$. Verum hic notari oportet, cum sit $\tang\zeta$

=

$= \frac{\varepsilon f \sin f \cos \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \sin f \sin \mathfrak{h}}$, esse ut supra de angulo ζ ostendimus, $\sin \zeta$
$= \frac{-\varepsilon f \sin f \cos \mathfrak{h}}{\sqrt{(ee - 2e\varepsilon f \sin f \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}}$ et $\cos \zeta = \frac{-e + \varepsilon f \sin f \sin \mathfrak{h}}{\sqrt{(ee - 2e\varepsilon f \sin f \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}}$
unde $\cos(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e \cos \mathfrak{h}}{\sqrt{(ee - 2e\varepsilon f \sin f \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}}$. His inventis cum sit $\varepsilon \cos s = \varepsilon \cos f$ et $\varepsilon \sin s = q$, erit $\varepsilon = \sqrt{(qq + \varepsilon\varepsilon \cos f^2)}$ et $\tang s = \frac{q}{\varepsilon \cos f}$. Sicque tam motus progressivus, quam ad quodvis tempus axis gyrationis O cum celeritate angulari ε poterit assignari, id quod ad motus cognitionem sufficit. Determinatio autem situs punctorum A, B, C ad quodvis tempus nimis est ardua, quam ut eam perficere liceat.

COROLL. 1.

1185. Cum sit celeritas angularis $\varepsilon = \frac{\varepsilon \cos f}{\cos s}$, seu cosinui arcus SO reciproce proportionalis; sequitur, si polus gyrationis O initio fuerit in superiori hemisphaerio DZE, eum nunquam in inferius pervenire posse: in transitu enim per circulum horizontalem DE prodiret celeritas angularis ε infinita.

COROLL. 2.

1186. Ob eandem rationem, si polus gyrationis O initio fuerit in hemisphaerio inferiori DTE, is nunquam in superius ascendet. Sin autem initio fuerit in ipso circulo horizontali DE, perpetuo in eodem manebit. Scilicet si initio axis gyrationis fuerit horizontalis, perpetuo horizontalis manebit.

COROLL. 3.

1187. Si fuerit initio angulus DZO $= \mathfrak{h}$ rectus, fiet $\sin \zeta = 0$ et ob $\tang(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin f - e \sin \mathfrak{h}}{e \cos \mathfrak{h}}$, erit etiam $\xi - \vartheta$ rectus. Sed ob $\tang \xi = \frac{e \sin \zeta}{e \cos \zeta + 2\delta g t}$, angulus ξ evanescit, unde angulus $\vartheta =$ PZO prodit rectus. Simulatque igitur angulus PZO factus fuerit rectus, perpetuo rectus manebit.

COROLL. 4.

1188. Memorabilis eſt etiam proprietas, quod angulum $\zeta + \phi$ ſeu DZQ et in fig. 146. angulus DIQ ſit conſtans. Recta enim QIS ſibi perpetuo manebit parallela, et quia globus in motu progreſſivo ſollicitatur vi conſtante δM ſecundum eandem directionem IS, curva ab eo deſcripta GI parabola ſit neceſſe eſt.

SCHOLION. 1.

1189. Hic autem motus globi, uti noſtris formulis eſt definitus, diutius non durat, quam revera frictio adeſt, ſeu planum horizontale in puncto contactus T raditur. Si enim eveniat, ut raſio ceſſet, ſeu celeritas radens in T evaneſcat, ſubito frictio evaneſcit, formulaeque inventae non amplius locum habent. Tum igitur globus motu tam progreſſivo, quam gyratorio uniformiter in directum progredietur, neque axis gyrationis ullam amplius mutationem patietur. Ac ſi ſtatim initio motus globo impreſſus ita fuerit comparatus, ut frictio fuerit nulla, quod evenit, ſi tam εf ſin f coſ$\mathfrak{h} = 0$ quam $\epsilon = \varepsilon f$ ſin f ſin $\mathfrak{h}$, deinceps etiam globus nullam frictionem ſentiet; et ſtatim ab initio motum progreſſivum uniformiter in directum proſequetur, ſimulque uniformiter circa eundem axem gyrabitur. Verum ſi corpori ab initio alius motus quicunque fuerit impreſſus, ſemper aliquo tempore elapſo eo reducetur, ut frictio evaneſcat, indeque motum ſuum uniformiter proſequetur; quod memorabile temporis punctum in ſequenti problemate inveſtigabimus.

SCHOLION. 2.

1190. Quae in ſolutione problematis elicuimus, huc redeunt: Ex motu primum impreſſo habemus celeritatem motus progreſſivi $= \epsilon$ ſecundum directionem DI: ac ſi gyretur circa axem IO celeritate angulari ε in
Fig. 139. ſenſum ACB ſeu ZETD, qui ſenſus *antrorſum tendens* dici ſolet, fueritque arcus ZO = f et angulus DZO = $\mathfrak{h}$: tum vero radius globi ſit $= f$ ejusque momentum inertiae $= Maa$ reſpectu omnium diametrorum, exiſtente M ejus maſſa: ex his datis colligitur celeritas radens in puncto contactus $= \sqrt{(\epsilon\epsilon - 2\epsilon\varepsilon f \text{ ſin f ſin } \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \text{ ſin f}^2)}$ quae ſi ponatur $= k$, quaeratur angulus ζ, ut ſit ſin $\zeta = \frac{- \varepsilon f \text{ ſin f coſ} \mathfrak{h}}{k}$ et coſ ζ

$$= \frac{\varepsilon f \text{ ſin f ſin} \mathfrak{h} - \epsilon}{k},$$ qui ſit DZQ $= \zeta$, eritque IQ directio motus radentis.

dentis. Tum si elapso tempore t globi centrum proferatur celeritate v secundum directionem PI, et gyretur celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ZETD circa polum O, ponaturque $DZP = \phi$, $PZO = \vartheta$, et $ZO = s$: invenimus primo: $\tang \phi = \frac{2\delta g t \sin\zeta}{e + 2\delta g t \cos\zeta}$ et celeritatem centri D $= \sqrt{(ee + 4\delta e g t \cos\zeta + 4\delta\delta g g t t)}$, at celeritas radens etiamnum fiet in directione IQ, existente $DZQ = \zeta$: unde posito $PZQ = \xi$ erit $\tang \xi = \frac{e \sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta g t}$. Porro est $\tang(\xi - \vartheta) = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f f g t}{\varepsilon a a \sin\zeta}$, existente $\tang(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h}}{e \cos\mathfrak{h}}$, unde angulus ϑ innotescit, hincque ob $DZO = \phi + \vartheta = \zeta - \xi + \vartheta$ concluditur $\tang DZO = \tang (\phi + \vartheta) = \frac{\varepsilon a a k \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + 2\delta f g t(e - \varepsilon f \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h})}{\varepsilon a a k \sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h} - 2\delta\varepsilon f f g t \sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}$. Atque ex his tandem nacti sumus: $\varepsilon \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$ et $\varepsilon \sin s = \frac{e \sin\zeta}{f \cos(\xi - \vartheta)}$. Denique pro celeritate radente secundum IQ, ea est $= \sqrt{(vv - 2\varepsilon f v \sin s \sin\vartheta + \varepsilon\varepsilon f f \sin s^2)}$; quae si vocetur $= w$, supra ostendimus esse $\sin\xi = \frac{-\varepsilon f \sin s \cos\vartheta}{w}$ et $\cos\xi = \frac{\varepsilon f \sin s \sin\vartheta - v}{w}$, unde ε et s definiuntur. Sed pro situ punctorum A, B, C in globo fixorum ad quodvis tempus determinando formulae adeo fiunt intricatae, ut nihil inde concludi queat. Interim si pro puncto A vocetur $ZA = l$ et $EZA = \lambda$, ad has binas aequationes totum negotium reducitur:

$$\text{I. } dl = dt\left(\varepsilon \sin\mathfrak{f} \sin(\mathfrak{h} + \lambda) - \frac{2\delta f g t}{aa}\cos(\zeta + \lambda)\right)$$

$$\text{II. } d\lambda \sin l = \varepsilon dt \cos\mathfrak{f} \sin l + dt \cos l \left(\varepsilon \sin\mathfrak{f}\cos(\mathfrak{h} + \lambda) + \frac{2\delta f g t}{aa}\sin(\zeta + \lambda)\right)$$

quarum resolutio vereor ne frustra suscipiatur. Cum autem ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari assignare valeamus, quod ad motus cognitionem, qualis vulgo desideratur, sufficere potest, eo magis mirum videtur, quod motus singulorum globi punctorum quasi vires analyseos superet. Multo minus igitur de motu globorum, in quibus momenta inertiae non sunt aequalia, quicquam definire licebit.

PROBLEMA. 19.

1191. Si globo, cujus omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia, motus quicunque fuerit impressus, assignare temporis punctum, ubi celeritas radens ideoque frictio evanescit, indeque globus motu uniformi progredi pergat.

SOLUTIO.

Supra §. 1175. vidimus, ut attritus evanescat, has duas requiri conditiones, alteram $g \sin s \cos\vartheta = 0$ alteram $v = fg \sin s \sin\vartheta$, seu in expressione $\tan\xi = \frac{fg \sin s \cos\vartheta}{v - fg \sin s \sin\vartheta}$ tam numeratorem quam denominatorem simul evanescere debere. Cum autem invenerimus $\tan\xi = \frac{e \sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt}$, ubi numerator $e \sin\zeta$ est constans, si in illa formula numerator evanescit, necesse est denominator simul evanescat, quia alioquin aequalitas inter has duas fractiones subsistere nequit. Unde positio $\cos\vartheta = 0$ tempus quaesitum declarabit. Verum idem luculentius determinabimus, si ad quodvis tempus elapsum t celeritatem radentem w investigemus. Cum igitur ex formula $\sin\xi = \frac{-gf \sin s \cos\vartheta}{w}$ sit $w = \frac{-gf \sin s \cos\vartheta}{\sin\xi}$, quae expressio, ob $g \sin s = \frac{e \sin\zeta}{f \cos(\xi - \vartheta)}$, abit in $w = \frac{-e \sin\zeta \cos\vartheta}{\sin\xi \cos(\xi - \vartheta)}$: atque ob $\vartheta = \xi - (\xi - \vartheta)$ in hanc $w = -e \sin\zeta\,(\cot\xi + \tan(\xi - \vartheta))$, si hic pro $\tan\xi$ et $\tan(\xi - \vartheta)$ valores supra inventos substituamus, reperiemus:

$$w = -\left(e\cos\zeta + 2\delta gt + e \sin\zeta \tan(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{aa}\right).$$

At $\cos\zeta + \sin\zeta \tan(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\cos\mathfrak{h}}{\cos(\zeta - \mathfrak{h})}$, et $\cos(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e\cos\mathfrak{h}}{k}$; unde $e\cos\zeta + e\sin\zeta \tan(\zeta - \mathfrak{h}) = -k$, ubi k denotat celeritatem radentem initialem. Quamobrem elapso tempore t habebimus celeritatem radentem $w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$, ita ut ea labente tempore uniformiter decrescat, Tandem ergo certo evanescet, idque fiet elapso tempore

pore

pore $t = \frac{aak}{2\delta g\,(aa+ff)}$; eritque tum $\cos\vartheta = 0$ et $\vartheta = 90^\circ = PZO$. Quod ergo cum evenerit, videamus quomodo reliquae motus determinationes se sint habiturae: et quoniam $2\delta g t = \frac{aak}{aa+ff}$, erit $\tang\varphi = \frac{aak\sin\zeta}{e(aa+ff)+aak\cos\zeta}$ et $\tang\xi = \frac{e(aa+ff)\tang\zeta}{e(aa+ff)+aak}$. Hinc fit $u\sin s = \frac{e\sin\zeta}{\varepsilon f\sin\xi}$. Cum autem sit $v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek\cos\zeta}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2}\right)}$; erit $\sin\varphi = \frac{aak\sin\zeta}{(aa+ff)v}$ et $\cos\varphi = \frac{e(aa+ff)+aak\cos\zeta}{(aa+ff)v}$; atque $\sin\xi = \frac{e\sin\zeta}{v}$, ideoque $u\sin s = \frac{v}{f}$. Porro quia $u\cos s = \varepsilon\cos\mathfrak{f}$, erit $\tang s = \frac{v}{\varepsilon f\cos\mathfrak{f}}$ et $u = \sqrt{\left(\frac{vv}{ff} + \varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{f}^2\right)}$ seu $u = \frac{\sqrt{(eeff + 2\varepsilon\varepsilon aaf\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4\sin\mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\cos\mathfrak{f}^2}}{aa+ff}$ ob $kk = ee - 2\varepsilon ef\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\sin\mathfrak{f}^2$.

COROLL. 1.

1192. Quo major ergo initio fuerit celeritas radens k, eo diutius motus durat, antequam cessante frictione ad uniformitatem redigatur. Ac si globus constet ex materia homogena, fit $aa = \frac{2}{5}ff$, ideoque motus uniformitas incipit elapso tempore $t = \frac{k}{7\delta g}$ min. sec. hinc in hypothesi $\delta = \frac{1}{3}$ fit $t = \frac{3k}{7g}$, existente $g = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen.

COROLL. 2.

1193. Ut centrum globi eodem tempore ad quietem redigatur, status initialis ita comparatus esse debet, ut sit $\cos\zeta = -1$ et $e = \frac{aak}{aa+ff}$. Fit ergo $k = e - \varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}$, et $\sin\mathfrak{h} = 1$; seu $\mathfrak{h} = 90^\circ$; et $k = e - \varepsilon f\sin\mathfrak{f}$; hincque $\varepsilon\sin\mathfrak{f} = \frac{-ef}{aa}$. Porro ob $v = 0$ fit $s = 0$; et $u = \varepsilon\cos\mathfrak{f}$,

qua

qua celeritate angulari jam globus circa axem verticalem quiescentem gyrabitur: elapso ab initio tempore $t = \frac{\varepsilon}{2\delta g}$ min. sec.

COROLL. 3.

1194. Hoc autem casu, quo initio est $\mathfrak{h} = 90°$, et $\varepsilon = \frac{-\varepsilon f}{aa \sin \mathfrak{f}}$ fit $\zeta = 180$; $\phi = 0$; $\xi = 180$; $\vartheta = 90°$; $v = \varepsilon - 2\delta g t$; tum vero $\varepsilon \cos s = \frac{-\varepsilon f \cos \mathfrak{f}}{aa \sin \mathfrak{f}}$; $\varepsilon \sin s = \frac{-\varepsilon f}{aa}\left(1 - \frac{2\delta g t}{\varepsilon}\right)$, hincque $\operatorname{tang} s = \left(1 - \frac{2\delta g t}{\varepsilon}\right) \operatorname{tang} \mathfrak{f}$ et $\varepsilon = \frac{-\varepsilon f}{aa \sin \mathfrak{f}} \surd \left(1 - \frac{4\delta g t}{\varepsilon} \sin \mathfrak{f}^2 + \frac{4\delta\delta g g t t}{\varepsilon\varepsilon} \sin \mathfrak{f}^2\right)$. At initio erat celeritas radens $k = \varepsilon \left(1 + \frac{ff}{aa}\right)$, elapso autem tempore t ea est $w = \left(1 + \frac{ff}{aa}\right)(\varepsilon - 2\delta g t)$, sicque posito $t = \frac{\varepsilon}{2\delta g}$ simul fit $w = 0$, $v = 0$ et $s = 0$, ut ante.

COROLL. 4.

1195. Ne valor $\varepsilon \sin s = \frac{\varepsilon \sin \zeta}{f \cos(\xi - \vartheta)}$ indefinitus videatur, quod fit si numerator ac denominator evanescant, seu $\zeta = 0$, conveniet loco $\sin \zeta$ et $\cos(\xi - \vartheta)$ valores ex superioribus substitui, atque hinc reperietur:

$$\varepsilon \sin s = \surd\left(\varepsilon\varepsilon \sin \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}\,(\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - \varepsilon \sin \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}\right)$$

unde ob $\varepsilon \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$ prodit: $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}\,(\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - \varepsilon \sin \mathfrak{h})}{aak}$
$+ \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}$.

COROLL. 5.

1196. Cum sit vis viva globi $= M(vv + aa\varepsilon\varepsilon)$, erat ea initio $= M(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon\varepsilon aa)$, elapso autem tempore t ea erit $= M(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon\varepsilon aa$ —

$-4\delta gkt+4\left(1+\frac{ff}{aa}\right)\delta\delta ggtt)$. At elapso tempore $t=\frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$, vis viva fiet $=\frac{M(eeff+2\varepsilon eaaf\sin f\sin\mathfrak{h}+\varepsilon\varepsilon aa(aa+ff\cos f^2))}{aa+ff}$, cujus defectus ab initiali est $=\frac{Maa(ee-2\varepsilon ef\sin f\sin\mathfrak{h}+\varepsilon\varepsilon ff\sin f^2))}{aa+ff}$ $=\frac{Maakk}{aa+ff}$, ita ut ista vis viva sit $=M\left(ee+\varepsilon\varepsilon aa-\frac{aakk}{aa+ff}\right)$.

SCHOLION.

1197. Ex his ergo formulis totus motus globi assignari potest, quicunque motus ei initio fuerit impressus: interim tamen hae formulae non parum sunt complexae: unde ad clariorem explicationem haud abs re erit, casus quosdam magis notabiles evolvi. Cujusmodi sunt, uti jam supra innuimus, duo potissimum, alter quos arcus ZO initio erat quadrans, alter vero quo angulus DZO $=\mathfrak{h}$ erat rectus: utrumque igitur seorsim explicemus.

PROBLEMA 20.

1198. Si globo, in quo omnia momenta inertiae sunt aequalia, initio motus gyratorius circa axem horizontalem fuerit impressus praeter motum progressivum, definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Cum initio axis gyrationis fuerit horixontalis, erit $f=ZO=90°$. Fig. 139. Denotante ergo e celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem circa axem IO in sensum ZETD, sit pro puncto O angulus DZO $=\mathfrak{h}$: manente $f=$ radio globi et $Maa=$ momento inertiae. Ex his erat initio celeritas radens $k=\surd(ee-2\varepsilon ef\sin\mathfrak{h}+\varepsilon\varepsilon ff)$ et pro ejus directione IQ angulus DZQ $=\zeta$ ut sit $\sin\zeta=\frac{-\varepsilon f\cos\mathfrak{h}}{k}$ et Fig. 140. $\cos\zeta=\frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{h}-e}{k}$. His pro statu initiali constitutis elapso tempore t centrum globi descripserit viam GI, ut jam sit in I ubi ejus celeritas secundum IR erit $=v=\surd\left(ee+\frac{4\delta egt(\varepsilon f\sin\mathfrak{h}-e)}{k}+4\delta\delta ggtt\right)$: unde positis coordinatis GX $=$ X et XI $=$ Y ob tang EIR $=$ tang φ

=

$= \frac{-2\delta\varepsilon fgt\cos\eta}{\varepsilon k + 2\delta gt(\varepsilon f\sin\eta - e)}$ erit $dX = \varepsilon dt + \frac{2\delta gtdt}{k}(\varepsilon f\sin\eta - e)$ et $dY = \frac{-2\delta\varepsilon fgtdt\cos\eta}{k}$, ideoque $GX = X = \varepsilon t + \frac{\delta gtt}{k}(\varepsilon f\sin\eta - e)$

Fig. 139. et $XI = Y = \frac{-\delta\varepsilon fgtt}{k}\cos\eta$. Tum vero pro motu gyratorio, qui jam fiat in sensum ZETD celeritate angulari $= \varepsilon$ circa polum O existente $ZO = s$, $PZO = \vartheta$, et $DZQ = \varphi + \xi$, ubi IQ refert directionem celeritatis radentis, quia constanter est $\varphi + \xi = \zeta$, seu directio IQ constans, erit $\tang\xi = \frac{-\varepsilon f\cos\eta}{\varepsilon\varepsilon f\sin\eta - \varepsilon e + 2\delta gkt}$, et $\tang(\xi - \vartheta) = \frac{\varepsilon f - e\sin\eta}{e\cos\eta} - \frac{2\delta fgkt}{\varepsilon eaa\cos\eta}$, unde ambo anguli ξ et ϑ definiuntur. Vel erit $\tang(\varphi + \vartheta) = \frac{\varepsilon aak\sin\eta + 2\delta fgt(e - \varepsilon f\sin\eta)}{\varepsilon aak\cos\eta - 2\delta\varepsilon ffgt\cos\eta}$. Celeritas autem radens secundum directionem IQ est $w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$. Tum vero ob $\varepsilon\cos s = 0$, erit arcus $ZO = s$ quadrans, et $\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt(\varepsilon f - e\sin\eta)}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)}$. Hic motus inaequabilis autem tantum durabit per tempus $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$, quo elapso est $\tang\varphi = \frac{-\varepsilon aaf\cos\eta}{e(aa+ff) + aa(\varepsilon f\sin\eta - e)}$ $= \frac{-\varepsilon aa\cos\eta}{ef + \varepsilon aa\sin\eta} = \sqrt{\left(ee + \frac{2aae(\varepsilon f\sin\eta - e)}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2}\right)}$, $s = 90°$, et $\varepsilon = \frac{v}{f} = \frac{\sqrt{(eeff + 2\varepsilon eaaf\sin\eta + \varepsilon\varepsilon a^4)}}{aa+ff}$, substituto pro kk valore. Tum autem fit angulus $\vartheta = 90°$, et $\sin\xi = \frac{e\sin\zeta}{v}$.

COROLL. 1.

1199. Si initio fuerit angulus $DZO = \eta = 0$, erit $k = \sqrt{(ee + \varepsilon\varepsilon ff)}$ pro angulo $DZQ = \zeta$ fit $\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f}{k}$; $\cos\zeta = \frac{-e}{k}$; tum post tempus

t pro-

t prodit $v = \surd(ee - \frac{4\delta eegt}{k} + 4\delta\delta ggtt)$; tang $\phi = \frac{-2\delta \epsilon fgt}{e(k-2\delta gt)}$;
$X = et\left(1 - \frac{\delta gt}{k}\right)$, $Y = \frac{-\delta\epsilon fgtt}{k}$. Porro tang $\xi = \frac{\epsilon ef}{ee - 2\delta gkt}$;
tang $(\xi - \vartheta) = \frac{\epsilon f}{e} - \frac{2\delta fgkt}{eeaa}$ tang $(\phi + \vartheta) = \frac{2\delta\epsilon fgt}{eaak - 2\delta\epsilon ffgt}$;
$\varepsilon = \surd\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon\epsilon ffgt}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$ et $w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$.
Elapso autem tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$ erit tang $\phi = \frac{-\varepsilon aa}{ef}$; $v =$
$\frac{f\surd(eeff + eea^4)}{aa+ff} = f\varepsilon$; $\vartheta = 90°$ et tang $\xi = \frac{\varepsilon ef(aa+ff)}{ee(aa+ff) - aakk}$
$= \frac{\varepsilon e(aa+ff)}{f(ee - \varepsilon\varepsilon aa)}$.

COROLL. 2.

1200. Si angulus DZO $= \mathfrak{f}$ esset $= 180°$, eaedem formulae motum indicabunt, sumta celeritate angulari ε negativa seu motu gyratorio in contrarium verso. At si sit $\varepsilon = o$, seu globo solus motus progressivus fuerit impressus, fit $k = e$, $\zeta = 180°$, $v = e - 2\delta gt$; $\phi = o$, $X = t(e - \delta gt)$, $Y = o$; $\xi = 180°$; $\vartheta = 90°$, $\varepsilon = \frac{2\delta fgt}{aa}$; et elapso tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$, fit $v = \frac{eff}{aa+ff}$, $\varepsilon = \frac{ef}{aa+ff}$ et $X = \frac{et(aa+2ff)}{2(aa+ff)}$
$= \frac{aaee(aa+2ff)}{4\delta g(aa+ff)^2}$.

SCHOLION.

1201. Casus hic, quo globus initio nullum motum gyratorium est adeptus, in genere valet, neque ad ullam hypothesin angulorum $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{h}$ est adstrictus. Tum igitur globus in directum progreditur motu progressivo retardato, motumque paulatim gyratorium accipiet, donec elapso tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$ motum uniformem acquirat, quo deinceps continuo progrediatur. Hinc deducimur ad casum, quo globus initio motum tantum gyratorium acceperit fine ullo motu progressivo, cujus evo-

 lutio

lutio est facilis. Posito enim $\varepsilon = 0$, erit $k = \varepsilon f$ sin f, hincque fit sin $\zeta = -$ cos $\mathfrak{h}$ et cos $\zeta =$ sin $\mathfrak{h}$, ergo $\zeta = \mathfrak{h} - 90°$: ubi pro axe gyrationis initio impressae IO est ZO = f et DZO = $\mathfrak{h}$, existente celeritate angulari in sensum ZETD $= \varepsilon$. Elapso ergo tempore t fit $\varphi = \zeta$, scilicet sublato ab angulo DZO = $\mathfrak{h}$ angulo recto PZO, erit PI directio motus progressivi, quem globus acquiret, cujus celeritas erit $v = 2\delta g t$, ideoque tempori proportionalis. Tum vero erit tang $\xi = 0$ et tang $(\xi - \vartheta) = \infty$, ergo ob $\varphi + \xi = \zeta = \mathfrak{h} - 90°$, erit $\xi = 0$, et $\vartheta = 90°$, hinc DZO $= \zeta + 90 = \mathfrak{h}$, ita ut polus gyrationis O in eodem perpetuo circulo verticali reperiatur. Denique ex §. 1195. est ε sin $s = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon \sin f^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)} = \varepsilon \sin f - \frac{2\delta f g t}{aa}$ et ε cos $s = \varepsilon$ cos f, unde fit tang $s =$ tang f $- \frac{2\delta f g t}{\varepsilon aa \cos f}$, ita ut arcus ZO diminuatur, nisi fuerit quadrans vel eo major, et $\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)}$. Motus autem ad uniformitatem redacetur elapso tempore $t = \frac{\varepsilon aaf \sin f}{2\delta g (aa + ff)}$; fitque tum $\varepsilon = \frac{\varepsilon\sqrt{(a^4 \sin f^2 + (aa+ff)^2 \cos f^2)}}{aa + ff}$; $v = \frac{\varepsilon aaf \sin f}{aa + ff}$ et tang $s = \frac{aa \tan f}{aa + ff}$. Si ergo fuisset f = 0, seu globo motus gyratorius circa axem verticalem impressus esset sine ullo motu progressivo, eundem motum sine ulla mutatione esset conservaturus.

PROBLEMA. 21.

1202. Si globo, in quo omnia momenta inertiae sunt aequalia, motus gyratorius fuerit impressus circa axem ad motus progressivi directionem normalem; definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Fig. 139. Cum motus progressivi initio impressi directio sit recta DIE, et celeritas $= e$, angulus DZO = $\mathfrak{h}$ est rectus, et sumto ZO = f erat O polus circa quem initio globus accepit celeritatem angularem $= \varepsilon$ in sensum ZETD. Habemus ergo $k = \pm (e - \varepsilon f \sin f)$ ubi valorem positivum pro k sumi oportet: ita ut hic prodeant duo casus seorsim tractandi.

Casus I.

Casus I. Sit $e > \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, erit $k = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ, ut sit $\sin DQ = 0$ et $\cos DQ = -1$ ideoque $DQ = \zeta = 180^\circ$, et Q cadat in E: globusque a frictione δM secundum ID constanter retrahatur: unde statim colligitur globi centrum I in eadem recta DE esse incessurum. Elapso tempore t ergo ob $\cos \zeta = -1$ fit celeritas centri $v = e - 2\delta g t$, et celeritas radens $w = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$: tum vero $\varphi = 0$ et $\xi = 180^\circ$, atque $\vartheta = 90^\circ$. Quare pro axe gyrationis praesente IO, est $DIO = 90^\circ$, et posito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= \epsilon$ habemus $\epsilon \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$ et ex §. 1159. $\epsilon \sin s = \varepsilon \sin \mathfrak{f} + \frac{2\delta f g t}{aa}$, unde colligitur $\tang s = \tang \mathfrak{f} + \frac{2\delta f g t}{\varepsilon aa \cos \mathfrak{f}}$, et $\epsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}}{aa} + \frac{4\delta\delta ff ggtt}{a^4}\right)}$. Hocque tempore t percurrit centrum I lineam rectam $GX = X = t(e - \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit per tempus $t = \frac{aa(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{2\delta g(aa + ff)}$ quo elapso erit spatium $X = \frac{aa(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})(e(aa + 2ff) + \varepsilon aa f \sin \mathfrak{f})}{2\delta g(aa + ff)^2}$, et celeritas $v = \frac{f(ef + \varepsilon aa \sin \mathfrak{f})}{aa + ff}$. At pro motu gyratorio $\tang s = \tang ZO = \tang \mathfrak{f} + \frac{f(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{\varepsilon(aa + ff)\cos \mathfrak{f}} = \frac{ef + \varepsilon aa \sin \mathfrak{f}}{\varepsilon(aa + ff)\cos \mathfrak{f}}$, existente perpetuo $DIO = 90^\circ$ et celeritas angularis ϵ

$$= \frac{\sqrt{(eeff + 2e\varepsilon aaf \sin \mathfrak{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos \mathfrak{f}^2)}}{aa + ff}.$$

Casus II. Sit $e < \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$ seu $k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ talis ut sit $\sin DQ = 0$ et $\cos DQ = 1$, ergo $DQ = \zeta = 0$, et Q in D cadat. Globus ergo a frictione δM secundum directionem IE constanter acceleratur, ejusque centrum I in eadem recta IE progreditur: atque elapso tempore t erit ejus celeritas $v = e + 2\delta g t$, et celeritas radens $w = \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$. Tum vero fit $\varphi = 0$ et $\xi = 0$, atque $\vartheta = 90^\circ$. Quare pro axe gyrationis praesente IO est $DIO = 90^\circ$, et posito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $=$

$= \varepsilon$ habemus $\varepsilon \cos s = \varepsilon \cos f$ et $\varepsilon \sin s = \varepsilon \sin f - \frac{2\delta fgt}{aa}$, unde fit $\tang s = \tang f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa \cos f}$ et $\varepsilon = \surd\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$ hocque tempore t centrum globi percurrit lineam rectam $GX = X = t(e + \delta gt)$. Hic autem motus inaequabilis durabit tantum tempore $t = \frac{aa(\varepsilon f \sin f - e)}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapso erit celeritas $v = \frac{f(\varepsilon f - eaa \sin f)}{aa + ff}$, et spatium $X = \frac{aa(\varepsilon f \sin f - e)(e(aa + 2ff) + \varepsilon aaf \sin f)}{2\delta g(aa + ff)^2}$. At pro motu gyratorio reperitur $\tang s = \tang ZO = \frac{ef + \varepsilon da \sin f}{\varepsilon(aa + ff)\cos f}$ existente perpetuo $DIO = 90°$, et celeritas angularis ε

$$= \frac{\surd(eeff + 2e\varepsilon aaf \sin f + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin f^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos f^2)}{(aa + ff)}.$$

COROLL. 1.

1203. Si fuerit $e = \varepsilon f \sin f$, globus statim ab initio motum prosequetur uniformem, tam progressivum quam gyratorium, qui casus limitem constituit inter binos tractatos.

COROLL. 2.

1204. Ad priorem casum quo $e > \varepsilon f \sin f$ referendi sunt ii, quibus ε habet valorem negativum, seu globo impressus fuerit initio motus gyratorius in sensum ZDTE. Posito autem $-\varepsilon$ loco ε, fieri potest, ut globus revertatur, antequam ad uniformitatem pervenerit: scilicet si fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa \sin f}$.

COROLL. 3.

1205. Casu hoc, quo ε negative capitur, habebimus ad tempus t: $\phi = 0$, $\vartheta = 0$, $\xi = 180$, $v = e - 2\delta gt$; $w = e + \varepsilon f \sin f - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$; $\tang s = \tang f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa \cos f}$; et $\varepsilon = \surd\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin f}{aa}\right.$

+

$+ \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\Big)$. At post tempus $t = \frac{aa.(e + \varepsilon f \sin f)}{2\delta g(aa + ff)}$ percurso spatio X $= \frac{aa\,(e + \varepsilon f \sin f)\,(e\,(aa + 2ff) - \varepsilon aaf \sin f)}{2\delta g\,(aa + ff)^2}$, uniformitatem attinget, eritque tum $v = \frac{f\,(ef - \varepsilon aa \sin f)}{aa + ff}$; tang $s = \frac{\varepsilon aa \sin f - ef}{e\,(aa + ff) \cos f}$ et ε $= \frac{\sqrt{(eeff - 2e\varepsilon aaf \sin f + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin f^2 + \varepsilon\varepsilon (aa + ff)^2 \cos f^2)}}{aa + ff}$.

SCHOLION.

1206. Casus hic praecipue est memorabilis, quo globo ejusmodi motus imprimi potest, ut primo recedat, mox autem iterum revertatur, quod experimento ostendi solet, dum digito ad globum circa D applicato et deorsum presso duplex motus globo imprimitur, alter progressivus in directione DIE, alter gyratorius in sensum ZDTE. Sed ut phaenomenon succedat, necesse est, ut celeritas angularis prae progressiva certum quendam limitem excedat; quem quo facilius agnoscamus, calculum ad istum casum accommodemus, quo motus gyratorius globo circa axem horizontalem et ad directionem motus progressivi normalem imprimitur. Quod si ergo e denotet celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem retro gyrantem in sensum ZDTE, existente f radio globi et Maa ejus momento inertiae, frictioneque $= \delta M$; primo globus in directione DIE procedet, et elapso tempore t ejus celeritas secundum eandem directionem erit $v = e - 2\delta gt$, confecto spatio $X = t\,(e - \delta gt)$: tum vero etiamnum circa eundem axem retro volvetur celeritate angulari $\varepsilon = \varepsilon - \frac{2\delta fgt}{aa}$. Motus autem aequabilis evadit elapso tempore $t = \frac{aa\,(e + \varepsilon f)}{2\delta g\,(aa + ff)}$, eritque tum celeritas progressiva $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa)}{aa + ff}$; et angularis $\varepsilon = \frac{\varepsilon aa - ef}{aa + ff}$. Quare si fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa}$, globus nunc retro movetur, gyratorio adhuc retro vergente; sin autem fuerit $\varepsilon < \frac{ef}{aa}$, globus adhuc procedit, et gyratio

in

in sensum contrarium est versa. Illo casu globus regredi coepit elapso tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ et percurso spatio $X = \frac{ee}{4\delta g}$.

Si globus sit homogeneus, erit $aa = \frac{2}{5}ff$, et ef exprimit celeritatem gyrationis in puncto contactus, quae si vocetur $= h$, erit post tempus t celeritas progressiva $v = e - 2\delta gt$, et gyratoria in puncto contactus, quae sit $u = h - 5\delta gt$, et spatium percursum $= t(e - \delta gt)$: motus vero aequabilis evadet elapso tempore $t = \frac{e+h}{7\delta g}$, et confecto spatio $= \frac{(6e-h)(e+h)}{49\delta g}$: ubi erit $v = \frac{5e-2h}{7}$, et $u = \frac{2h-5e}{7}$. Ut ergo phaenomenum memoratum succedat, debet esse initio $h > \frac{5}{2}e$. Sin autem esset $h = \frac{5}{2}e$ uterque motus simul extingueretur elapso tempore $= \frac{e}{2\delta g}$ min. sec. et confecto spatio $= \frac{ee}{4\delta g}$.

CAPUT VI.

DE MOTU GLOBI HETEROGENEI SUPER PLANO HORIZONTALI, UNA CUM DILUCIDATIONIBUS NECESSARIIS SUPER MOTU VACILLATORIO.

1207. Hic mihi propositum est in motus globi heterogenei, cujus centrum gravitatis a centro figurae distat, inquirere; quod cum generalissime ob summas calculi difficultates expediri nequeat, motum hujusmodi globorum tantum ad planum horizontale restringam. Praeterea vero etiam motum tantum rectilineum sum contemplaturus; unde omnes motus gyratorios hinc excludi oportebit, praeter eos, qui fiant circa axem horizontalem ad motus progressivi directionem normalem; quandoquidem analysis nondum eo usque est promota, ut alios motus circa axes obliquos evolvere liceret.

1208. Sit ergo in plano horizontali IO recta, super qua globus progrediatur, quam initio in puncto I tetigerit, elapso autem tempore t tangat in puncto S, ponaturque spatium percursum IS $= s$; tum vero globi centrum sit in C, ejusque radius CS $=$ CA $= a$, et circulus SAB referat sectionem globi verticalem ad motus directionem IO factam, in qua reperiatur centrum globi gravitatis G, distans ab ipso centro C intervallo GG $= c$; ita ut si globus habeat motum gyratorium, is semper fiat circa axem horizontalem per centrum gravitatis G transeuntem et ad sectionem SAB normalem; hujusque axis respectu ponatur momentum globi inertiae $= Pkk$, denotante P pondus seu massam globi. Iam demisso ex G in rectam IO perpendiculo GP, vocentur coordinatae locum centri gravitatis praesentem determinantes IP $= x$ et PG $= y$, ita ut formula $\frac{dx}{dt}$ exprimat celeritatem horizontalem centri gravitatis G, et $\frac{dy}{dt}$ ejus celeritatem verticalem, qua scilicet hoc tempore sursum movetur. Praeterea vero vocetur angulus AGP $=$ ACS $= \phi$, quem angulum in sensum SAB augeri assumamus, ita ut $\frac{d\phi}{dt}$ exprimat celeritatem angularem globi in eundem sensum; ubi meminisse oportet, mihi tempus perpetuo in minutis secundis exhiberi, celeritates vero per spatia quae uno minuto percurrerentur; quem in finem littera g in calculum introducetur, denotans altitudinem lapsus uno minuto secundo peracti. Fig. 153.

1209. His positis binae coordinatae x et y per ambas variabiles IS $= s$ et angulum ACS $= \phi$ facile exprimi poterunt; ducta enim horizontali GQ, ob GQ $= c \sin\phi$ et CQ $= c \cos\phi$, erit $x = s - c \sin\phi$ et $y = a - c \cos\phi$, unde fiet $dx = ds - cd\phi \cos\phi$ et $dy = cd\phi \sin\phi$, et porro $ddx = dds - cdd\phi \cos\phi + cd\phi^2 \sin\phi$ et $ddy = + cdd\phi \sin\phi + cd\phi^2 \cos\phi$, quibus formulis uti oportet ad motum determinandum. Quod si autem in hoc negotio etiam frictionis rationem habere velimus, ante omnia videndum est, quomodo punctum globi S super recta IO promoveatur; ac primo quidem evidens est, si nullus adesset motus gyratorius, celeritatem hujus puncti versus SO fore $= \frac{ds}{dt}$: at vero ob motum gyratorium, quo angulus ACS $= \phi$ suo differentiali $d\phi$ augetur, idem punctum S retropellitur celeritate $= \frac{ad\phi}{dt}$; unde intelligitur, si fuerit

$ds = ad\phi$, tum provolutionem globi fore perfectam, sin autem fuerit $ds > ad\phi$, globus radet planum horizontale versus SO, hocque casu frictio vim suam exeret in directionem contrariam SI; contra vero si fuerit $ad\phi > ds$, attritus fiet secundum SI, et vis frictionis sese exeret secundum directionem SO.

1210. Nunc consideremus ipsas vires, quibus iste globus sollicitatur; ac primo quidem occurrit ipsum globi pondus, unde nascitur vis centrum gravitatis G deorsum secundum GP urgens $= P$; deinde quia globus plano incumbit in S, hic certam pressionem exercebit, ideoque per reactionem a plano pari vi in directione SC repelletur, quae vis cum etiamnunc sit incognita, charactere Π designetur. Denique si admittatur frictio, ea semper huic ipsi pressioni Π erit proportionalis, quam ergo repraesentemus per $\lambda\Pi$, quae, prout fuerit vel $ds > ad\phi$ vel $ds < ad\phi$, effectum exeret vel secundum directionem SI vel secundum directionem SO, uti jam notavimus. Supponamus autem his casibus quibus attritus verus datur esse $\lambda = \frac{1}{3}$, prouti vulgo assumi solet, cujus autem loco facile quamlibet aliam fractionem substituere licebit. Pro casu autem quo $ds = ad\phi$, ubi nullus datur attritus, imprimis notandum est, vel fore $\lambda = 0$, vel certum quendam valorem $< \frac{1}{3}$ esse habiturum, quantum scilicet opus fuerit ad attritum impediendum.

1211. Quo igitur hinc ipsum globi motum determinemus, ex principiis mechanicis meminisse oportet, primo motum progressivum centri gravitatis per vires sollicitantes ita affici, quasi tota massa in hoc puncto esset collecta, simulque omnes vires eidem puncto essent applicatae; deinde vero pro motu gyratorio centrum gravitatis G tanquam immotum spectari posse, unde virium sollicitantium momenta respectu axis gyrationis per ipsum punctum G transeuntis computari debent, ut ex iis acceleratio motus gyratorii definiatur.

1212. Concipiamus igitur omnes vires sollicitantes ipsi centro gravitatis G applicatas, quod ergo sustinebit primo vim P in directione GP, tum vero vim in directione contraria $= \Pi$. Praeterea vero secundum directionem horizontalem sollicitabitur vi frictionis $= \lambda\Pi$, vel versus PI vel PO, uti ante explicavimus; ubi quidem ad omnem ambiguitatem evitandam assumamus hanc vim $\lambda\Pi$ retro secundum PI urgere, siquidem pro aliis casibus signum facile mutatur. Quod si jam ipsum motum centri gravitatis secundum easdem directiones IP et PG resolvamus, principia mechanica sequentes suppeditant aequationes:

I.

$$\text{I. } \frac{Pddx}{2gdt^2} = -\lambda\Pi; \quad \text{II. } \frac{Pddy}{2gdt^2} = \Pi - P;$$

in quibus elementum temporis dt sumtum est constans.

1213. Pro motu autem gyratorio vis gravitatis P nullum praebet momentum respectu axis G, quia per ipsum transit. Verum ex vi Π in directione SC agente respectu puncti G nascetur momentum $= \Pi \cdot GQ = \Pi c \sin\phi$, quo momento motus gyratorius retardatur. Tertio vero etiam vis frictionis $\lambda\Pi$ secundum directionem PI agens producet momentum $\lambda\Pi \cdot PG = \lambda\Pi \cdot (a - c\cos\phi)$, hocque momento motus gyratorius acceleratur; pro quo determinando principia motus hanc suppeditant aequationem: $\text{III. } \frac{Pkkdd\phi}{2gdt^2} = \lambda\Pi\,(a - c\cos\phi) - \Pi c \sin\phi.$

Sicque omnino tres nacti sumus aequationes, ex quibus totum globi motum determinari oportet, tot vero aequationibus utique est opus, quandoquidem tres habemus incognitas ad quodvis tempus definiendas, scilicet spatium s cum angulo ϕ, atque insuper ipsam pressionem Π.

1214. Primo igitur ex nostris aequationibus pressionem Π elidamus, cujus valor, cum ex secunda aequatione sit $= P + \frac{Pddy}{2gdt^2}$, in binis reliquis substitutus praebebit sequentes duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2gdt^2} = -\lambda - \frac{\lambda ddy}{2gdt^2} \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{kkdd\phi}{2gdt^2} = (a\lambda - \lambda c\cos\phi - c\sin\phi)\left(1 + \frac{ddy}{2gdt^2}\right),$$

in quibus si loco x et y valores supra dati substituantur, eae ad sequentes formas reducentur:

$$\text{I. } \frac{dds - cdd\phi\cos\phi + cd\phi^2\sin\phi + \lambda cdd\phi\sin\phi + \lambda cd\phi^2\cos\phi}{2gdt^2} = -\lambda \text{ et}$$

$$\text{II. } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dd\phi\,(kk - \lambda ac\sin\phi + \lambda cc\sin\phi\cos\phi + cc\sin\phi^2)}{2gdt^2} \\ + d\phi^2\,\dfrac{(\lambda cc\cos\phi^2 + cc\sin\phi\cos\phi - \lambda ac\cos\phi)}{2gdt^2} \end{array}\right\}$$

$= \lambda a - \lambda c\cos\phi - c\sin\phi$, ubi igitur tantum duae variabiles s et ϕ praeter tempus t insunt. Verum hinc praeterea nihil plane concludere licet, nisi

nisi ex ipsis motus circumstantiis jam ante constet, quonam valore pro littera λ uti oporteat.

1215. Interim tamen si ex his duabus aequationibus littera λ penitus eliminaretur, utique resultaret una aequatio, quae ad omnes plane casus aequaliter esset adcommodata; at vero ista eliminatio multo commodius in ipsis tribus aequationibus principalibus sequenti modo institui potest. Multiplicetur prima aequatio per $y = a - c\cos\phi$, secunda per $c \sin\phi$, et ambo producta ad tertiam addantur: tum enim ambae litterae λ et Π simul ex calculo excludentur. Hoc autem pacto prodibit sequens aequatio: $\frac{yddx + cddy \sin\phi + kkdd\phi}{2gdt^2} = - c\sin\phi$. Quod si ergo hic loco x et y valores supra datos scribamus, ista prodit aequatio: $dds(a - c\cos\phi) + dd\phi(cc - ac\cos\phi + kk) + acd\phi^2 \sin\phi = - 2gcdt^2 \sin\phi$. Quoniam hic autem tres adhuc insunt variabiles, nihil prorsus pro nostro scopo concludi potest; quamobrem pleniorem solutionem pro casibus particularibus tentemus.

I. DE MOTU NOSTRI GLOBI REMOTA OMNI FRICTIONE.

1216. Cum igitur hic ubique sit $\lambda = 0$, prima aequatio initio inventa statim dat $\frac{ddx}{2gdt^2} = 0$, unde integrando fit $\frac{dx}{dt} = C$, quae formula declarat, centrum gravitatis globi G uniformiter secundum directionem horizontalem promoveri, cujus ergo celeritas si initio fuerit $= f$, habebitur $\frac{dx}{dt} = f$, ideoque $x = ft$, siquidem assumimus initio fuisse $x = 0$, id quod evenit si etiam angulus ϕ initio evanuerit, ita ut recta CGA fuerit verticalis; hinc ergo habebimus $s = ft + c\sin\phi$. Deinde cum ex secunda aequatione fiat $\Pi = P + \frac{Pddy}{2gdt^2}$, ex tertia vero aequatione fit $\frac{\Pi kkdd\phi}{2gdt^2} = - \Pi c\sin\phi$, resultabit ista aequatio:

$$\frac{kkdd\phi}{2gdt^2} = - c\sin\phi\left(1 + \frac{ddy}{2gdt^2}\right)$$ sive $kkdd\phi + cddy\sin\phi = - 2gcdt^2 \sin\phi$, quae, loco ddy restituto valore, abit in hanc:

kkddϕ

$kkdd\phi + ccdd\phi \sin\phi^2 + ccd\phi^2 \sin\phi \cos\phi = - 2gcdt^2 \sin\phi$, quae aequatio duas tantum continet variabiles, scilicet angulum ϕ cum tempore t.

1217. In hac aequatione autem commode usu venit, ut per $2d\phi$ multiplicata integrabilis reddatur; reperietur autem ejus integrale $kkd\phi^2 + ccd\phi^2 \sin\phi^2 = 4gdt^2 (c \cos\phi + \Gamma)$, unde colligimus $\frac{d\phi^2}{dt^2} = \frac{4g(c\cos\phi + \Gamma)}{kk + cc\sin\phi^2}$; quae ergo formula exprimit quadratum celeritatis angularis. Quod si ergo celeritas angularis globo initio in sensum SAB impressa ponatur $= \zeta$, quoniam sumimus initio fuisse $\phi = 0$, pro constante Γ definienda habebimus $\zeta\zeta = \frac{4g(c + \Gamma)}{kk}$, unde fit $4g\Gamma = \zeta\zeta kk - 4gc$, quo valore substituto nostra aequatio erit $\frac{d\phi^2}{dt^2} = \frac{4gc\cos\phi + \zeta\zeta kk - 4gc}{kk + cc\sin\phi^2}$.

1218. Consideremus nunc vim vivam quam noster globus in S habebit, cujus pars ex motu gyratorio oriunda est $\frac{Pkkd\phi^2}{dt^2} = \frac{Pkk(4gc\cos\phi + \zeta\zeta kk + 4gc)}{kk + cc\sin\phi^2}$; pars vero ex motu progressivo centri gravitatis oriunda est $P\left(\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)$. Vidimus autem esse $\frac{dx}{dt} = f$, et ob $dy = cd\phi \sin\phi$ erit $\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{d\phi^2}{dt^2} cc \sin\phi^2 = \frac{(4gc\cos\phi + \zeta\zeta kk - 4gc)\, cc\sin\phi^2}{kk + cc\sin\phi^2}$. Hinc igitur tota vis viva erit $P(ff + \frac{d\phi^2}{dt^2}\, kk + cc\sin\phi^2) = P(ff + 4gc\cos\phi + \zeta\zeta kk - 4gc)$; quae ergo ita exprimi potest $P(ff + \zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos\phi))$, ubi $P(ff + \zeta\zeta kk)$ exprimit vim vivam globo initio impressam, quae ergo deinceps diminuitur, prouti centrum gravitatis G ascendit. Est enim $c(1 - \cos\phi)$ spatium, per quod centrum gravitatis hactenus ascendit, quandoquidem initio centrum gravitatis infimum locum tenuisse assumimus.

1219. Ad totum autem hujus globi motum cognoscendum requiritur, ut aequatio differentialis eruta denuo integretur. Cum igitur fuisset $\frac{d\phi^2}{dt^2}(kk + cc \sin\phi^2) = \zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos\phi)$, radice quadrata hinc extracta colligitur $dt = \frac{d\phi \surd (kk + cc \sin\phi^2)}{\surd (\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos\phi))}$, haec autem formula ita est comparata, ut in genere neutiquam integrationem admittat, neque aliter nisi per approximationes inveniri queat, cujus tamen resolutio facillima esset, si foret $c = 0$, quippe quo casu centrum gravitatis in ipsum globi centrum incideret; tum enim foret $dt = \frac{d\phi}{\zeta}$, sive $d\phi = \zeta dt$ et $\phi = \zeta t$, unde manifestum est, globi motum fore aequabilem tam ratione motus progressivi quam gyratorii.

CASUS. I.

1220. Pro nostro autem casu unica datur conditio, qua postremam formulam more solito tractare licet, scilicet, quando motus impressus ita est comparatus, ut angulus ϕ perpetuo quam minimus maneat, ad quod necesse est, ut etiam celeritas angularis initialis sit infinite quasi parva. Quoniam igitur tum erit $\sin\phi = \phi$ et $\cos\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi\phi$, postrema nostra aequatio induet hanc formam: $dt = \frac{d\phi \surd (kk + cc\phi\phi)}{\surd (\zeta\zeta kk - 2gc\phi\phi)}$, ubi in numeratore particula $cc\phi\phi$ prae kk negligi tuto potest, ita ut sit $dt = \frac{kd\phi}{\surd (\zeta\zeta kk - 2gc\phi\phi)}$, quae, posito $2gc = nnkk$, praebet $dt = \frac{d\phi}{\surd (\zeta\zeta - nn\phi\phi)}$, cujus integrale est $t = \frac{1}{n} \text{A} \sin \frac{n\phi}{\zeta}$, unde convertendo fit $\frac{n\phi}{\zeta} = \sin nt$, sive $\frac{\phi \surd 2gc}{\zeta k} = \sin t \frac{\surd 2gc}{k}$, ideoque $\phi = \frac{\zeta k}{\surd 2gc} \sin t \frac{\surd 2gc}{k}$.

1221. Hoc scilicet integrale ita est sumtum, ut initio quo erat $t = 0$, etiam angulus ϕ evanescat; hoc igitur casu patet, quoniam sinus angulorum non ultra ± 1 increscere possunt, angulum nostrum ϕ ad summum evadere

evadere posse $\pm \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}$, unde cum ζ per hypothesin sit quasi infinite parva, globus ultro citroque circa situm initialem excursiones quam minimas absolvet, quem motum olim vacillatorium vocavi eumque determinavi. Ex praesenti autem formula cum initio fuisset $\phi = 0$, ad eundem valorem revertetur quoties fuerit $\sin \frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 0$. Quod si ergo statuamus $\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 180° = \pi$, fiet $t = \frac{k\pi}{\sqrt{2gc}}$, hocque tempore singulae oscillationes seu vacillationes absolventur; neque vero hic motus progressivus, quo centrum gravitatis G moveri assumsimus, aliquid turbat in isto motu vacillatorio.

CASUS II.

1222. Praeterea vero datur adhuc alius casus, quo calculum evolvere licet, qui locum habet, si intervallum C fuerit quam minimum, sive centrum gravitatis G valde parum a centro globi C distet; tum enim loco formulae $\sqrt{(kk + cc \sin\phi^2)}$ scribere licebit $k + \frac{cc}{2k} \sin\phi^2$, ita ut habemus $dt = \frac{d\phi}{\sqrt{(\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos\phi))}} (k + \frac{cc}{2k} \sin\phi^2)$. Iam ut etiam denominator tractabilis reddatur, sumatur ζ ita, ut sit $\zeta\zeta kk = 8gc$, ideoque $\zeta = \frac{\sqrt{8gc}}{k}$, quae est celeritas angularis globo initio impressa, tum igitur fiet $\sqrt{(\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos\phi))} = \sqrt{(4gc(1 + \cos\phi))} = \cos\frac{1}{2}\phi \sqrt{8gc}$. Hoc igitur modo habebimus hanc aequationem:
$dt\sqrt{8gc} = \frac{d\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi} (k + \frac{cc}{2k} \sin\phi^2)$, quae jam ob omni irrationalitate est liberata.

1223. Ad hanc aequationem commodius tractandam statuatur $\frac{1}{2}\phi = 90° - \omega$, ut sit $\phi = 180° - 2\omega$ et $\sin\phi = \sin 2\omega = 2 \sin\omega \cos\omega$, hincque nanciscemur hanc formulam integrandam:

$$dt\sqrt{8gc} = -\frac{2d\omega}{\sin\omega} (k + \frac{2cc}{k} \sin\omega^2 \cos\omega^2), \text{ sive}$$

$$dt\sqrt{2gc} = -\frac{kd\omega}{\sin\omega} - \frac{2cc}{k} d\omega \sin\omega^2 \cos\omega^2$$

cujus

$$\int d\phi \sin\phi^2 = \int \frac{d\phi}{2}(1 - \cos 2\phi) = \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{4}\sin 2\phi,$$

similique modo

$$\int d\phi \sin\tfrac{1}{2}\phi^2 = \int \frac{d\phi}{2}(1 - \cos\phi) = \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}\sin\phi,$$

obtinebimus integrando

$$2nt\sqrt{gc} = k\phi + \frac{cc}{2k}(\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{4}\sin 2\phi) + \frac{k}{nn}(\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}\sin\phi)$$

$$= \phi\left(k + \frac{cc}{4k} + \frac{k}{2nn}\right) - \frac{cc}{8k}\sin 2\phi - \frac{k}{2nn}\sin\phi,$$

ex qua aequatione pro quovis angulo ϕ tempus respondens t facile definitur. At si ad quodvis tempus t angulus ϕ desideretur, ea reductione est utendum, qua in theoria planetarum anomalia vera ex media definiri solet. Hic igitur patet globum quotcunque revolutiones integras absolvere posse, quoniam nihil impedit quominus angulus ϕ in infinitum augeatur, simul vero semper cum hoc motu junctus esse poterit motus horizontalis quicunque uniformis. Ita si tempus desideremus, quo una revolutio integra absolvitur, statuatur $\phi = 360° = 2\pi$, atque reperietur $t = \frac{\pi}{n\sqrt{gc}}\left(k + \frac{cc}{4k} + \frac{k}{2nn}\right)$, atque adeo semisse hujus temporis dimidias revolutiones absolvet, quia posito $\phi = \pi$, etiam ambo posteriores termini evanescent.

1229. Quanquam centrum globi C eandem semper a plano horizontali servat distantiam, et in linea recta progreditur, ejus tamen motus non erit uniformis, quoniam celeritas horizontalis centri gravitatis perpetuo manet eadem; interea autem centrum gravitatis G circa C simili fere modo revolvetur, quo planetae circa solem in orbitis suis circumferuntur; in quo motu profundissimus situs puncti G perihelio, altissimus vero aphelio respondet. Primum enim membrum formulae nostrae pro tempore t inventae angulum ϕ continens motum medium repraesentabit, ambo vero membra sequentia inaequalitates continent, et quasi excentricitatem involvunt. Hinc etiam casus praecedens, quo tempus unius revolutionis erat infinitum, motui cometae in Parabola similis erit censendus.

II. DE

II. DE PROVOLUTIONE PERFECTA NOSTRI GLOBI ACCEDENTE FRICTIONE.

1230. Supra jam vidimus ad provolutionem perfectam requiri, ut perpetuo sit $ds = ad\phi$; quam ob causam in nostris aequationibus statim statuamus $ds = ad\phi$, atque eliminata pressione Π videndum est, quantum valorem littera λ sit adeptura; quamdiu enim iste valor non superabit $\frac{1}{3}$, tamdiu provolutio perfecta locum habere poterit. Commodissime autem iste valor λ colligetur, si aequatio tertia per primam dividatur, tum enim prodibit $\frac{kkdd\phi}{ddx} = -a + c\cos\phi + \frac{c}{\lambda}\sin\phi$, ubi si loco ddx ejus valor supra assignatus substituatur, propter $dds = add\phi$, habebimus: $\frac{kkdd\phi}{add\phi - cdd\phi\cos\phi + cd\phi^2\sin\phi} = -a + c\cos\phi + \frac{c}{\lambda}\sin\phi$, ex qua aequatione facillime judicium circa litteram λ petetur.

1231. Pro motu autem ipso determinando utamur ea aequatione, quam supra, ubi ambas quantitates Π et λ simul exterminavimus, sumus adepti, quae ponendo $dds = add\phi$ erat $add\phi(a - c\cos\phi) + dd\phi(cc - ac\cos\phi + kk) + acd\phi^2\sin\phi = -2cgdt^2\sin\phi$, quae reducitur ad hanc formam: $(aa + cc + kk)dd\phi - 2acdd\phi\cos\phi + acd\phi^2\sin\phi = -2cgdt^2\sin\phi$, quae per $2d\phi$ multiplicata sponte fit integrabilis, integrale enim erit $(aa + cc + kk)d\phi^2 - 2acd\phi^2\cos\phi = 4gdt^2(C + c\cos\phi)$, ubi constantem C ex circumstantiis quas consideratio frictionis suppeditabit, determinari conveniet.

1232. Nunc igitur judicium circa litteram λ instituamus, ubi ante omnia loco $dd\phi$ ejus valorem per differentialia primi gradus substituamus, qui ex praecedenti aequatione prodit $dd\phi = \frac{-(2cgdt^2 + acd\phi^2)\sin\phi}{aa + cc + kk - 2ac\cos\phi}$, ubi si loco $2gdt^2$ scribatur valor ex aequatione integrata, reperiemus:

$$dd\phi = \frac{-cd\phi^2\sin\phi}{2(C + c\cos\phi)} - \frac{acd\phi^2\sin\phi}{aa + cc + kk - 2ac\cos\phi},$$ unde fit

$$add\phi - cdd\phi\cos\phi + cd\phi^2\sin\phi = \frac{cd\phi^2\sin\phi(2C + 3c\cos\phi - a)}{2C + 2c\cos\phi}$$

$$-\frac{ac(a - c\cos\phi)d\phi^2\sin\phi}{aa + cc - kk - 2ac\cos\phi};$$ hinc pro aequatione §. 160. allata membrum ad sinistram partem sequentem induet formam

$$-\frac{\frac{ckk\sin\phi}{a(C+c\cos\phi)}-\frac{ackk\sin\phi}{aa+cc+kk-2ac\cos\phi}}{\frac{c\sin\phi(aC+3ac\cos\phi-a)}{2C+2c\cos\phi}-\frac{ac(a-c\cos\phi)\sin\phi}{aa+cc+kk-2ac\cos\phi}}\ \text{sive}$$

$$-\frac{ckk\sin\phi(aa+cc+kk-2ac\cos\phi)-2(C+c\cos\phi)ackk\sin\phi}{c\sin\phi(2C+3c\cos\phi-a)(aa+cc+kk-2ac\cos\phi)-(2C+2c\cos\phi)ac(a-c\cos\phi)\sin\phi}$$

cui ergo fractioni aequari debet membrum ad dextram positum $-a+c\cos\phi+\frac{c}{\lambda}\sin\phi$; fractio autem illa reducitur ad hanc commodiorem:

$$-\frac{kk(aa+cc+kk+2aC)}{kk(3c\cos\phi+2C-a)+2Cc(c-a\cos\phi)-a^3+3aac\cos\phi-acc(1+4\cos\phi^2)+3c^3\cos\phi}.$$

1233. Ponamus brevitatis gratia hanc fractionem $=S$, et aequatio pro dijudicando valore λ erit $S+a-c\cos\phi=-\frac{c}{\lambda}\sin\phi$, unde fit $\lambda=\frac{c\sin\phi}{S+a-c\cos\phi}$; ex quo patet, si fiat vel $\phi=0$ vel $\phi=180^\circ$, fore $\lambda=0$, quibus ergo casibus nullum est periculum, quin frictio sufficiat attritui impediendo. Examinari igitur convenit casus, quibus fit vel $\phi=90^\circ$ vel $\phi=270^\circ$; sit igitur $\phi=90^\circ$ ut sit $\cos\phi=0$, erit

$$S=-\frac{kk(aa+cc+kk+2aC)}{kk(2C-a)+2Ccc-a^3-acc}\ \text{hincque}\ \lambda=\frac{c}{S+a};$$

altero vero casu quo $\phi=270^\circ$ et $\sin\phi=-1$, fiet

$$S=-\frac{kk(aa+cc+kk+2aC)}{kk(2C-a)+2Ccc-a^3-acc}\ \text{et}\ \lambda=-\frac{c}{S+a}.$$

Dummodo ergo constans C fuerit ita comparata, ut ista formula $S+a$ major evadat quam $3c$, provolutio perfecta subsistere poterit. Quoniam vero vix alios casus evolvere licet, nisi in quibus intervallum c prae a et k fuerit quam minimum, neglectis altioribus ipsius c potestatibus, habebimus pro postremis casibus $S=-\frac{kk(aa+kk+2aC)}{kk(2C-a)-a^3}$, hincque $S+a=\frac{(aa+kk)^2}{a^3-kk(2C-a)}$; quae formula si ponatur $=mc$, ut sit $m>3$, habebimus $C=\frac{mca^3+mackk-(aa+kk)^2}{2mckk}$ vel etiam commode uti licebit

bit hac formula $\lambda = \frac{c(a^3 + akk - 2Ckk)}{(aa + kk)^2}$, ex qua intelligitur nisi constans C praemagnam habeat quantitatem, hunc valorem nunquam terminum $\frac{1}{3}$ esse superaturum, propterea quod c supponitur quam minimum.

1234. Quod si ergo frictio sufficit ad provolutionem perfectam producendam, relatio inter angulum φ et tempus t hac exprimetur aequatione $d\varphi^2 (aa + cc + kk) - 2acd\varphi^2 \cos\varphi = 4gdt^2 (c \cos\varphi + C)$, unde fit $2dt\sqrt{g} = \frac{d\varphi\sqrt{(aa + cc + kk - 2ac\cos\varphi)}}{\sqrt{(C + c\cos\varphi)}}$, quae penitus diversa est ab ea, quam pro casu ubi nulla adest frictio invenimus, unde patet a frictione, etsi quam minima, naturam motus penitus immutari. Neque tamen hanc aequationem resolvere licet praeter eos casus quos in sectione praecedente tractavimus.

1235. Quo igitur hos duos casus facilius inter se comparare queamus, ponamus hic ut supra fecimus, primo motus initio, ubi erat $t = 0$, fuisse etiam $\varphi = 0$; tum vero celeritatem angularem $\frac{d\varphi}{dt} = \zeta$, unde, cum provolutio perfecta postulet ut sit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\varphi}{dt}$, necesse est ut initio fuerit $\frac{ds}{dt} = \zeta a$. Hinc igitur ad constantem C definiendam faciamus $\frac{d\varphi}{dt} = \zeta$ et $\varphi = 0$, unde nostra aequatio dabit: $\zeta\zeta(aa + cc + kk - 2ac) = \zeta\zeta((a - c)^2 + kk) = 4g(c + C)$ unde fit $4gC = \zeta\zeta((a - c)^2 + kk) - 4gc$; quo valore substituto erit in genere $\frac{d\varphi^2}{dt^2}(aa + cc + kk - 2ac\cos\varphi) = \zeta\zeta((a - c)^2 + kk) - 4gc(1 - \cos\varphi)$ unde elicimus $dt = \frac{d\varphi\sqrt{(aa + cc + kk - 2ac\cos\varphi)}}{\sqrt{[\zeta\zeta((a - c)^2 + kk) - 4gc(1 - \cos\varphi)]}}$, ubi notetur esse $a - c$ distantiae centri gravitatis a superficie globi.

DE MOTU VACILLATORIO.

1236. Ex hac aequatione primo deducamus motum vacillationis seu librationis, quo globus super plano horizontali rotabit, posquam ipsi mi-

nima inclinatio fuerit impressa, ita ut initio celeritas angularis ζ fuerit quam minima et angulus φ etiam quam minima, hincque $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi\varphi$. Quo autem nostram formulam magis contrahamus, ponamus brevitatis gratia $(a-c)^2 + kk = hh$, eritque $aa + cc + kk = hh + 2ac$, quo facto nostra aequatio induet hanc formam: $dt = \frac{d\varphi\sqrt{(hh + ac\varphi\varphi)}}{\sqrt{(\zeta\zeta hh - 2gc\varphi\varphi)}}$. Rejiciamus igitur in numeratore terminum $ac\varphi\varphi$, et in denominatore statuamus $2gc = nnhh$, ut obtineamus $dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{(\zeta\zeta - nn\varphi\varphi)}}$, cujus integrale est $t = \frac{1}{n} \text{ A sin } \frac{n\varphi}{\zeta} = \frac{h}{\sqrt{2gc}} \text{ A sin } \frac{\varphi\sqrt{2gc}}{\zeta h}$, ideoque $\varphi = \frac{\zeta h}{\sqrt{2gc}} \sin \frac{t\sqrt{2gc}}{h}$; hinc igitur intelligimus globum super plano horizontali omnino simili modo librationes peragere, quo pendula oscillari solent; ubi tempus unius librationis reperietur ponendo angulum $\frac{t\sqrt{2gc}}{h} = \pi$, unde fit tempus cujusque librationis $= \frac{\pi h}{\sqrt{2gc}}$. Cum igitur tempus unius oscillationis penduli simplicis, cujus longitudo $= l$, sit $= \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, longitudo penduli simplicis isochroni cum nostris oscillationibus erit $\frac{hh}{c}$, ideoque $l = \frac{(a-c)^2 + kk}{c}$. Supra autem, remota frictione, prodiisset longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{kk}{c}$.

1237. Ex hac ergo comparatione manifestum est, ob frictionem motum libratorium non mediocriter minui, idque in ratione $k : \sqrt{((a-c)^2 + kk)}$. Nisi ergo fuerit $a - c = 0$, quo casu centrum gravitatis in superficiem incideret, ob frictionem motus libratorius semper retardatur. Praeterea vero utroque casu oscillationes eo erunt lentiores, quo propius centrum gravitatis G ad centrum globi C accesserit; si enim fiat intervallum $CG = c = 0$, utroque casu longitudo penduli simplicis fit infinita.

1238. Istae autem determinationes non solum ad globos adstringuntur, sed etiam ad omnis generis corpora, quae super plano horizontali motum vacillatorium recipere valent, extendi possunt. Sit enim
Fig. 154. PRQ corpus quodcunque, quod super plano horizontali IO instar cunarum

tum motum reciprocum recipere valeat, ob basin suam in puncto contactus R incurvatam; sitque centrum hujus curvaturae in C, ac ponatur altitudo CR $= a$; tum vero sit G centrum gravitatis totius corporis, dum in statu quietis versatur, ac ponatur intervallum CG $= c$, ut sit GR $= a - c$. Praeterea vero posito hujus corporis pondere $=$ P, sit ejus momentum inertiae respectu axis per G transeuntis $=$ Pkk, quippe circa quem axem corpus inter nutandum gyrari est censendum. Quibus positis, si nulla plane adesset frictio, tempus cujusque vacillationis foret $= \frac{\pi k}{\sqrt{2gc}}$ sec.; accedente autem frictione vel minima, hoc tempus subito fiet $= \frac{\pi \sqrt{((a-c)^2 + kk)}}{\sqrt{2gc}}$, atque hinc ea quae olim de talibus motibus sum commentatus, necessariam illustrationem adipiscuntur; ubi imprimis observari oportet, ipsam frictionis quantitatem hic non in computum ingredi, atque eundem effectum esse proditurum, dummodo frictio non plane evanescat.

1239. Quod porro ad eos binos casus attinet, quos supra remota omni frictione evolvimus, ubi intervallum c quam minimum fuit assumtum, omnia motus phaenomena etiam accedente frictione simili quoque modo definientur; formulae enim huc pertinentes a superioribus in hoc potissimum discrepabunt, quod hic loco quantitatis k scribi oporteat $h = \sqrt{((a-c)^2 + kk)}$; quamobrem etiam isti motus lentiores erunt quam casu supra tractato. Haec igitur fere sunt omnia quae circa hujusmodi motus globi heterogenei per calculum definire licet.

1240. Coronidis loco adjungam Theorema memoratu dignum circa triplicem motum oscillatorium, quo corpora, qualia in §. 168. sunt descripta, agitari possunt.

THEOREMA.

Si habeatur corpus quodcunque PRQ, basi circulari seu sphaerica in R praeditum, cujus centrum sit in C, et centrum gravitatis in G, ejus vero massa seu pondus fuerit $=$ P; in eo triplex motus oscillatorius considerari potest: I°. Si hoc corpus circa axem horizontalem per C transeuntem more penduli libere oscilletur; tum pendulum simplex isochronum reperietur; si momentum inertiae hujus corporis respectu axis C sumtum dividatur per productum P . CG. II°. Si idem corpus plano politissimo horizontali IO in R incumbens, vacillationes minimas peragat, ita ut nullam

lam plane sentiat frictionem; tum pendulum simplex isochronum reperietur, si momentum inertiae respectu axis horizontalis per ipsum centrum gravitatis G transeuntis dividatur per idem productum P. CG. — III°. Si idem corpus plano horizontali IO utcunque aspero in R incumbens vacillationes absolvat; tum longitudo penduli simplicis isochroni reperietur, si momentum inertiae respectu puncti contactus R sumtum per productum P in CG dividatur.

Veritas hujus Theorematis pro parte prima ex motu pendulorum est manifesta: si enim ponatur intervallum $CG = c$, et momentum inertiae respectu centri gravitatis $= Pkk$, tum vero radius curvaturae $CR = a$, notum est fore longitudinem penduli simplicis isochroni $l = \frac{cc + kk}{c}$; at pro casu secundo ex supra traditis elucet fore $l = \frac{kk}{c}$; et pro casu tertio $l = \frac{(a - c)^2 + kk}{c}$.



CAPUT VII.

DE MOTU PENDULI CIRCA AXEM CYLINDRICUM, FULCRO DATAE FIGURAE INCUMBENTEM, MOBILIS: HABITA FRICTIONIS RATIONE.



1241. In praecedente dissertatione, ubi motum penduli circa axem cylindricum dato fulcro incumbentem determinavimus, animum penitus ab omni frictione abstraximus, ita ut axis super fulcro liberrime sine ullo impedimento prorepere queat: quod cum in praxi nunquam usu venire possit, quaeramus hic, qualis effectus in motu hujusmodi pendulorum a frictione produci debeat; ubi quidem nostram investigationem ad oscillationes tantum quamminimus restringemus.

1242. Sit igitur ut ante NAM figura fulcri saltem circa punctum imum A circularis, cujus centrum sit in O, unde ducatur recta verticalis OAG ac dicatur radius $AO = a$. Iam elapso tempore quocunque t pendulum nostrum ejusmodi teneat situm, ut ejus axis cylindricus fulcro incumbat in puncto a, unde per centrum ejus axis c, agatur recta acO, quippe quae per ipsum punctum O transibit, voceturque radius $ac = b$, ita ut intervallum $Oc = a - b = e$, angulum vero AOa ponamus $= \vartheta$; in hoc porro statu penduli ejus centrum gravitatis erit in puncto g, ex quo per centrum axis c ducta recta gch, occurrat rectae verticali OA in puncto h, maneatque ut ante distantia $cg = c$, angulus vero obliquitatis $Ghg = \varphi$. Denique, denotante M massam seu pondus totius penduli, exprimat Mkk momentum inertiae omnis materiae pendulum constituentis, respectu axis per ipsum punctum g ducti et axi cylindrico paralleli. Fig. 155.

1243. His positis, si ex puncto g ad verticalem OG ducatur normalis gp, vocenturque intervalla $Op = x$ et $pg = y$, ea per binos angulos $AOa = \vartheta$ et $Ahg = \varphi$ ita exprimentur, ut sit $Op = x = e\cos\vartheta + c\cos\varphi$ et $pg = y = e\sin\vartheta + c\sin\varphi$. Quare si isti anguli fuerint quasi infinite parvi, quemadmodum in oscillationibus minimis evenire necesse est, erit $x = e + c$ et $y = e\vartheta + c\varphi$, atque ex praecedentibus satis liquet fore pressionem, qua axis cylindricus fulcrum in puncto a premit, ipsi ponderi totius penduli aequalem, ideoque $= M$, unde fulcrum pari vi M in puncto a axem cylindricum in directione acO reagere est censendum, dum totum pondus penduli M ipsi centro gravitatis g in directione verticali applicatum est intelligendum.

1244. Hae autem erant duae vires, quibus pendulum, remota omni frictione, in superiori dissertatione sollicitari consideravimus, et ex quarum actione universum motum determinavimus. Nunc autem, accedente frictione, tertia quaedam vis insuper adjici debebit, a frictione oriunda, quae suum effectum exerit in ipso puncto contactus a, ubi scilicet axis cylindricus fulcro incumbit. Constat autem quantitatem frictionis certae cuipiam parti totius pressionis, veluti parti tertiae, aequalem aestimari posse; unde cum pressio in puncto a sit $= M$, statuamus ipsam frictionem $= \lambda M$, ita ut plerumque sit $\lambda = \frac{1}{3}$, siquidem frictio totum suum effectum exerat, id quod evenit, quando axis cylindricus super fulcro revera prorepit, idque radit. Quare si ponamus axem cylindricum super fulcro secundum directionem aN prorepere, frictio aget secundum directionem oppositam aA, eritque idcirco ad rectam acO normalis; haec

igitur est tertia illa vis praeter binas vires ante descriptas in calculum introducenda.

1245. Quia jam observavimus, frictionem tum demum totum suum effectum exerere, quando revera fit attritus, sive punctum A super fulcro promovetur; ante omnia nobis videndum est, quanta celeritate punctum contactus a super fulcro procedat. Hunc in finem in ipsam celeritatem, qua punctum a profertur, inquiramus. Ac primo quidem patet, si nullus adesset motus penduli angularis, hoc est, si celeritas angularis esset $\frac{d\phi}{dt} = 0$, tum motum puncti a aequalem fore motui puncti c, quod cum circa O proferatur celeritate $= \frac{ed\vartheta}{dt}$, eadem celeritate quoque punctum a versus N proferri est censendum. At vero ob motum angularem ipsius penduli, cujus celeritas est $\frac{d\phi}{dt}$, punctum a insuper circa punctum c proferetur, etiam versus N, celeritate $= \frac{bd\phi}{dt}$, ita ut tota celeritas, qua in puncto a fit attritus, sit $= \frac{ed\vartheta + bd\phi}{dt}$, quae ergo expressio nisi fuerit evanescens, frictio totum suum effectum $= \lambda M$ in directione aA exeret.

1246. Facile autem perspicitur, hunc casum cum nostra hypothesi, qua oscillationes infinite parvas statuimus, nullo modo consistere posse. Quoniam enim omnes motus sunt tardissimi, si talis vis in directione aA adesset, cujus quantitas foret circiter $= \frac{1}{5}$M, omnis motus quasi in instanti subito extingueretur totumque pendulum ad statum quietis redigeretur; quamobrem ut motus oscillatorius locum habere possit, omnino necesse est, ut formula $\frac{ed\vartheta + bd\phi}{dt}$ perpetuo maneat nihilo aequalis, id quod evenire nequit, nisi ipsa formula finita $e\vartheta + b\phi$ fuerit vel nulla, vel constans; quia autem per se est infinite parva, statui poterit $e\vartheta = -b\phi$, sive $\vartheta = -\frac{b\phi}{e}$, ita ut angulus ϑ in contrariam partem vergere debeat.

1247. Admissa igitur frictione alius motus oscillatorius locum habere nequit, nisi axis cylindricus in regionem contrariam versus M recedat, dum motus gyratorius fit versus alteram plagam N. Hoc scilicet casu axis cylindricus super fulcro volvendo procedet, ita ut nullus attritus sese exerere possit; unde si recta cg circulum minorem secet in α, in quo puncto pendulum ipso initio incubuit puncto A, evidens est arcum $A\alpha$ aequalem fore arcui $a\alpha$; unde cum isti arcus sint quasi infinite parvi, manifestum est, Fig. 156. rectam cg perpetuo per ipsum punctum A esse transituram, id quod etiam inde patet, quod sit $e\vartheta = - b\phi$. Quia enim in triangulo OAc est angulus $AOc = - \vartheta$; et angulus $OAc = \phi$, ob hos angulos infinite parvos erit $- \vartheta : \phi = Ac : Oc$; est vero $Ac = \alpha c$, ob spatiolum $A\alpha$ evanescens, et $Oc = e$; utique ergo erit $- e\vartheta = b\phi$.

1248. Quoniam igitur hoc motu omnis attritus cessat, etiam frictio totam suam vim, quam aestimavimus $= \frac{1}{3} M$, neutiquam exeret, sed quovis momento tantilla solum vi aget, quanta praecise opus est ad attritum avertendum. Hinc igitur vis, quam frictio revera exeret, quam constanter ponamus $= \lambda M$, erit quantitas variabilis quam minima atque inde definienda, ut nullus oriatur attritus, sive ut perpetuo maneat $e\vartheta + b\phi = 0$. Probe scilicet hic est animadvertendum, etiamsi revera nullus adsit attritus, tamen ideo frictionem non omni vi esse destitutam, sive penitus otiosam, sed ejus effectum in eo consumi, ut attritus omnis impediatur, sive ut ista aequalitas $e\vartheta + b\phi = 0$, perpetuo conservetur.

1249. Resumamus autem figuram praecedentem; quoniam ad eam jam supra motus determinationem accommodavimus, id quod utique fieri licet, dummodo notetur perpetuo esse $e\vartheta + b\phi = 0$, sive $\vartheta = - \frac{b\phi}{e}$. Nunc igitur praeter binas vires superiores, pressionem scilicet in puncto contactus a et totum penduli pondus, insuper tertiam vim adjungi oportet $= \lambda M$, in directione aO agentem, quae resoluta dabit vim horizontalem $= \lambda M \cos\vartheta = \lambda M$ et verticalem deorsum tendentem $= \lambda M \sin\vartheta = \lambda M\vartheta$. Praeterea vero hujus vis momentum respectu puncti g erit $= \lambda M (c - b)$, quae tendet ad motum angularem augendum. Transferamus igitur primo omnes has vires in ipsum punctum g, ubi vires verticales se mutuo destruere debebunt, ob $Op = x = e + c$, ideoque constans; quod etiam inde patet, quod vis gravitatis deorsum tendens sit $= M$; pressio sursum urgens M; ex frictione autem oriatur vis verticalis

 =

$= \lambda M\vartheta$, quae, ob λ pariter infinite parvum, negligi potest. Vires autem horizontales hinc oriundae et motui contrariae erunt $- M\vartheta - \lambda M$, unde oritur ista aequatio: $\frac{Mddy}{2gdt^2} = - M\vartheta - \lambda M$, sive $\frac{edd\vartheta + cdd\varphi}{2gdt^2} = - \vartheta - \lambda$.

1250. Pro motu autem gyratorio, pressio in $a = M$ dederat momentum motui contrarium $M(\varphi - \vartheta)e$: nunc autem frictio praebet momentum accelerans $= \lambda(c - b)M$, unde principia motus suppeditant hanc aequationem:

$$\frac{Mkkdd\varphi}{2gdt^2} = \lambda(c - b)M - M(\varphi - \vartheta), \text{ sive}$$

$$\frac{kkdd\varphi}{2gdt^2} = \lambda(c - b) - e(\varphi - \vartheta),$$

quae porro divisa per $c - b$ dat, $\frac{kkdd\varphi}{2g(c - b)dt^2} = \lambda - \frac{e(\varphi - \vartheta)}{c - b}$, cui aequationi si addatur ante inventa, quantitas incognita λ ex calculo elidetur, atque totus motus hac unica aequatione exprimetur: $\frac{edd\vartheta + cdd\varphi}{2gdt^2} + \frac{kkdd\varphi}{2g(c - b)dt^2} = - \vartheta - \frac{e\varphi + e\vartheta}{c - b} = \frac{b\vartheta - e\varphi}{c - b}$.

1251. Cum hac autem aequatione conjungi debet conditio principalis ante descripta, qua esse debet $\vartheta = - \frac{b\varphi}{e}$, unde fit $dd\vartheta = - \frac{bdd\varphi}{e}$, quibus valoribus substitutis aequatio inventa hanc induet formam: $\frac{(c - b)dd\varphi}{2gd^2} + \frac{kkdd\varphi}{2g(c - b)dt^2} = - \frac{\varphi(bb + ce)}{e(c - b)}$, haec per $c - b$ multiplicata praebet: $\frac{((c - b)^2 + kk)dd\varphi}{2gdt^2} = - \frac{\varphi(bb + ce)}{e}$, quae unicam variabilem φ, praeter tempus t involvit, ac manifesto motum oscillatorium regularem indicat. Quodsi enim brevitatis gratia ponamus

mus $\frac{ekk + e(c-b)^2}{bb+ce} = h$, haec forma simplex resultabit: $\frac{hdd\varphi}{2gdt^2} = -\varphi$, cujus integratio nobis largitur hunc valorem: $\varphi = \alpha \sin(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta)$; unde patet, hujus penduli motum perfecte conformem futurum esse oscillationibus penduli simplicis, cujus longitudo $h = \frac{e(kk+(c-b)^2)}{bb+ce}$, sive singulae oscillationes absolventur tempore $t = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$ min. secund.

1252. Cum igitur, semota frictione, hujusmodi pendula infinitis diversis modis ad motus oscillatorios tam regulares quam irregulares concitari queant, maxime memorabile est, quod ob frictionem omnes istae diversae motuum species ad unicam, eamque regularem, redigantur; quandoquidem oscillationes hinc oriundae omnino congruent cum oscillationibus penduli simplicis, cujus longitudo est $h = \frac{e(kk+(c-b)^2)}{bb+ce}$, quae quantitas quemadmodum ex elementis pendulum constituentibus componatur, accuratius perpendisse juvabit.

1253. Consideremus igitur nostrum pendulum in statu quietis, quoniam uniusmodi tantum motu oscillatorio cieri potest, sitque O centrum curvaturae fulcri MAN, ex quo ducta verticali OAG, posuimus radium curvaturae fulcri OA $= a$. Axis cylindricus penduli incumbat fulcro in ipso puncto A, cujus radius positus est CA $= b$; tum vero sit ut supra intervallum OC $= a - b = e$, centrum autem gravitatis totius penduli versetur in puncto G, existente intervallo CG $= c$. Praeterea posito pondere totius penduli $=$ M, ejus momentum inertiae respectu puncti G vocavimus $=$ Mkk. Haec sunt elementa statum penduli propositi constituentia, ex quibus ergo, uti vidimus, longitudo penduli simplicis isochroni h ita formatur, ut sit $h = \frac{e(kk+(c-b)^2)}{bb+ce}$, cujus expressionis naturam propius examinemus. Fig. 157.

1254. Cum momentum inertiae totius penduli, respectu axis per ipsum centrum gravitatis G ducti, sit $=$ Mkk, ob distantiam AG $= c - b$

 erit

erit ejusdem momentum inertiae respectu axis per ipsum punctum A ducti $= Mkk + M(c-b)^2$, quod si brevitatis gratia ponatur $= Mff$, ut sit $ff = kk + (c-b)^2$, erit longitudo penduli simplicis isochroni $h = \frac{eff}{bb+ce}$; ad quam expressionem ulterius evolvendam ducamus ex puncto O tangentem axis cylindrici OT, et ex T ad rectam verticalem agamus normalem TP, et quia triangulum OCT ad T est rectangulum, ideoque simile triangulo CTP, erit OC : CT = CT : CP, hoc est $e : b = b : CP$, ideoque $CP = \frac{bb}{e}$; quare cum sit $CG = c$, erit intervallum $GP = \frac{bb+ce}{e}$. Introducto igitur hoc intervallo GP, erit $h = \frac{ff}{GP}$, quae ergo expressio satis simplex exhibet longitudinem penduli simplicis isochroni.

1255. Hic assumsimus centrum curvaturae fulcri O supra circulum, qui basin axis cylindrici refert, cadere; sin autem illud punctum O intra hunc circulum caderet, attamen supra ejus centrum C, ut jam esset CO
Fig. 158. $= e$, tum ex O ducta applicata OT, ex T agatur tangens istius circuli TP, rectae verticali occurrens in P; et quia triangula OCT et CTP denuo sunt similia, erit CO : CT = CT : CP, hoc est $e : b = b : CP$, ita ut sit $CP = \frac{bb}{e}$, quamobrem hoc casu longitudo penduli isochroni erit $h = \frac{ff}{GP}$, ut ante. Ex quo patet puncta O et P inter se permutari posse, simulque intelligitur, hoc posteriori casu, quo GP majorem obtinet valorem, oscillationes fore frequentiores, quam casu praecedenti.

1256. Quodsi punctum O in ipsum centrum C incidat, punctum P in infinitum removebitur, fietque $h = 0$ id quod etiam inde patet, quod sit $e = 0$. Manifestum autem est hoc casu cavitatem fulcri accurate excipere axem cylindricum, eumque propterea immotum retineri, ita ut nullae plane oscillationes fieri queant. Sin autem punctum O intra centrum C versus A cadat, ita ut curvatura fulcri minor foret quam curvatura axis cylindrici, tum cylindrus nequidem fulcro incumbere posset, sicque omnis motus oscillatorius prorsus tolleretur.

1257. At vero si punctum O infra A cadat, fulcrum superne convexum esset futurum, et quantitas e evaderet negativa. Ponatur igitur pro hoc

hoc casu $c = -i$ fietque $h = -i \frac{(kk+(c-b)^2)}{bb-ci}$, sive $h = i \frac{(kk+(c-b)^2)}{ci-bb}$, qui ergo valor, quoties fuerit $bb > ci$, erit negativus, ideoque nullus plane motus oscillatorius contingere posset, sed potius axis cylindricus super tali fulcro delaberetur, simulac minimus motus ipsi tribueretur.

1258. Consideremus igitur casum, quo fulcrum superne est convexum, cujus centrum curvaturae cadat in O, ita ut jam sit $CO = i$, existente $CG = c$. Ex O ducatur tangens axis cylindrici OT, et ex T ducta horizontali TP, evidens est fore $CP = \frac{bb}{i}$, ideoque $c - \frac{bb}{i} = GP$. Quare cum etiamnunc sit $ff = kk + (c-b)^2$, longitudo penduli simplicis isochroni hoc casu erit $h = \frac{ff}{GP}$, quae ergo semper erit positiva, dummodo centrum gravitatis G non supra punctum P ascendat, id quod in motu vacillatorio seu nutatorio evenire posset. Prouti autem pendulum hic contemplamur, ut centrum gravitatis infra fulcrum cadat, motus semper oscillatorius realis sequetur, qui eo erit frequentior, quo majus fuerit intervallum GP. Fig. 159.

1259. His igitur in genere observatis operae pretium erit annotasse, si axis cylindricus omni crassitie careat, ita ut sit $b = 0$, tum longitudinem penduli simplicis isochroni fore $h = \frac{kk + cc}{c}$, ubi ob $CA = 0$ erit $AG = 0$, qui ergo casus manifesto convenit cum motu penduli ordinarii, quod ex puncto A esset suspensum, quandoquidem momentum inertiae respecta puncti A est $= M(kk + cc)$, quod divisum per $M \cdot AG$ secundum ea quae de motu pendulorum sunt tradita, semper longitudinem penduli simplicis isochroni exhibet.

1260. Hic immorari non opus esse censeo casui, quo totum penduli corpus supra pavimentum elevatur, ideoque etiam centrum gravitatis G: hoc enim casu ob frictionem orietur ipse ille motus vacillatorius, quem jam olim fusius sum perscrutatus, quippe cujus oscillationes ab ipsa frictione regulares reddentur. Praesens quidem investigatio multo latius patet, cum etiam ad pavimenta sive concava, sive convexa extendatur. Omnes autem variationes, quae hic occurrere possunt, ex ante expositis abunde

abunde elucescunt, si modo centrum gravitatis G supra A elevetur, ita ut superfluum foret huic argumento diutius immorari, si modo haec regula probe teneatur: quamdiu centrum gravitatis totius penduli G infra punctum illud P supra definitum incidat, tum semper motum oscillatorium oriri posse, et longitudinem penduli simplicis isochroni semper fore $h = \frac{ff}{gP}$, existente Mff momento inertiae totius massae penduli, respectu axis per punctum contactus A ducti; quando autem centrum gravitatis G supra punctum P incidit, tum pendulum nullum plane motum oscillatorium recipere posse, sed a minima inclinatione esse prolapsurum.



APPEN-

APPENDIX

DE

MOTU GLOBI CIRCA AXEM

OBLIQUUM QUEMCUNQUE GYRANTIS

ET

SUPER PLANO HORIZONTALI INCEDENTIS.

DE

MOTU GLOBI CIRCA AXEM

OBLIQUUM QUEMCUNQUE GYRANTIS

ET

SUPER PLANO HORIZONTALI INCEDENTIS.

1261. Cum in omnibus quae hactenus de motu globorum super planis sunt tradita alius motus gyratorius non sit consideratus, nisi qui fiat circa axem ad motus directionem normalem; quaestio superest maxime ardua: quomodo globus, cui circa axem quemcunque obliquum fuerit impressus motus gyratorius, super plano sit progressurus; quoniam principia, ex quibus hujusmodi motus determinari oportet, neutiquam adhuc satis sunt evoluta, ut ad quosvis casus, qui occurrere possint, applicari queant. Primus equidem haec principia in Tractatu meo de motu corporum solidorum seu rigidorum ista principia in lucem produxi, indeque plurima motus Phoenomena explicavi, quae principiis mechanicis vulgaribus prorsus erant inaccessa. Quin etiam in ultimo hujus libri capite hoc ipsum argumentum de globo super plano horizontali incedente, dum interea circa axem obliquum quemcunque gyratur, omnio studio sum perscrutatus. Verum quia hic liber in paucorum manibus versatur, ac ista ipsa tractatio plerisque Geometris etiamnunc videtur incognita; haud abs re fore arbitror, si totum hoc argumentum hic denuo in lucem protraxero, prouti in loco memorato est pertractatum, ubi quidem nonnullas dilucidationes, si opus fuerit visum, adjungam, quo universa Theoria globorum super plano horizontali utcunque propulsorum completa reddatur. In hac autem investigatione imprimis ad effectum frictionis est respiciendum, quandoquidem remota frictione globus perpetuo eundem motum tam progressivum quam gyratorium, sine ulla alteratione, esset conservaturus. Frictionem autem eodem modo in calculum introducam, quo hactenus a Geometris tractari est solita. Quanquam enim forte omnia frictionis symptomata nondum fuerint penitus perfecta: tamen ista tractatio inde nullam mutationem pati est censenda; quoniam

praecipuum negotium hic in evolutione abstrusissimorum principiorum mechanicae sublimioris et integratione plurium formularum differentialium alias difficillimarum absolvitur.

PROBLEMA 1.

1262. Si globus super plano horizontali utcunque tam motu progressivo quam gyratorio moveatur, determinare celeritatem et directionem, qua punctum contactus radit superficiem horizontalem.

SOLUTIO.

Fig. 160. Sit I centrum globi, simulque ejus centrum inertiae ejusque radius sit $= f$, et contactus fiat in puncto imo T, motus autem globi ita sit comparatus, ut centrum inertiae moveatur secundum directionem PIR celeritate $= v$, simul vero gyretur circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= \varepsilon$, in eum sensum, ut punctum T circa O incedat per arculum Tt, ac pro positione puncti O statuamus angulum $PTO = \vartheta$ et arcum $TO = s$, ubi quidem arcus ita sumo, quasi radius globi esset $= 1$. Ducatur TV ipsi PIR parallela, ac si motus gyratorius abesset, punctum contactus T rasurum esset planum horizontale celeritate v in directione TV. Deinde si globus solo motu gyratorio ferretur, punctum T per Tt moveretur celeritate $f\varepsilon \sin TO = f\varepsilon \sin s$, cujus directio cum sit horizontalis, in plano per rectam $T\Theta$ referatur, ita ut sit angulus $ST\Theta = PTt = \vartheta - 90°$, ob OTt rectum. Erit ergo $VT\vartheta = 270° - \vartheta$. Capiantur rectae TV $= v$ et $T\Theta = f\varepsilon \sin s$, et quia punctum T his duobus motibus conjunctim movetur, ejus verus motus fiet secundum rectam TF, diagonalem parallelogrammi $TVF\Theta$. Ex F ad TV ducta normali FH, erit $VH = f\varepsilon \sin s \sin \vartheta$ et $FH = -f\varepsilon \sin s \cos\vartheta$, ut sit $FH = v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta$ atque celeritas radens $TF = \surd (vv - 2f\varepsilon v \sin s \sin\vartheta + ff\varepsilon\varepsilon \sin s^2)$ et tang VTF $= \frac{-f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta}$. Ducatur ex centro I ipsi TF parallela IQ, erit arcus TQ quadrans, et angulus $RTQ = VTF$; quare si IQ sit directioni, secundum quam punctum T radit, parallela, erit tang PTQ $= \frac{f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin\vartheta}$, ac posita celeritate radente $\surd (vv - 2f\varepsilon v \sin s \sin\vartheta + ff\varepsilon^2 \sin s^2) = u$, erit $\sin PTQ = -\frac{f\varepsilon \sin s \cos\vartheta}{u}$ et $\cos PTQ = \frac{f\varepsilon \sin s \sin\vartheta - v}{u}$.

COROLL.

COROLL. 1.

1263. Fieri ergo potest, ut celeritas radens ideoque et attritus evanescat, quo casu hae duae aequationes locum habere debent: altera g sin s cos $\vartheta = 0$, altera vero $v = fg$ sin s sin ϑ. Unde statim patet, si nullus adsit motus progressivus, seu $v = 0$, nullum attritum affore si sin $s = 0$, hoc est si globus circa axem verticalem ZT gyretur.

COROLL. 2.

1264. Deinde motus globi ab attritu erit liber, si fuerit primo cos $\vartheta = 0$, seu angulus PTO rectus: deinde celeritas progressiva v ad angularem g hanc relationem tenere debet, ut sit $v = fg$ sin s, seu TV = TΘ, et angulus STΘ = 0.

COROLL. 3.

1265. Quando ergo globus hujusmodi motum est consecutus, quia sublato omni attritu etiam nulla adest frictio, globus eundem motum constanter conservabit, siquidem axis gyrationis IO habeat proprietatem axis principalis.

SCHOLION 1.

1266. Quemadmodum hic frictionem constituimus, ea non obstat, quominus globus super plano horizontali motum suum intemeratum conservari possit, quod tamen minime fieri observamus, cum globus super tabula tali motu latus mox omnem motum amittat, cujus rei caussa resistentiae aëris tribui nequit. Verum hic primum animadverto, experimenta Theoriae nunquam perfectissime congruere: veluti dum casu hic tractato assumsimus, contactum unico fieri puncto, id semper in praxi secus evenit. Interim tamen si arcus TO est quadrans et PTO = 90°, existente $v = fg$, etsi contactus non fiat in unico puncto, tamen attritus evanescit, ideoque haec motus extinctio frictioni neutiquam adscribi potest. Ex quo concludere debemus, praeter frictionem, uti hic eam definivimus, aliud adhuc dari motus impedimentum, dum corpora super superficiebus incedunt, a frictione probe distinguendum, cujus ratio utcunque fuerit comparata, ejus effectus potius seorsim investigari convenit, quam frictionis indolem hic stabilitam immutari. Et quemadmodum hic a resistentia aëris mentem abstrahimus ita etiam licebit hoc obstaculum frictionem concomitans a praesenti argumento sejungere.

SCHOLION. 2.

1267. Corpora hic sphaerica considero, in quorum centro situm sit ipsorum centrum inertiae I, quod ergo ipsum etiam in plano horizon-

 tali

tali moveatur, et puncto contactus T perpetuo verticaliter immineat; ex quo patet, pressionem in contactu semper fore ponderi corporis M aequalem. Si ergo corpus ex materia uniformi constaret, omnes ejus diametri proprietate axium principalium gauderent. Sed concipiamus materiae distributionem utcunque inaequabilem, ita tamen ut centrum inertiae cadat in centrum figurae: hocque pacto necesse erit in globo ternos axes principales considerari, qui ex centro I pertingant in puncta A, B, C, quadrantibus a se invicem distantia, quorum respectu sint momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Quamquam autem deinceps bina vel omnia haec momenta inter se aequalia statuemus, tamen conveniet tria hujusmodi puncta in superficie fixa notasse, quo ex eorum relatione ad spatium absolutum facilius motus globi definiri possit. Constitutis autem in globis his tribus punctis A, B, C, quoniam motus gyrationis circa O, quem in plagam Tt dirigi assumimus, sensum habet CBA, contrarium ei quem supra statuimus, in applicatione formularum generalium ad hunc casum celeritatem angularem ε ut negativam spectare debemus.

PROBLEMA 2.

1268. Si globus super plano horizontali utcunque moveatur, definire vires, quibus sollicitatur, earumque momenta respectu ternorum axium principalium globi.

SOLUTIO.

Fig. 161. Inclusus concipiatur globus Sphaerae vel fixae vel cum eo parem motum progressivum habenti, in qua Z sit punctum verticale ejusque oppositum T punctum contactus, DE vero sit diameter horizontalis ad certam mundi plagam tendens et DPQE circulus maximus horizontalis. Nunc autem elapso tempore t moveatur globus motu progressivo secundum directionem PI celeritate $= v$, ponaturque arcus DP, seu angulus DZP $= \phi$; axes autem principales nunc sint in A, B, C. Tum vero globus jam gyretur circa axem IO, celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ACB, sitque pro situ puncti O angulus PTO seu PZO $= \vartheta$ et arcus ZO $= s$. Etsi enim ante arcum TO posuimus $= s$, quia tantum ejus sinus in computum intrat, perinde est. Erit ergo angulus DZO $= \vartheta + \phi$ et EZO $= 180° - \vartheta - \phi$. Deinde a punctis A, B, C tam ad O quam ad Z arcus circulorum maximorum ducti concipiantur, sintque hi arcus AO $= \alpha$, BO $= \beta$, CO $= \gamma$; ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$ et anguli EZA $= \lambda$, EZB $= \mu$, EZC $= \nu$. In praecedente autem problemate ostendimus, punctum contactus T planum subjectum radere secundum directionem radio IQ parallelam

Ielam celeritate $= \surd(vv - 2fgv \sin s \sin\vartheta + ffgg \sin s^2)$, foreque $\tang PTQ = \tang PZQ = \frac{fg \sin s \cos\vartheta}{v - fg \sin s \sin\vartheta}$, denotante f radium globi. Cum igitur pressio in T sit $= M$, frictio erit $= \delta M$, quae puncto T est applicata secundum directionem ipsi QI parallelam. Hac ergo vi resoluta secundum directiones axium principalium IA, IB, IC, prodibunt ternae vires, quae in puncto T applicatae sunt concipiendae, ex quibus porro colliguntur sequentia momenta:

Respectu axis IA in sensum BC:

$$-\delta Mf \cos CQ \cos BT + \delta Mf \cos BQ \cos CT = P.$$

Respectu axis IB in sensum CA:

$$-\delta Mf \cos AQ \cos CT + \delta Mf \cos CQ \cos AT = Q.$$

Respectu axis IC in sensum AB:

$$-\delta Mf \cos BQ \cos AT + \delta Mf \cos AQ \cos BT = R,$$

erunt ergo haec tria momenta:

$$P = \delta Mf (\cos m \cos CQ - \cos n \cos BQ)$$
$$Q = \delta Mf (\cos n \cos AQ - \cos l \cos CQ)$$
$$R = \delta Mf (\cos l \cos BQ - \cos m \cos AQ).$$

Pro puncto autem Q ponamus angulum $PZQ = \xi$, ut sit $\tang \xi = \frac{fg \sin s . \cos\vartheta}{v - fg \sin s \sin\vartheta}$ et posita celeritate radente $\surd(vv - 2fvg \sin s \sin\vartheta + ffgg \sin\vartheta^2) = u$, erit $\sin\xi = \frac{-fg \sin s \cos\vartheta}{u}$ et $\cos\xi = \frac{fg \sin s \sin\vartheta - v}{u}$. Fit ergo $DZQ = \varphi + \xi$ et $EZQ = 180° - \varphi - \xi$, hinc $AZQ = 180° - \xi - \varphi - \lambda$, $BZQ = \mu + \xi + \varphi - 180°$;

ergo

$$\cos AQ = -\cos(\xi + \varphi + \lambda) \sin l$$
$$\cos BQ = -\cos(\xi + \varphi + \mu) \sin m$$
$$\cos CQ = -\cos(\xi + \varphi + \nu) \sin n.$$

Ex relatione igitur, quae inter angulos λ, μ et ν intercedit, concludemus momenta virium:

$$P = \delta Mf \sin l \times \sin(\lambda + \varphi + \xi)$$
$$Q = \delta Mf \sin m \times \sin(\mu + \varphi + \xi)$$
$$R = \delta Mf \sin n \times \sin(\nu + \varphi + \xi).$$

PROBLEMA. 3.

1269. Si motum gyratorium ad quodvis tempus ut datum spectemus, definire motum progressivum globi.

SOLU-

SOLUTIO.

Fig. 162. Quia centrum globi in plano horizontali movetur, descripserit id tempore t lineam GI, quae referatur ad directionem GX superiori directioni fixae DE parallelam, ductaque IX ad GX normali, sint coordinatae GX $= X$, XY $= Y$. Per I ducatur recta DE ipsi GX parallela, quae erit ipsa diameter DE (fig. 161). Ducatur IP, ita ut sit angulus DIP $=$ EIR $= \varphi$, et centrum I per hypothesin progreditur in directione IR celeritate $= v$, ita ut sit celeritas secundum GX $= v \cos\varphi$ et celeritas secundum XI $= v \sin\varphi$, ideoque $dX = vdt \cos\varphi$ et $dY = vdt \sin\varphi$. Ducatur recta QIS, ita ut IQ sit directioni, qua punctum contactus radit, parallela, erit angulus EIQ $=$ DIS $= 180° - \xi - \varphi$; (est enim aequalis angulo EZQ in praecedente figura) unde globus sollicitari censendus est vi $= \delta M$ in directione IS. Hinc ergo oritur vis secundum ID $= -\delta M \cos(\xi + \varphi)$ et vis secundum XI $= \delta M \sin(\xi + \varphi)$, ex quibus colligitur

$$\frac{d.v\cos\varphi}{2gdt} = \frac{dv\cos\varphi - vd\varphi\sin\varphi}{2gdt} = \delta\cos(\xi+\varphi)$$

$$\frac{d.v\sin\varphi}{2gdt} = \frac{dv\sin\varphi + vd\varphi\cos\varphi}{2gdt} = \delta\sin(\xi+\varphi)$$

hincque porro $\frac{dv}{2gdt} = \delta\cos\xi$ et $\frac{vd\varphi}{2gdt} = -\delta\sin\xi$,

ita ut sit $\frac{vd\varphi}{dv} = \tan g\,\xi = \frac{f g \sin s \sin\vartheta}{v - f g \sin s \sin\vartheta}$.

PROBLEMA. 4.

1270. Definito motu progressivo globi, determinare ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Fig. 161. Spectetur nunc centrum globi I ut quiescens, et maneant omnes denominationes in Problemate 2. adhibitae, sintque Maa, Mbb, Mcc momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC, quae primo ut inaequalia consideremus. Quoniam vero hic celeritatem angularem g ut negativam spectare debemus, quia tendit in sensum ACB, si ponamus $g \cos\alpha = x$, $g\cos\beta = y$, et $g\cos\gamma = z$, in formulis generalibus has litteras x, y, z negative sumi oportet, quo facto ex §. 810. deducuntur hae aequationes motum determinantes:

$dx +$

$$dx + \frac{bb - cc}{aa} yzdt + \frac{2\delta fg}{aa} dt \sin l \sin(\lambda + \varphi + \xi) = 0;$$

$$dy + \frac{cc - aa}{bb} xzdt + \frac{2\delta fg}{bb} dt \sin m \sin(\mu + \varphi + \xi) = 0;$$

$$dz + \frac{aa - bb}{cc} xydt + \frac{2\delta fg}{cc} dt \sin n \sin(\nu + \varphi + \xi) = 0;$$

$$dl \sin l = dt\,(z \cos m - y \cos n);$$
$$dm \sin m = dt\,(x \cos n - z \cos l);$$
$$dn \sin n = dt\,(y \cos l - x \cos m);$$
$$d\lambda \sin l^2 = dt\,(y \cos m + z \cos n);$$
$$d\mu \sin m^2 = dt\,(z \cos n + x \cos l);$$
$$d\nu \sin n^2 = dt\,(x \cos l + y \cos m).$$

Tum vero ex motu progressivo habemus $dv = 2\delta g dt \cos\xi$, $v d\Phi = 2\delta g dt \sin\xi$ et $\tan\xi = \frac{fg \sin s \cos\vartheta}{v - fg \sin s \cos\vartheta}$, ubi est $PZO = \vartheta$ et $ZO = s$. Cum ergo sit angulus $EZO = 180^\circ - \vartheta - \varphi$, erit $AZO = 180^\circ - \lambda - \vartheta - \varphi$; hincque

$$\cos\alpha = \cos l \cos s - \sin l \sin s \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)$$
$$\cos\beta = \cos m \cos s - \sin m \sin s \cos(\mu + \vartheta + \varphi)$$
$$\cos\gamma = \cos n \cos s - \sin n \sin s \cos(\nu + \vartheta + \varphi),$$

existente $\cos s = \cos l \cos\alpha + \cos m \cos\beta + \cos n \cos\gamma$,
unde sequitur fore

$$\left.\begin{array}{l} + \sin l \cos l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) \\ + \sin m \cos m \cos(\mu + \vartheta + \varphi) \\ + \sin n \cos n \cos(\nu + \vartheta + \varphi) \end{array}\right\} = 0.$$

Ponamus $g \cos s = p$ et $g \sin s = q$ ita ut sit $\tan\xi = \frac{fq \cos\vartheta}{v - fq \sin\vartheta} = \frac{v\,d\Phi}{dv}$, eritque

$$x = p \cos l - q \sin l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi),$$
$$y = p \cos m - q \sin m \cos(\mu + \vartheta + \varphi),$$
$$z = p \cos n - q \sin n \cos(\nu + \vartheta + \varphi),$$

ex quibus valoribus fit

$$dl = q dt \sin(\lambda + \vartheta + \varphi);$$
$$dm = q dt \sin(\mu + \vartheta + \varphi);$$
$$dn = q dt \sin(\nu + \vartheta + \varphi);$$

 $d\lambda =$

$$d\lambda = p\,dt + q\,dt \cot. l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi);$$
$$d\mu = p\,dt + q\,dt \cot. m \cos(\mu + \vartheta + \varphi);$$
$$d\nu = p\,dt + q\,dt \cot. n \cos(\nu + \vartheta + \varphi);$$

indeque porro

$$dx = dp \cos l - dq \sin l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + q\,(d\vartheta + d\varphi) \sin l \sin(\lambda + \vartheta + \varphi),$$
$$dy = dp \cos m - dq \sin m \cos(\mu + \vartheta + \varphi) + q\,(d\vartheta + d\varphi) \sin m \sin(\mu + \vartheta + \varphi),$$
$$dz = dp \cos n - dq \sin n \cos(\nu + \vartheta + \varphi) + q\,(d\vartheta + d\varphi) \sin n \sin(\nu + \vartheta + \varphi).$$

At sine subsidio harum substitutionum ex aequationibus ternis primis cum in genere sit $\sin l \cos l \sin(\lambda + A) + \sin m \cos m\, (\mu + A) + \sin n \cos n \sin(\nu + A) = 0$, elicimus hanc aequationem:

$$\left.\begin{matrix} aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n \\ - aaxdl \sin\lambda - bbydm \sin m - cczdn \sin n \end{matrix}\right\} = 0,$$

cujus integrale est $aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = C$,

quae aequatio, adhibitis substitutionibus, abit in hanc:

$$\left.\begin{matrix} p\,(aa \cos l^2 + bb \cos m^2 + cc \cos n^2) \\ - qaa \sin l \cos l \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) \\ - qbb \sin m \cos m \cos(\mu + \vartheta + \varphi) \\ - qcc \sin n \cos n \cos(\nu + \vartheta + \varphi) \end{matrix}\right\} = \text{Const.}$$

Deinde etiam per reductiones §. 934. traditas pro vi viva colligitur haec aequatio differentialis: $aaxdx + bbydy + cczdz = 2\delta fgqdt \sin(\xi - \vartheta)$.

SCHOLION.

1271. Ad reductiones hic factas intelligendas ex formulis traditis, ubi angulos μ et ν per l, λ, m, n expressimus, notari convenit fieri

$$\cos(\mu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos m \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + \cos n \sin(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin m},$$

$$\cos(\nu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos n \cos(\lambda + \vartheta + \varphi) - \cos m \sin(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin m},$$

$$\sin(\mu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos m \sin(\lambda + \vartheta + \varphi) - \cos n \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin m},$$

$$\sin(\nu + \vartheta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos n \sin(\lambda + \vartheta + \varphi) + \cos m \cos(\lambda + \vartheta + \varphi)}{\sin l \sin n}.$$

Ac simili modo anguli $\mu + \varphi + \xi$ et $\nu + \varphi + \xi$ ad angulum $\lambda + \varphi + \xi$ revocari possunt. Deinde etiam pro sequentibus reductionibus haec forma impri-

imprimis est notanda: $\sin(\mu + B)\cos(\nu + C) = \sin(\nu + B)\cos(\mu + C)$, quae ob $\sin M \cos N = \frac{1}{2}\sin(M + N) + \frac{1}{2}\sin(M - N)$, reducitur ad $\sin(\mu - \nu)\cos(B - C)$; hocque modo reductionem pro aliis formulis instituendo, reperiemus:

$$\sin(\mu + B)\cos(\nu + C) - \sin(\nu + B)\cos(\mu + C) = \sin(\mu - \nu)\cos(B - C),$$

$$\sin(\mu + B)\sin(\nu + C) - \sin(\nu + B)\sin(\mu + C) = -\sin(\mu - \nu)\sin(B - C),$$

$$\cos(\mu + B)\cos(\nu + C) - \cos(\nu + B)\cos(\mu + C) = -\sin(\mu - \nu)\sin(B - C),$$

ubi $\sin(\mu - \nu)$ per formulas usurpatas datur: est enim $\sin(\mu - \nu) = \frac{\cos \varepsilon}{\sin m \sin n}$.

PROBLEMA. 5.

1272. Si globus ex materia uniformi constet, vel saltem ita fuerit comparatus, ut omnia momenta inertiae sint inter se aequalia, eique initio impressus fuerit motus quicunque, determinare ejus continuationem.

SOLUTIO.

Cum hic sit $aa = bb = cc$, seu momentum inertiae respectu omnium diametrorum $= Maa$, prima aequatio integrata praebet $aap =$ Const. unde p erit quantitas constans. Statuatur ergo $p = h$, et ternae aequationes priores hanc induent formam:

$$\text{I.} \quad -dq\cos(\lambda + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi)\sin(\lambda + \vartheta + \varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\lambda + \varphi + \xi) = 0,$$

$$\text{II.} \quad -dq\cos(\mu + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi)\sin(\mu + \vartheta + \varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\mu + \varphi + \xi) = 0,$$

$$\text{III.} \quad -dq\cos(\nu + \vartheta + \varphi) + q(d\vartheta + d\varphi)\sin(\nu + \vartheta + \varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin(\nu + \varphi + \xi) = 0,$$

quarum autem sufficit binas considerasse, quia jam inde nata est conclusio $p = h$. Iam per superiores reductiones binae posteriores aequationes ita combinentur:

$$\text{II.}\cos(\nu + \vartheta + \varphi) - \text{III.}\cos(\mu + \vartheta + \varphi)$$

quae combinatio praebet

$$q\,(d\vartheta + d\phi)\,\sin(\mu - \nu) + \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\sin(\mu - \nu)\,\cos(\xi - \vartheta) = 0,$$

seu $q\,(d\vartheta + d\phi) + \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\cos(\xi - \vartheta) = 0.$

Deinde combinatio

- II. $\sin(\nu + \vartheta + \phi)$ — III. $\sin(\mu + \vartheta + \phi)$ dat

$$dq\,\sin(\mu - \nu) - \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\sin(\mu - \nu)\,\sin(\xi - \vartheta) = 0$$

seu $dq = \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\sin(\xi - \vartheta)$, qui valor in ultima aequatione pro viribus vivis substitutus praebet $xdx + ydy + zdz = qdq$, hincque $xx + yy + zz = gg = \text{const.} + qq = \text{const.} + gg\sin s^2$ ita ut sit $gg\cos s^2$ quantitas constans, uti jam invenimus, ob $g\cos s = p = h$. Hinc istas habemus aequationes a litteris l, m, n, λ, μ, ν immunes:

$$\text{I. } q\,(d\vartheta + d\phi) + \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\cos(\xi - \vartheta) = 0,$$

$$\text{II. } dq = \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\sin(\xi - \vartheta) = 0,$$

$$\text{III. } dv = 2\delta g\,dt\,\cos\xi$$

$$\text{IV. } v\,d\phi = 2\delta g\,dt\,\sin\xi,$$

quibus adjungatur haec finita: $\tang\xi = \frac{fq\cos\vartheta}{v - fq\sin\vartheta}$, quae in hanc transformata: $v\sin\xi - fq\cos(\xi - \vartheta) = 0$, differentietur, prodibitque $dv\sin\xi + vd\xi\cos\xi - fdq\cos(\xi - \vartheta) + fqd\xi\sin(\xi - \vartheta) - fqd\vartheta\sin(\xi - \vartheta = 0.$ Iam combinatio: I. $\sin(\xi - \vartheta)$ + II. $\cos(\xi - \vartheta)$ dat $q\,(d\vartheta + d\phi)$ $\sin\xi - \vartheta) + dq\cos(\xi - \vartheta) = 0$; quae aequatio per f multiplicata illi addatur, fietque $dv\sin\xi + vd\xi\cos\xi + fq\,(d\xi + d\phi)\sin(\xi - \vartheta) = 0.$ Porro ob $\frac{dv}{vd\phi} = \frac{\cos\xi}{\sin\xi}$ erit

$$v\,(d\phi + d\xi)\cos\xi + fq\,(d\phi + d\xi)\sin(\xi - \vartheta) = 0, \text{ seu}$$

$$(d\phi + d\xi)\,(v\cos\xi + fq\sin(\xi - \vartheta)) = 0,$$

quorum factorum finitus: $v\cos\xi + fq\sin(\xi - \vartheta)$, evanescere nequit ob $v\sin\xi - fq\cos(\xi - \vartheta) = 0$, sequeretur enim inde $v\cos\vartheta = 0$ et $fq\cos\vartheta = 0$, quod non nisi casu $\vartheta = 90°$ locum habet. Relinquitur ergo ut sit $d\phi + d\xi = 0$, ideoque $\phi + \xi$ constans. Hoc impetrato reliqua non

non difficulter expedientur. Ad integrationes autem determinandas pro ſtatu initiali $t = 0$, ponamus fuiſſe celeritatem progreſſivam $v = \varepsilon$; $\varphi = 0$, $PZO = \vartheta = \mathfrak{h}$; $ZO = s = \mathfrak{f}$ et celeritatem angularem $\varepsilon = \varepsilon$ in ſenſum ACB; hinc erit $p = h = \varepsilon \operatorname{cof} \mathfrak{f}$ et $q = \varepsilon \operatorname{fin} \mathfrak{f}$; porro $\operatorname{tang} \xi$
$= \frac{\varepsilon f \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{cof} \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{fin} \mathfrak{h}}$. Statuatur $\frac{\varepsilon f \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{cof} \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{fin} \mathfrak{h}} = \operatorname{tang} \zeta$, ut fuerit initio $\xi = \zeta$, ac perpetuo erit $\xi + \varphi = \zeta$, ita ut angulus $DZQ = \zeta$ maneat conſtans. Quare cum ſit $\xi = \zeta - \varphi$ erit $v \operatorname{fin}(\zeta - \varphi) = fq \operatorname{cof}(\zeta - \vartheta - \varphi)$. Supra autem invenimus:

$$\frac{d.v \operatorname{cof} \varphi}{2gdt} = \delta \operatorname{cof}(\xi + \varphi) = \delta \operatorname{cof} \zeta \text{ et}$$

$$\frac{d.v \operatorname{fin} \varphi}{2gdt} = \delta \operatorname{fin}(\xi + \varphi) = \delta \operatorname{fin} \zeta,$$

unde integrando colligimus: $v \operatorname{cof} \varphi = e + 2\delta g t \operatorname{cof} \zeta$ et $v \operatorname{fin} \varphi = 2\delta g t \operatorname{fin} \zeta$, hincque $v = \sqrt{(ee + 4\delta e g t \operatorname{cof} \zeta + 4\delta\delta g g t t)}$, $\operatorname{tang} \varphi$
$= \frac{2\delta g t \operatorname{fin} \zeta}{e + 2\delta g t \operatorname{cof} \zeta}$, atque $\operatorname{tang}(\zeta - \varphi) = \frac{e \operatorname{fin} \zeta}{e \operatorname{cof} \zeta + 2\delta g t} = \frac{fq \operatorname{cof} \vartheta}{v - fq \operatorname{fin} \vartheta}$
$= \operatorname{tang} \xi$. Deinde ob $d\varphi = - d\xi$ binae priores aequationes abeunt in

$$\text{I. } q\,(d\xi - d\vartheta) = \frac{2\delta f g}{aa}\, dt \operatorname{cof}(\xi - \vartheta).$$

$$\text{II. } dq = \frac{2\delta f g}{aa}\, dt \operatorname{fin}(\xi - \vartheta),$$

quarum haec per illam diviſa dat $\frac{dq}{q\,(d\xi - d\vartheta)} = \frac{\operatorname{fin}(\xi - \vartheta)}{\operatorname{cof}(\xi - \vartheta)}$, quae integrata prodit $q \operatorname{cof}(\xi - \vartheta) = C$, ideoque $q \operatorname{cof}(\xi - \vartheta) = \varepsilon \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{cof}(\zeta - \mathfrak{h})$, unde valor ipſius q in prima ſubſtitutus praebet:
$\frac{\varepsilon\,(d\xi - d\vartheta) \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{cof}(\zeta - \mathfrak{h})}{\operatorname{cof}(\xi - \vartheta)^2} = \frac{2\delta f g}{aa}\, dt$, et integrando $\varepsilon \operatorname{fin} \mathfrak{f}$
$\operatorname{cof}(\zeta - \mathfrak{h}) \operatorname{tang}(\xi - \vartheta) = C + \frac{2\delta f g}{aa}\, t$, ubi $C = \varepsilon \operatorname{fin} \mathfrak{f} \operatorname{fin}(\vartheta - \mathfrak{h})$;
at $\operatorname{tang}(\xi - \vartheta) = \operatorname{tang}(\zeta - \varphi - \vartheta) = \frac{\operatorname{tang}(\zeta - \varphi) - \operatorname{tang} \vartheta}{1 + \operatorname{tang}(\zeta - \varphi) \operatorname{tang} \vartheta}$ et $\operatorname{tang} \vartheta$
$= \frac{\operatorname{tang}(\xi - \operatorname{tang}(\xi - \vartheta)}{1 + \operatorname{tang} \xi \operatorname{tang}(\xi - \vartheta)}$. Sed per hypotheſin eſt $\varepsilon \operatorname{fin} \mathfrak{f}$

 =

$= \frac{e \sin\zeta}{f \cos(\zeta - \mathfrak{h})}$, unde fit $\tang(\xi - \vartheta) = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa \sin\zeta}$ et $\tang\xi = \frac{e \sin\zeta}{e \cos\zeta + 2\delta gt}$, hincque angulus ϑ facile determinatur: indeque $q = \frac{e \sin\zeta}{f \cos(\xi - \vartheta)}$. Verum hic notari oportet, cum sit $\tang\zeta = \frac{ef \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{e - ef \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h}}$, esse ut supra de angulo ξ ostendimus

$$\sin\zeta = \frac{-ef \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{\sqrt{(ee - 2eef \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + eeff \sin\mathfrak{f}^2)}} \text{ et}$$

$$\cos\zeta = \frac{-e + ef \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h}}{\sqrt{(ee - 2eef \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + eeff \sin\mathfrak{f}^2)}}, \text{ unde}$$

$$\cos(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e \cos\mathfrak{h}}{\sqrt{(ee - 2eef \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + eeff \sin\mathfrak{f}^2)}}.$$

His inventis cum sit $\varepsilon \cos s = e \cos\mathfrak{f}$ et $\varepsilon \sin s = q$, erit $\varepsilon = \sqrt{(qq + ee \cos\mathfrak{f}^2)}$ et $\tang s = \frac{q}{e \cos\mathfrak{f}}$. Sicque tam motus progressivus, quam ad quodvis tempus axis gyrationis O cum celeritate angulari ε poterit assignari, id quod ad motus cognitionem sufficit. Determinatio autem situs punctorum A, B, C ad quodvis tempus nimis est ardua, quam ut eam perficere liceat.

COROLL. 1.

1273. Cum sit celeritas angularis $\varepsilon = \frac{e \cos\mathfrak{f}}{\cos s}$, seu cosinui arcus SO reciproce proportionalis; sequitur si polus gyrationis O initio fuerit in superiori hemisphaerio DZE, eum nunquam in inferius pervenire posse; in transitu enim per circulum horizontalem DE prodiret celeritas angularis ε infinita.

COROLL. 2.

1274. Ob eandem rationem, si polus gyrationis O initio fuerit in hemisphaerio inferiori DTE, is nunquam in superius ascendet; sin autem initio fuerit in ipso circulo horizontali DE, perpetuo in eodem manebit: scilicet si initio axis gyrationis fuerit horizontalis, perpetuo horizontalis manebit.

COROLL.

COROLL. 3.

1275. Si fuerit initio angulus DZO = $\mathfrak{h}$ rectus, fiet sin $\zeta = 0$ et ob $\tang(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e \sin \mathfrak{h}}{e \cos \mathfrak{h}}$, erit etiam $\xi - \vartheta$ rectus. Sed ob $\tang \xi = \frac{e \sin \zeta}{e \cos \zeta + 2\delta g t}$ angulus ξ evenescit, unde angulus ϑ = PZO prodit rectus. Simulatque igitur angulus PZO factus fuerit rectus, perpetuo rectus manebit.

COROLL. 4.

1276. Memorabilis est etiam proprietas, quod angulus $\xi + \varphi$, seu DZQ, et in fig. 162. angulus DIQ sit constans. Recta enim QIS sibi perpetuo manebit parallela, et quia globus in motu progressivo sollicitatur vi constante δM secundum eandem directionem IS, curva ab eo descripta GI parabola sit necesse est.

SCHOLION. 1.

1277. Hic autem motus globi, uti nostris formulis est definitus, diutius non durat, quam revera frictio adest, seu planum horizontale in puncto contactus T raditur. Si enim eveniat ut rasio cesset, seu celeritas radens in T evanescat, subito frictio evanescit, formulaeque inventae non amplius locum habent. Tum igitur globus motu tam progressivo quam gyratorio uniformiter in directum progredietur, neque axis gyrationis ullam amplius mutationem patietur. Ac si statim initio motus globo impressus ita fuerit comparatus, ut frictio fuerit nulla, quod evenit si tam $\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \cos \mathfrak{h} = 0$, quam $e = \varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h}$, tum etiam globus nullam frictionem sentiet, et statim ab initio motum progressivum uniformiter in directum prosequetur, simulque uniformiter circa eundem axem gyrabitur. Verum si corpori ab initio alius motus quicunque fuerit impressus, semper aliquo tempore elapso eo reducetur, ut frictio evanescat, indeque motum suum uniformiter prosequetur, quod memorabile temporis punctum in sequenti problemate investigabimus.

SCHOLION. 2.

1278. Quae in solutione problematis elicuimus, huc redeunt: ex Fig. 161. motu primum impresso habemus celeritatem motus progressivi = e, secundum directionem DI: ac si gyretur circa axem IO celeritate angulari ε in sensum ACB, seu ZETD, qui sensus ***antrorsum tendens*** dici solet,

fue-

fueritque arcus $ZO = \mathfrak{f}$ et angulus $DZO = \mathfrak{h}$: tum vero radius globi sit $= f$ ejusque momentum inertiae $= Maa$ respectu omnium diametrorum, existente M ejus massa: ex his datis colligitur celeritas radens in puncto contactus $= \sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin\mathfrak{f}^2)}$, quae si ponatur $= k$, quaeratur angulus $DZQ = \zeta$, ut sit $\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{k}$ et $\cos\zeta = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} - e}{k}$, eritque IQ directio motus radentis. Tum si elapso tempore t globi centrum proferatur celeritate v secundum directionem PI, et gyret celeritate angulari $= ȣ$ in sensum ZETD circa polum O, ponaturque $DZP = \varphi$, $PZO = \vartheta$ et $ZO = s$: invenimus primo $\tang\varphi = \frac{2\delta gt \sin\zeta}{e + 2\delta gt \cos\zeta}$ et celeritatem centri $= \sqrt{(ee + 4\delta egt \cos\zeta + 4\delta\delta ggtt)}$, at celeritas radens etiamnunc fiet in directione IQ, existente $DZQ = \zeta$; unde posito $PZQ = \xi$ erit $\tang\xi = \frac{e \sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta g t}$. Porro est $\tang(\xi - \vartheta) = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa \sin\zeta}$, existente $\tang(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e\sin\mathfrak{h}}{e\cos\mathfrak{h}}$, unde angulus ϑ innotescit, hincque ob $DZO = \varphi + \vartheta = \zeta - \xi + \vartheta$, concluditur $\tang DZO = \tang(\varphi + \vartheta) = \frac{\varepsilon aak \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + 2\delta fgt\,(e - \varepsilon) f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h}}{\varepsilon aak \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h} - 2\delta\varepsilon ffgt \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}$. Atque ex his tandem nacti sumus $ȣ \cos s = \varepsilon \cos\mathfrak{f}$ et $ȣ \sin s = \frac{e \sin\zeta}{f\cos(\xi - \vartheta)}$. Denique pro celeritate radente secundum IQ, ea est $\sqrt{(vv - 2ȣ vf \sin s \sin\vartheta + ȣȣ ff \sin s^2)}$; quae si vocetur $= w$, supra ostendimus esse $\sin\xi = -\frac{ȣ f \sin s \cos\vartheta}{w}$ et $\cos\xi = \frac{ȣ f \sin s \sin\vartheta - v}{w}$, unde $ȣ$ et s definiuntur. Sed pro situ punctorum A, B, C in globo fixorum ad quodvis tempus determinando formulae adeo fiunt intricatae, ut nihil inde concludi queat. Interim si pro puncto A vocetur $ZA = l$ et $EZA = \lambda$, ad has binas aequationes totum negotium reducitur:

I. dl

$$\text{I. } dl = dt\left(\varepsilon \sin f \sin(\zeta + \lambda) - \frac{2\delta fgt}{aa}\cos(\zeta + \lambda)\right).$$

$$\text{II. } d\lambda \sin l = \varepsilon dt \cos f \sin l + \varepsilon dt \cos l \sin f \cos(\zeta + \lambda) + \frac{2\delta fgt}{aa}\sin(\zeta + \lambda).$$

quarum resolutio vereor ne frustra suscipiatur. Cum autem ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari assignare valeamus, quod ad motus cognitionem, qualis vulgo desideratur, sufficere potest, eo magis mirum videtur, quod motus singulorum globi punctorum quasi vires analyseos superet. Multo minus igitur de motu globorum, in quibus momenta inertiae non sunt aequalia, quicquam definire licebit.

PROBLEMA 6.

1279. Si globo, cujus omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia, motus quicunque fuerit impressus, assignare temporis punctum, ubi celeritas radens, ideoque et frictio evanescit, indeque globus motu uniformi progredi pergit.

SOLUTIO.

Supra §. 1263. vidimus, ut attritus evanescat, has duas conditiones requiri: alteram $\varepsilon \sin s \cos \vartheta = 0$, alteram $v = f\varepsilon \sin s \sin \vartheta$, seu in expressione $\tang \xi = \frac{f\varepsilon \sin s \cos \vartheta}{v - f\varepsilon \sin s \sin \vartheta}$, tam numeratorem quam denominatorem simul evanescere debere. Cum autem invenerimus $\tang \xi = \frac{e \sin \zeta}{e \cos \zeta + 2\delta gt}$, ubi numerator $e \sin \zeta$ est constans, si in illa forma numerator evanescat, positio $\cos \vartheta = 0$ tempus quaesitum declarabit. Verum idem luculentius determinabimus, si ad quodvis tempus elapsum t celeritatem radentem w investigemus. Cum igitur ex valore §. 1278. inverso: $\sin \xi = -\frac{\varepsilon f \sin s \cos \vartheta}{w}$ habeamus $w = \frac{-\varepsilon f \sin s \cos \vartheta}{\sin \xi}$, quae expressio ob $\varepsilon \sin s = \frac{e \sin \zeta}{f \cos(\xi - \vartheta)}$ abit in hanc: $w = \frac{-e \sin \zeta \cos \vartheta}{\sin \xi \cos(\xi - \vartheta)}$: atque ob $\vartheta = \xi - (\xi - \vartheta)$ in hanc: $w = -e \sin \zeta\,(\cot \xi + \tang(\xi - \vartheta))$; si hic pro $\tang \xi$ et $\tang(\xi - \vartheta)$ valores supra inventos substituamus, reperiemus: $w = -(e \cos \xi + 2\delta gt$

 + e

$+ e \sin\zeta \tan(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{aa}\Big)$. At vero est $\cos\zeta + \sin\zeta \tan(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\cos\mathfrak{h}}{\cos(\zeta - \mathfrak{h})}$ et $\cos(\zeta - \mathfrak{h}) = -\frac{e\cos\mathfrak{h}}{k}$, unde fit $e\cos\zeta + e\sin\zeta \tan(\zeta - \mathfrak{h}) = -k$, ubi k denotat celeritatem radentem initialem. Quamobrem elapso tempore t habebimus celeritatem radentem $w = k - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$, ita ut ea labente tempore uniformiter decrescat, tandem ergo certe evanescat, id quod eveniet elapso tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa + ff)}$, eritque tum $\cos\vartheta = 0$ et $\vartheta = 90° = PZO$. Quod ergo cum evenerit, videamus quomodo reliquae motus determinationes se sint habiturae, et quoniam $2\delta gt = \frac{aak}{aa + ff}$ erit $\tan\varphi = \frac{aak \sin\zeta}{e(aa + ff) + aak\cos\zeta}$ et $\tan\xi = \frac{e(aa + ff)\tan\zeta}{e(aa + ff) + aak}$, hinc fit $s \sin r = \frac{e\sin\zeta}{f\sin\xi}$. Cum autem sit $v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek\cos\zeta}{aa + ff} + \frac{a^4 kk}{(aa + ff)^2}\right)}$ erit $\sin\varphi = \frac{aak \sin\zeta}{(aa + ff)v}$, $\cos\varphi = \frac{e(aa + ff) + aak\cos\zeta}{(aa + ff)v}$, atque $\sin\xi = \frac{e\sin\zeta}{v}$ ideoque $s \sin r = \frac{v}{f}$. Porro quia est $s\cos r = e\cos\mathfrak{f}$, erit $\tan r = \frac{v}{ef\cos\mathfrak{f}}$ et $s = \sqrt{\left(\frac{vv}{ff} + ee\cos\mathfrak{f}^2\right)}$, sive substituto valore v:

$$s = \frac{\sqrt{(eeff + 2eeaaf \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + eea^4 \sin\mathfrak{f}^2 + ee(aa + ff)^2 \cos\mathfrak{f}^2)}}{aa + ff}$$

ob $kk = ee - 2eef\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + eeff\sin\mathfrak{f}^2$.

COROLL. 1.

1280. Quo major ergo initio fuerit celeritas radens k, eo diutius motus durat, antequam cessante frictione ad uniformitatem redigatur. Ac si globus constet ex materia homogenea, fit $aa = \frac{2}{5}ff$, ideoque motus uni-

uniformitas incipit elapſo tempore $t = \frac{k}{7\delta g}$ min. ſec., hinc in hypotheſi $\delta = \frac{1}{3}$ fit $t = \frac{3k}{7g}$, exiſtente $g = 15\frac{5}{8}$ pedum Rhenanorum.

COROLL. 2.

1281. Ut centrum globi eodem tempore ad quietem redigatur, ſtatus initialis ita comparatus eſſe debet, ut ſit $\cos\zeta = -1$ et $\varepsilon = \frac{aak}{aa+ff}$. Fit ergo $\sin\mathfrak{h} = 1$ et $k = e - \varepsilon f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} = e - \varepsilon f \sin\mathfrak{f}$ hincque $\varepsilon \sin\mathfrak{f} = \frac{ef}{aa}$. Porro ob $v = 0$, fit $s = 0$ et $\varepsilon = \varepsilon \cos\mathfrak{f}$, qua celeritate angulari jam globus circa axem verticalem quieſcentem gyrabitur, elapſo ab initio tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ min. ſec.

COROLL. 3.

1282. Hoc autem caſu, quo initio eſt $\mathfrak{h} = 90°$ et $\varepsilon = \frac{-ef}{aa\sin\mathfrak{f}}$ fit $\zeta = 180°$; $\varphi = 0$; $\xi = 180°$; $\vartheta = 90°$; $v = e - 2\delta gt$; tum vero habebimus $\varepsilon\cos s = \frac{-ef\cos\mathfrak{f}}{aa\sin\mathfrak{f}}$; $\varepsilon\sin s = -\frac{ef}{aa}\left(1 - \frac{2\delta gt}{e}\right)$; hincque $\tang s = \left(1 - \frac{2\delta gt}{e}\right)\tang\mathfrak{f}$ et $\varepsilon = \frac{-e}{aa\sin\mathfrak{f}}$ $\surd\left(1 - \frac{4\delta gt}{e}\sin\mathfrak{f} + \frac{4\delta\delta ggtt}{ee}\sin\mathfrak{f}^2\right)$. At initio erat celeritas radens $k = e\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)$, elapſo autem tempore t ea eſt $w = \left(1 + \frac{ff}{aa}\right)(e - 2\delta gt)$, ſicque poſito $t = \frac{e}{2\delta g}$ ſimul fit $w = 0$, $v = 0$ et $s = 0$, ut ante.

COROLL. 4.

1283. Ne valor $\varepsilon\sin s = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi - \vartheta)}$ indefinitus videatur, quod fit ſi numerator ac denominator evaneſcant, ſeu $\zeta = 0$, conveniet loco

 ſin ζ

$\sin\zeta$ et $\cos(\xi - \vartheta)$ valores ex superioribus substitui, atque hinc reperietur: $\varepsilon \sin s = \sqrt{\left(ee \sin \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin\mathfrak{f}(\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h})}{aak}\right.}$ $\overline{\left. + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)}$, unde ob $\varepsilon \cos s = e \cos\mathfrak{f}$ prodit $\varepsilon\varepsilon = ee$ $- \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin\mathfrak{f}(\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \sin\mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}$.

COROLL. 5.

1284. Cum sit vis viva globi $= M(vv + aa\varepsilon\varepsilon)$, erat ea initio $= M(ee + \varepsilon\varepsilon aa)$; elapso autem tempore t ea erit $= M\left(ee + \varepsilon\varepsilon aa - 4\delta gkt + 4\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)\delta\delta ggtt\right)$. At elapso tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa + ff)}$, vis viva fiet $\frac{M(eeff + 2\varepsilon eaaf \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa + ff\cos\mathfrak{f}^2))}{aa + ff}$, cujus defectus ab initiali est $\frac{Maa(ee - 2\varepsilon ef \sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin\mathfrak{f}^2)}{aa + ff} = \frac{Maakk}{aa + ff}$, ita ut ista vis viva sit $M\left(ee + \varepsilon\varepsilon aa - \frac{aakk}{aa + ff}\right)$.

SCHOLION.

Fig. 161. 1285. Ex his ergo formulis totus globi motus assignari potest, quicunque motus ei initio fuerit impressus. Interim tamen hae formulae non parum sunt complexae, unde ad clariorem explicationem haud abs re erit casus quosdam magis notabiles evolvere. Cujusmodi sunt, uti jam supra innuimus, duo potissimum: alter quo arcus ZO initio erat quadrans: alter vero quo angulus DZO $= \mathfrak{h}$ erat rectus: utrumque igitur seorsim explicemus.

PROBLEMA. 7.

1286. Si globo, in quo omnia momenta inertiae sunt aequalia, initio motus gyratorius circa axem horizontalem fuerit impressus, praeter motum progressivum definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Cum initio axis gyrationis fuerit horizontalis, erit $\mathfrak{f} = ZO = 90°$. Denotante ergo e celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et

ε ce-

ε celeritatem angularem circa axem IO, in sensum ZETD, sit pro puncto O angulus DZO $= \eta$, manente f radio globi et Maa momento inertiae. Ex his erat initio celeritas radens: $k = \sqrt{(ee - 2e\varepsilon f \sin\eta + \varepsilon\varepsilon ff)}$ et pro ejus directione IQ angulus DZQ $= \zeta$, ut sit $\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f \cos\eta}{k}$ et $\cos\zeta = \frac{\varepsilon f \sin\eta - e}{k}$. His pro statu initiali constitutis, elapso tempore t centrum globi descripserit viam GI, ut jam sit in I, ubi ejus celeritas secundum IR erit $v = \sqrt{(ee + \frac{4\delta egt(\varepsilon f \sin\eta - e)}{k} + 4\delta\delta ggtt)}$, unde positis coordinatis GX $= X$, et XI $= Y$, ob tang EIR $= \tan\phi$ Fig. 162.

$= \frac{-2\delta\varepsilon fgt\cos\eta}{ek + 2\delta gt(\varepsilon f \sin\eta - e)}$ erit $dX = edt + \frac{2\delta gtdt}{k}(\varepsilon f \sin\eta - e)$ et $dY = \frac{-2\delta\varepsilon fgtdt\cos\eta}{k}$, ideoque GX $= X = et + \frac{\delta gtt}{k}(\varepsilon f \sin\eta - e)$ et XI $= Y = -\frac{\delta\varepsilon fgtt}{k}\cos\eta$. Tum vero pro motu gyratorio, qui jam fiat in sensum ZETD celeritate angulari $= \varepsilon$ circa polum O, existente ZO $= s$, PZO $= \vartheta$ et DZQ $= \phi + \xi$, ubi IQ refert directionem celeritatis radentis, quia constanter est $\phi + \xi = \zeta$, seu directio IQ constans, erit $\tan\xi = \frac{-\varepsilon f\cos\eta}{\varepsilon f \sin\eta - ee + 2\delta gkt}$ et $\tan(\xi - \vartheta)$ Fig. 161.

$= \frac{2f - e\sin\eta}{e\cos\eta} - \frac{2\delta fgkt}{\varepsilon eaa\cos\eta}$, unde ambo anguli ξ et ϑ definiuntur. Vel erit $\tan(\phi + \vartheta) = \frac{\varepsilon aak\sin\eta + 2\delta fgt(e - \varepsilon f\sin\eta)}{\varepsilon aak\cos\eta - 2\delta\varepsilon ffgt\cos\eta}$. Celeritas autem radens secundum directionem IQ est $w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$.

Tum vero ob $\varepsilon \cos s = 0$ erit arcus ZO $= s$ quadrans et $\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt(\varepsilon f - e\sin\eta)}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)}$. Hic autem motus aequabilis tantum durabit per tempus $t = \frac{aak}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapso est

$s =$

$\iota = 90^\circ$, tang $\varphi = \frac{-\varepsilon aaf \cos\mathfrak{h}}{e(aa+ff) + aa(\varepsilon f \sin\mathfrak{h} - e)} = \frac{-\varepsilon aa \cos\mathfrak{h}}{ef + \varepsilon aa \sin\mathfrak{h}}$
$= \surd\left(ee + \frac{2aae(\varepsilon f \sin\mathfrak{h} - e)}{aa+ff} + \frac{akk}{(aa+ff)^2}\right)$; $\text{ȣ} = \frac{v}{f}$
$= \frac{\surd(eeff + 2\varepsilon eaaf \sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4)}{aa+ff}$ substituto pro kk valore. Tum autem fit angulus $\vartheta = 90^\circ$ et $\sin\xi = \frac{e \sin\zeta}{v}$.

COROLL. 1.

1287. Si initio fuerit angulus DZO $= \mathfrak{f} = 0$, erit $k = \surd(ee + \varepsilon\varepsilon ff)$: pro angulo DZQ $= \zeta$ fit $\sin\zeta = -\frac{\varepsilon f}{k}$ et $\cos\zeta = \frac{-e}{k}$; tum vero post tempus t prodit $v = \surd\left(ee - \frac{4\delta eegt}{k} + 4\delta\delta ggtt\right)$ tang φ $= \frac{-2\delta\varepsilon fgt}{e(k - 2\delta gt)}$; $X = et\left(1 - \frac{\delta gt}{k}\right)$; $Y = \frac{-\delta\varepsilon fgtt}{k}$, tang ξ $= \frac{\varepsilon ef}{ee - 2\delta gkt}$; tang$(\xi - \vartheta) = \frac{\varepsilon f}{e} - \frac{2\delta fgkt}{\varepsilon eaa}$; tang$(\varphi + \vartheta)$ $= \frac{2\delta efgt}{\varepsilon aak - 2\delta effgt}$; $\text{ȣ} = \surd\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon effgt}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$ et $w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$. Elapso autem tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$ erit tang $\varphi = \frac{\varepsilon aa}{ef}$; $v = \frac{f\surd(eeff + \varepsilon\varepsilon a^4)}{aa+ff} = f\text{ȣ}$; $\vartheta = 90^\circ$ et tang ξ $= \frac{\varepsilon ef(aa+ff)}{ee(aa+ff) - aakk)} = \frac{\varepsilon e(aa+ff)}{f(ee - \varepsilon\varepsilon aa)}$.

COROLL. 2.

1288. Si angulus DZO $= \mathfrak{f}$ esset 180°, eaedem formulae motum indicabunt sumta celeritate angulari ȣ negativa, seu motu gyratorio in contrarium verso. At si sit $\varepsilon = 0$, seu globo solus motus progressivus fuerit impressus, fit $k = e$, $\zeta = 180^\circ$, $v = e - 2\delta gt$; $\varphi = 0$, $X = t(e - \delta gt)$, $Y = 0$, $\xi = 180^\circ$; $\vartheta = 90^\circ$; $\text{ȣ} = \frac{2\delta fgt}{aa}$, et elapso

tempo-

tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$ fit $v = \frac{eff}{aa+ff}$, $u = \frac{ef}{aa+ff}$ et X $= \frac{et(aa+2ff)}{2(aa+ff)} = \frac{aaee(aa+2ff)}{4\delta g(aa+ff)}$.

SCHOLION.

1289. Casus hic, quo globus initio nullum motum gyratorium est adeptus, in genere valet, neque ad ullam hypothesin angulorum $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{h}$ est adstrictus. Tum igitur globus in directum progreditur motu progressivo retardato, motumque paullatim gyratorium accipiet, donec elapso tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$ motum uniformem acquirat, quo deinceps continuo progrediatur. Hinc deducimur ad casum, quo globus initio motum tantum gyratorium acceperit, sine ullo motu progressivo, cujus evolutio est facilis. Posito enim $e = 0$ erit $k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, hincque fit $\sin \zeta = -\cos \mathfrak{h}$ et $\cos \zeta = \sin \mathfrak{h}$, ergo $\zeta = \mathfrak{h} - 90°$, ubi pro axe gyrationis initio impressae IO est ZO $= \mathfrak{f}$ et DZO $= \mathfrak{h}$, existente celeritate angulari in sensum ZETD $= \varepsilon$. Elapso ergo tempore t fit $\varphi = \zeta$, scilicet sublato ab angulo DZO $= \mathfrak{h}$ angulo recto PZO, erit PI directio motus progressivi, quem globus acquiret, cujus celeritas erit $v = 2\delta g t$, ideoque tempori proportionalis. Tum vero erit $\tang \xi = 0$ et $\tang(\xi - \vartheta) = \infty$, ergo ob $\varphi + \xi = \zeta = \mathfrak{h} - 90°$ erit $\xi = 0$ et $\vartheta = 90°$, hinc DZO $= \zeta + 90° = \mathfrak{h}$, ita ut polus gyrationis O in eodem perpetuo circulo verticali reperiatur. Denique ex §. 1283. est $u \sin s = \surd\left(\varepsilon\varepsilon \sin \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4} = \varepsilon \sin \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{aa}\right)$ et $u \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$, unde fit $\tang s = \tang \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon aa \cos \mathfrak{f}}$, ita ut arcus ZO diminuatur, nisi fuerit quadrans vel eo major, et $u = \surd\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$. Motus autem ad uniformitatem reducetur elapso tempore $t = \frac{\varepsilon aaf \sin \mathfrak{f}}{2\delta g(aa+ff)}$; fitque tum $u = \frac{\varepsilon \surd(a^4 \sin \mathfrak{f} + (aa+ff)^2 \cos \mathfrak{f}^2)}{aa+ff}$; $v = \frac{\varepsilon aaf \sin \mathfrak{f}}{aa+ff}$

et

et $\tang s = \frac{aa \tang f}{aa + ff}$. Si ergo fuiſſet $f = 0$, ſeu globo motus gyratorius circa axem verticalem impreſſus eſſet, ſine ullo motu progreſſivo, eundem motum ſine ulla mutatione eſſet conſervaturus.

PROBLEMA 7.

1290. Si globo, in quo omnia momenta inertiae ſunt aequalia, motus gyratorius fuerit impreſſus circa axem ad motus progreſſivi directionem normalem; definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Cum motus progreſſivi initio impreſſi directio ſit recta DIE, et celeritas $= c$, angulus DZO $= \mathfrak{h}$ eſt rectus, et ſumto ZO $= f$ erat O polus circa quem initio globus accepit celeritatem angularem $= \varepsilon$ in ſenſum ZETD. Habemus ergo $k = \pm (c - f\varepsilon \sin f)$, ubi valorem poſitivum pro k ſumi oportet, ita ut hic duo prodeant caſus ſeorſim evolvendi.

CASUS. I.

Sit $c > \varepsilon f \sin f$, erit $k = c - \varepsilon f \sin f$, quae eſt celeritas radens initio, ejusque directio IQ, ita ut ſit $\sin DQ = 0$ et $\cos DQ = -1$, ideoque DQ $= \zeta = 180°$, et Q cadat in E globusque a frictione δM ſecundum directionem ID conſtanter retrahatur; unde ſtatim concluditur globi centrum I in eadem recta DE eſſe manſurum. Elapſo ergo tempore t, ob $\cos\zeta = -1$, fit celeritas centri $v = c - 2\delta g t$, et celeritas radens $w = c - \varepsilon f \sin f - 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$; tum vero $\varphi = 0$; $\xi = 180°$ atque $\vartheta = 0$. Quare pro axe gyrationis praeſente IO eſt DIO $= 90°$, et poſito arcu ZO $= s$ et celeritate angulari $= \varepsilon$ habemus $\varepsilon \cos s = \varepsilon \cos f$ et ex (§. 1283.) $\varepsilon \sin s = \varepsilon \sin f + \frac{2\delta f g t}{aa}$, unde colligitur: $\tang s = \tang f + \frac{2\delta f g t}{\varepsilon aa \cos f}$ et $\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ff gg tt}{a^4}\right)}$. Hoc autem tempore t percurrit centrum I lineam rectam GX $= X = t(c - \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit per tempus $t = \frac{aa(c - \varepsilon f \sin f)}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapſo erit ſpatium $X = \frac{aa(c - \varepsilon f \sin f)(c(aa + ff) + \varepsilon aaf \sin f)}{2\delta g(aa + ff)^2}$

et

et celeritas $v = \frac{f(\varepsilon a^2 f \sin f + ef)}{aa + ff}$. At pro motu gyratorio fit tang s $= \tan g f + \frac{f(e - \varepsilon f \sin f)}{\varepsilon(aa + ff)\cos f} = \frac{ef + \varepsilon aa \sin f}{\varepsilon(aa + ff)\cos f}$, (existente DIO $= 90°$) et celeritas angularis:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(eeff + 2e\varepsilon faa \sin f + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin f^2 - \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos f^2)}}{aa + ff}.$$

CASUS II.

Sit $e < \varepsilon f \sin f$, seu $k = \varepsilon f \sin f - e$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ talis, ut sit $\sin DQ = 0$, $\cos DQ = 1$, ergo $DQ = \zeta = 0$, et Q in D cadat. Globus ergo a frictione δM secundum directionem IE constanter acceleratur, ejusque centrum I in eadem recta IE progreditur, atque elapso tempore t erit celeritas $v = e + 2\delta gt$ et celeritas radens $w = \varepsilon f \sin f - e - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$. Tum vero fit $\varphi = 0$ et $\xi = 0$ atque $\vartheta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praesenti IO est DIO $= 90°$ et posito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= \varepsilon$ habebimus $\varepsilon \cos s$ $= \varepsilon \cos f$ et $\varepsilon \sin s = \varepsilon \sin f - \frac{2\delta fgt}{aa}$, unde fit $\tan g s = \tan g f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa \cos f}$ et $\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)}$, hoc tempore t centrum globi percurrit lineam rectam $GX = X = t(e + \delta gt)$. Hic autem motus inaequabilis durabit tantum per tempus $t = \frac{aa(\varepsilon f \sin f - e)}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapso erit celeritas $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa \sin f)}{aa + ff}$ et spatium X

$$= \frac{aa(\varepsilon f \sin f - e)(e(aa + ff) + \varepsilon aaf \sin f)}{2\delta g(aa\,ff)^2}.$$

At pro motu gyratorio reperietur $\tan g s = \tan g ZO = \frac{ef + \varepsilon aa \sin f}{\varepsilon(aa + ff)\cos f}$, (existente perpetuo $DIO = 90°$), et celeritas angularis

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(eeff + 2e\varepsilon aaf \sin f + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin f^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos f^2)}}{aa + ff}.$$

COROLL. 1.

1291. Si fuerit $\varepsilon = \epsilon f$ fin f, globus statim ab initio motum prosequetur uniformem, tam progressivum quam gyratorium, qui casus limitem constituit inter binos tractatus.

COROLL. 2.

1292. Ad priorem casum, quo $\varepsilon > \epsilon f$ fin f, referendi sunt ii, quibus ϵ habet negativum valorem, seu globo impressus fuerit initio motus gyratorius in sensum ZDTE. Posito autem $-\epsilon$ loco ϵ, fieri potest ut globus revertatur, antequam ad uniformitatem pervenerit.

COROLL. 3.

1293. Casu hoc quo ϵ negative capitur, ad tempus t habebimus, $\varphi = 0$, $\vartheta = 0$, $\zeta = 180°$, $v = \varepsilon - 2\delta g t$, $w = \varepsilon + \epsilon f$ fin f $- 2\delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$; tang s = tang f $- \frac{2\delta f g t}{\epsilon aa \text{ cof f}}$ et $u = \surd$, $\left(\epsilon\epsilon - \frac{4\delta\epsilon f g t \text{ fin f}}{aa} + \frac{4\delta\delta ff gg tt}{a^4}\right)$; at post tempus

$$t = \frac{aa(\varepsilon + \epsilon f \text{ fin f})}{2\delta g(aa + ff)}, \text{ percurso spatio X}$$

$$= \frac{aa(\varepsilon + \epsilon f \text{ fin f})(\varepsilon(aa + 2ff) - \epsilon a^2 f \text{ fin f})}{2\delta g(aa + ff)^2},$$ globi motus uniformitatem attinget, eritque tum $v = \frac{f(\varepsilon f - \epsilon aa \text{ fin f})}{aa + ff}$; tang $s = \frac{\varepsilon aa \text{ fin f} - \varepsilon f}{\epsilon(aa + ff) \text{ cof f}}$

$$\text{et } u = \frac{\surd(\varepsilon\varepsilon ff - 2\varepsilon\epsilon aaf \text{ fin f} + \epsilon\epsilon a^4 \text{ fin f}^2 + \epsilon\epsilon(aa + ff)^2 \text{ cof f}^2)}{aa + ff}.$$

SCHOLION.

1294. Casus hic praecipue est memorabilis, quo globo ejusmodi motus imprimi potest, ut primo recedat, mox autem iterum revertatur, quod experimento ostendi solet, dum digito ad globum circa D applicato et deorsum presso duplex motus globo imprimitur, alter progressivus in directione DIE, alter gyratorius in sensum ZDTE. Sed ut phaenomenon succedat, necesse est ut celeritas angularis prae progressiva certum quendam limitem excedat, quem quo facilius agnoscamus, calculum ad istum

istum casum accommodemus quo motus gyratorius globo circa axem horizontalem et ad directionem motus progressivi normalem imprimitur. Quod si ergo e denotet celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem retrogyrantem in sensum ZDTE, existente f radio globi et Maa ejus momento inertiae, frictioneque $= \delta M$; primo globus in directione DIE procedet, et elapso tempore t ejus celeritas secundum eandem directionem erit $v = e - 2\delta gt$, confecto spatio $X = t(e - \delta gt)$; tum vero etiamnunc circa eundem axem retrovolvetur celeritate angulari $\varepsilon = \varepsilon - \frac{2\delta fgt}{aa}$. Motus autem aequabilis evadit elapso tempore $t = \frac{aa(e + \varepsilon f)}{2\delta g(aa + ff)}$, eritque tum celeritas progressiva $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa)}{aa + ff}$ et angularis $\varepsilon = \frac{eaa - ef}{aa + ff}$. Quare si fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa}$, globus nunc retro movetur, gyratorio motu adhuc retro vergente: sin autem fuerit $\varepsilon < \frac{ef}{aa}$, globus adhuc procedit, et gyratio in sensum contrarium est versa. Illo casu globus regredi coepit elapso tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ et percurso spatio $X = \frac{ee}{4\delta g}$.

Si globus sit homogeneus, erit $aa = \frac{2}{5}ff$ et εf exprimit celeritatem gyrationis in puncto contactus, quae si vocetur $= h$, erit post tempus t celeritas progressiva $v = e - 2\delta gt$, et gyratoria in puncto contactus, quae sit $u = h - 5\delta gt$, et spatium percursum $= t(e - \delta gt)$: motus vero aequabilis evadet elapso tempore $t = \frac{e + h}{7\delta g}$, et confecto spatio $= \frac{(6e - h)(e + h)}{49\delta g}$, ubi erit celeritas progressiva $v = \frac{5e - 2h}{7}$ et gyratoria $u = \frac{2h - 5e}{7}$. Ut ergo phoenomenon memoratum succedat, debet esse initio $h > \frac{5}{2}e$. Sin autem esset $h = \frac{5}{2}e$, uterque motus simul extingueretur, elapso scilicet tempore $\frac{e}{2\delta g}$ min. sec. et confecto spatio $\frac{ee}{4\delta g}$.

CONCLUSIONES.

Pro determinatione motus, quo globus quomodocunque impulsus super plano horizontali progreditur.

I. *Status quaestionis.* Globus hic ita comparatus supponitur, ut non solum ejus centrum gravitatis in ipsum figurae centrum incidat, sed etiam omnia momenta inertiae respectu cujusque diametri inter se sint aequalia. Talis globi radius hic ponitur $= f$, ejusque massa seu pondus $= M$ et momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum gravitatis transeuntis $= Maa$, ita ut, si globus ex materia homogenea constet, futurum sit $aa = \frac{2}{5}ff$. Praeterea vero tam ipsum planum horizontale quam tota globi superficies ita aequaliter laevigata assumitur, ut dum globus super plano radendo ingreditur, ubique eandem frictionem patiatur, quae, cum pressioni seu ipsi ponderi globi sit proportionalis, hic statuitur $= \delta M$.

Fig. 163. II. *Status initialis.* Ponamus globum initio in puncto D plano insistere eique motum progressivum secundum directionem DO esse impressum cum ea celeritate, ut globus uno minuto secundo spatium $= e$ esset percursurus, quae celeritas non tam puncto contactus D quam centro globi impressa est intelligenda. Tum vero referat circulus ABCD sectionem verticalem globi secundum directionem DO factam, qui simul haemisphaerium globi convexum nobis obversum referat, in quo sit E polus, circa quem globo motus gyratorius initio fuit impressus, cujus celeritas angularis in sensum ABCD vergens sit $= \varepsilon$, ita ut ε designet angulum uno minuto secundo absolvendum. Pro situ autem hujus puncti E sit B punctum globi summum, puncto contactus D diametraliter oppositum, unde per polum E agatur circulus maximus BE et vocetur arcus $BE = \mathfrak{f}$ et angulus $ABE = \mathfrak{h}$; quibus ergo positis tota vis viva globo initio impressa erit $= M (ee + \varepsilon\varepsilon aa)$. Postquam igitur globo talis duplex motus fuerit impressus, quaeritur quomodo is deinceps sit progressurus; ac primo quidem statim duos casus notasse juvabit, quibus globus eundem motum impressum perpetuo esset conservaturus: Alter scilicet casus tum locum habebit, quando celeritas progressiva e fuerit nulla, simulque globus circa axem verticalem BD gyretur, ita ut hoc casu fuerit $BE = \mathfrak{f} = 0$; quia enim tum nulla adest frictio, globus perpetuo in eodem loco gyrari perget. Alter vero casus tum locum habet, quando axis gyrationis fuerit horizontalis ideoque angulus $\mathfrak{h} = 90°$, simul vero insuper $e = \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, quandoquidem hoc casu frictio pariter cessat. Reliquis autem casibus omnibus globus ab initio per aliquod tempus motu inaequabili feretur, dum tam motus progressivus quam gyratorius continuo variabitur, hocque temporis intervallum reper-

repertum est $= \frac{aa\sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \sin f \sin h + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}}{2\delta g(aa + ff)}$, in minutis secundis expressum, siquidem g denotet altitudinem, per quam gravia uno minuto secundo delabuntur. Unde universus globi motus sponte in duas partes distinguitur, quarum priore motus erit inaequabilis, posteriore vero aequabilis.

III. *Determinatio partis prioris.* Elapsum nunc sit ab initio tempus quodcunque indefinitum $= t$ in minutis secundis expressum, quod autem minus sit quam limes modo assignatus $\frac{aa\sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \sin f \sin h + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}}{2\delta g(aa + ff)}$, hocque tempore tangat globus planum horizontale in puncto T, ex quo ad rectam fixam DO ducatur normalis TX vocenturque coordinatae DX $=$ X, XT $=$ Y, pro linea curva DT, per quam punctum contactus hucusque processit, ita ut centrum gravitatis globi similem viam descripsisse sit censendum. Tum vero ponatur angulus quo elementum Tt ad directionem DO inclinatur $= \varphi$, ut sit $\tang \varphi = \frac{dY}{dX}$, ipsa autem celeritas, qua centrum globi hoc momento secundum Tt ingreditur, vocetur tantisper $= v$, eritque $\frac{dX}{dt} = v \cos \varphi$ et $\frac{dY}{dt} = v \sin \varphi$. Hos autem valores demum ex motu gyratorio, qui nunc globo convenit, determinari oportet, quos mox exhibebimus, postquam scilicet motum gyratorium fuerimus contemplati. Hunc in finem secetur iterum globus plano in T insistens, plano verticali MZNT, illi quod in statu initiali consideravimus parallelo, ita ut circulus MZNT hemisphaerium nunc nobis obversum repraesentet, in quo punctum O sit polus, circa quem globus nunc gyratur Fig. 164. in sensum MZNT celeritate angulari $= \varepsilon$. His positis ista motus determinatio ita succincte proponi poterit: Ex elementis ad statum initialem pertinentibus colligatur angulus ζ, ut sit $\tang \zeta = \frac{\varepsilon f \sin f \cos h}{e - \varepsilon f \sin f \sin h}$, ex eoque statim pro motu progressivo oritur DX $=$ X $= et + \delta gtt \cos \zeta$, Fig. 163. TX $=$ Y $= \delta gtt \sin \zeta$, unde colligitur celeritas secundum DX $= \frac{dX}{dt}$ $= e + 2\delta gt \cos \zeta$ et celeritas secundum XT, sive $\frac{dY}{dt} = 2\delta gt \sin \zeta$,

 hinc-

hincque fit $\tang\phi = \frac{2\delta gt \sin\zeta}{e + 2\delta gt \sin\zeta}$, et ipsa celeritas progressiva $v = \sqrt{}$ $(ee + 4\delta egt \cos\zeta + 4\delta\delta ggtt)$. Pro motu autem gyratorio circa polum O quaeratur angulus η, ut sit $\tang\eta = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa \sin\zeta}$, hincque porro quantitas $q = \frac{e \sin\zeta}{f \cos\eta\zeta}$, eritque pro distantia hujus poli O a puncto globi summo Z, $\tang ZO = \frac{q}{\varepsilon \cos f}$, ipsa vero celeritas angularis $\varepsilon = \sqrt{(qq + \varepsilon\varepsilon \cos\mathfrak{f}^2)}$, denique erit angulus $MZO = \zeta - \eta$. Sicque omnia quae ad motus determinationem requiruntur sunt definita.

IV. *Determinatio partis posterioris.* Iam notavimus motum aequabilem incipere elapso tempore $t = \frac{aa\sqrt{(ee - 2e\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin\mathfrak{f}^2)}}{2\delta g (aa + ff)}$.

Fig. 163. Quod si ergo hic valor loco t substituatur, coordinatae X et Y dabunt punctum in curva DT, quod sit K, ubi motus aequabilis incipiet. Introducto autem angulo ζ erit tempus illud $t = -\frac{aa\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{2\delta g (aa + ff) \sin\zeta}$, ubi notetur $\sin\zeta$ esse negativum. Cum igitur corpus usque ad punctum K pervenerit, erit ejus celeritas progressiva in directione $DT = e - \frac{aa\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h} \cos\zeta}{(aa + ff) \sin\zeta} = \frac{eff - aa\varepsilon f \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{h}}{aa + ff}$, et celeritas in directione $LK = -\frac{aa\varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e \cos\mathfrak{h}}{aa + ff}$. Pro motu autem gyratorio deinceps sequente habebimus primo $\tang\eta = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) - \frac{f^3 \varepsilon \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{h}}{e(aa + ff) \sin\zeta^2}$, $\tang\eta = -\frac{e(aa + ff) - aak}{e(aa + ff) \tang\zeta}$, unde innotescit pro nostro tempore angulus $MZO = \zeta - \eta$. Porro vero pro eodem tempore, ubi contactus fit in puncto K, celeritas centri inventa est $v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek \cos\zeta}{aa + ff} + \frac{a^4 kk}{(aa + ff)^2}\right)}$, inclinatio autem directionis motus in K ad rectam fixam

DO,

DO, quae in genere erat φ, nunc fiet $\tan g\,\varphi = \frac{aak \sin \zeta}{e(aa+ff) + aak \cos \zeta}$, unde cognoscitur motus progressivus, quo globus post hoc tempus uniformiter progredietur. Pro polo autem gyrationis O jam vidimus esse angulum $MZO = \zeta - \eta$; praeterea vero invenimus $\tan g\, ZO = \frac{v}{\varepsilon f \cos \mathfrak{f}}$, et ipsam celeritatem gyratoriam:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(eeff + 2e\varepsilon aaf \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + ee(aa+ff)^2 \cos \mathfrak{f}^2)}}{aa+ff}$$

hunc ergo motum gyratorium globus posthac perpetuo conservabit. Cum autem globus ad hanc uniformitatem pervenerit, erit ejus vis viva $= \frac{M(eeff + 2e\varepsilon aaf \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa+ff)\cos \mathfrak{f}^2)}{aa+ff}$, quae deficit ab initiali quantitate $\frac{Maa(ee - 2e\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin \mathfrak{f}^2)}{aa+ff} = \frac{Maakk}{aa+ff}$; ubi brevitatis gratia posuimus $kk = ee - 2e\varepsilon f \sin \mathfrak{f} \sin \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin \mathfrak{f}^2$. Pro hoc motu uniformi notasse juvabit fore angulum $MZO = \zeta - \eta = 90° + \varphi$, tum vero $v = f\varepsilon \cdot \sin s$, quibus ergo formulis conditio motus aequabilis continetur.

ADDITAMENTUM.

Praeterea casus hic imprimis notatu dignus videtur quo globo initio nullus plane motus progressivus fuit impressus, ita ut sit $e = 0$; tum enim erit $\tan g\,\zeta = -\cot \mathfrak{h}$ ideoque $\zeta = 90° + \mathfrak{h}$ et $k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$: tum vero pro via descipta erit $X = \delta gtt \cos \zeta$ et $Y = \delta gtt \sin \zeta$; unde patet, hanc viam esse lineam rectam ad axem DO sub angulo $= \zeta$ inclinatam. Praeterea vero erit $v \cos \varphi = 2\delta gt . \cos \zeta$ et $v \sin \varphi = 2\delta gt \sin \zeta$, unde colligitur $\tan g\,\varphi = \tan g\,\zeta$ ideoque $\varphi = \zeta = 90° + \mathfrak{h}$, tum vero ipsa celeritas $v = 2\delta gt$. Deinde pro motu gyratorio erit $\tan g\,\eta = \tan g(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{\varepsilon aa \sin \zeta}$, ubi quia $\zeta - \mathfrak{h} = 90°$, erit $\tan g\,\eta = \infty$, ideoque $\eta = 90°$, consequenter angulus $MZO = \zeta - \eta = \mathfrak{h}$; unde patet, polum gyrationis O perpetuo in eodem circulo verticali manere. Cum igitur sit $\varepsilon \cos s$

$= \varepsilon$